

УДК 532.59.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

ТРИФОНОВ Ю. Я., ЦВЕЛОДУБ О. Ю.

Численно исследуется устойчивость нелинейных бегущих волн по отношению к всевозможным плоским бесконечно малым возмущениям. Найдены зоны устойчивости для двух семейств. Показано, что более устойчивы режимы второго семейства, переходящие в пределе в положительные солитоны.

1. Течение пленки жидкости, стекающей под действием силы тяжести по вертикальной стенке, становится волновым, начиная с малых значений числа Рейнольдса Re . Модельная система уравнений [1], описывающая поведение длинноволновых возмущений на такой пленке, в системе координат, движущейся с фазовой скоростью стационарных волн c , в безразмерных переменных имеет вид [2]

$$\frac{\partial q}{\partial t} - c \frac{\partial q}{\partial \xi} + 1,2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{q^2}{h} = -z \frac{q}{h^2} + Fh + 3h \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} - \frac{\partial h}{\partial t} - c \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \quad (1.1)$$

$$\xi = x - ct, \quad z = \left(3 \frac{We}{Re^2} \right)^{1/2}, \quad F = \left(\frac{We}{3Fr^2} \right)^{1/2}$$

Здесь q — расход жидкости, h — толщина пленки жидкости, We , Fr , Re — числа Вебера, Фруда и Рейнольдса соответственно [3].

Система (1.1) имеет много волновых решений в виде стационарно бегущих волн ($h = h_0(\xi)$, $q = q_0(\xi)$) [4], а проведенные расчеты [3, 5, 6] доказывают, что среди этих решений есть достаточно хорошо согласующиеся с наблюдаемыми в эксперименте волнами. Причем количественное согласие наблюдается не только для таких «интегральных» характеристик, как скорость и амплитуда, но достаточно хорошо совпадают также расчетные и экспериментальные профили волн.

Чтобы ответить на вопрос, какие волны реализуются, необходимо исследовать устойчивость полученных решений. Для слабонелинейных режимов, полученных с учетом только двух первых гармоник и отвечающих от плоскопараллельного течения, такое исследование впервые было проведено в [7].

Подставляя в (1.1)

$$h(\xi, t) = h_0(\xi) + h'(\xi, t), \quad q(\xi, t) = q_0(\xi) + q'(\xi, t)$$

и линеаризуя ее, для исследования устойчивости решений $h_0(\xi)$, $q_0(\xi)$ получаем систему линейных уравнений в частных производных с периодическими по ξ коэффициентами. Решения этой системы представимы в виде

$$(h', q') = e^{-\gamma t} (h_1(\xi), q_1(\xi)) + \text{к. с.} \quad (1.2)$$

где к. с. — комплексно-сопряженное выражение.

Из теоремы Флоке следует, что решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $h_1(\xi)$, $q_1(\xi)$, ограниченные при всех ξ ,

имеют вид

$$h_1 = e^{i\alpha Q\xi} \varphi(\xi), \quad q_1 = e^{i\alpha Q\xi} \psi(\xi) \quad (1.3)$$

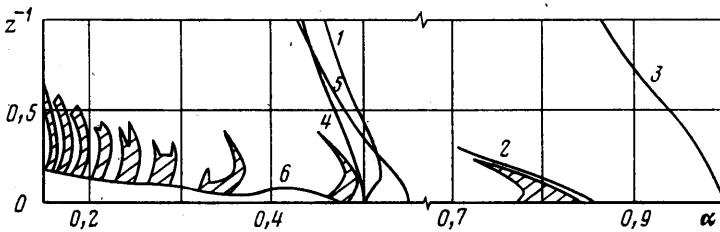
где φ, ψ — периодические функции того же периода, что и $h_0(\xi), q_0(\xi)$, $\lambda = 2\pi/\alpha$, а Q — вещественный параметр.

В результате приходим к системе

$$L(\psi, \varphi) = \gamma(\psi, \varphi) \quad (1.4)$$

Здесь L — линейный матричный дифференциальный оператор, коэффициенты которого — известные периодические функции периода λ . Явный вид оператора L дан в [2].

Таким образом, исследование устойчивости стационарных волновых режимов $h_0(\xi), q_0(\xi)$ сводится к изучению спектра собственных значений γ для различных Q , при которых система (1.4) имеет решения того же периода. Волна устойчива, если для любого Q все $\text{Real}(\gamma) \geq 0$. В [2] показано, что достаточно ограничиться интервалом $0 \leq Q \leq 0,5$. Там же под-



Фиг. 1

робно приведены постановка задачи и численный алгоритм решения системы (1.4), а также проведены некоторые предварительные расчеты. Основные результаты данной работы демонстрируются на фиг. 1.

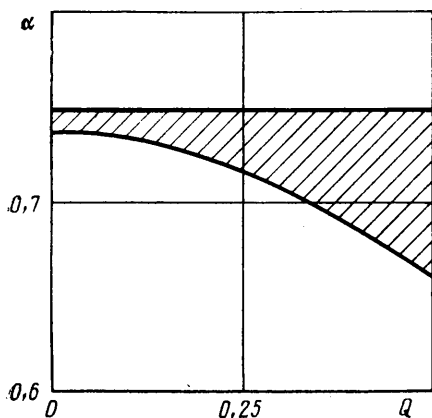
Волновые режимы, отвечающие при $\alpha=1$ (ветвление идет в область меньших α) от плоскопараллельного течения, называют волнами первого семейства [4]. В пределе при $\alpha \rightarrow 0$ они переходят в отрицательные солитоны [8, 3–6]. Установлено, что для волн интервал устойчивых волновых чисел по отношению к возмущениям той же периодичности ($Q=0$) достаточно широк. На плоскости (α, z^{-1}) справа он ограничен прямой $\alpha=1$, слева — линией 1 (фиг. 1). На этой линии реальные части двух комплексно-сопряженных корней проходят через ноль, и имеет место бифуркация Ландау — Хопфа. При дальнейшем уменьшении α инкременты неустойчивости быстро нарастают. Поэтому очень длинные волны из этого семейства в эксперименте не наблюдаются.

Область устойчивости по отношению ко всем возможным возмущениям ($Q \neq 0$) значительно уже и существует только для достаточно больших z и соответственно малых Re . На фиг. 1 она выделена штриховкой и замыкает к оси α на отрезке $0,77-0,84$, это соответствует данным работы [9], где рассматривалась устойчивость периодических решений уравнения, описывающего поведение возмущений на пленке при $\text{Re} \leq 1$. Для $z^{-1} > z_*^{-1} = 0,25$ устойчивых режимов этого семейства к всевозможным плоским возмущениям не существует, что согласуется с [7].

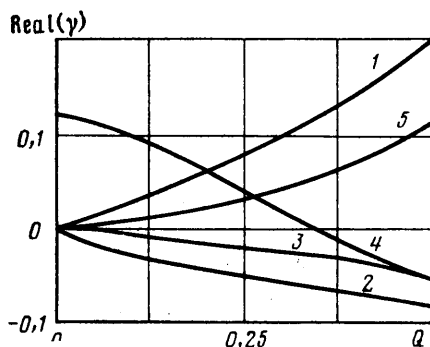
На фиг. 2 для значения параметра $z=5$ в зависимости от Q штриховкой показана зона устойчивости, а на фиг. 3 приведено поведение реальных частей первых собственных чисел при нескольких α (линии 1, $2 - \alpha = 0,8$, $3 - 5 - \alpha = 0,6$). Устойчивость по отношению к возмущениям с $Q \neq 0$ определяется в основном поведением двух собственных значений, выходящих при $Q=0$ из нуля. Переход реальных частей через ноль определяет соответственно нижнюю и верхнюю границы зоны устойчивости

на фиг. 2. Наиболее опасны возмущения с малыми Q , так как по отношению к ним интервал устойчивых волновых чисел наиболее узок.

Из (1.2)–(1.3) следует, что если в некоторой точке (α, Q) какое-нибудь собственное значение $\gamma=0$, то возможно возникновение нового стационарного волнового режима. Если $Q=p/r$ – рациональное число, то образуется новый периодический режим, волновое число которого $\alpha_*= \alpha/r$. Если Q – иррациональное число, то рождается двоякопериодический режим. Так, для фиг. 2 при всех Q одно из собственных значений становится равным нулю на верхней границе зоны устойчивости. Наибольшее новое волновое число $\alpha_* = \alpha/2$ связано с $Q=1/2$. Соответствующие этой си-



Фиг. 2



Фиг. 3

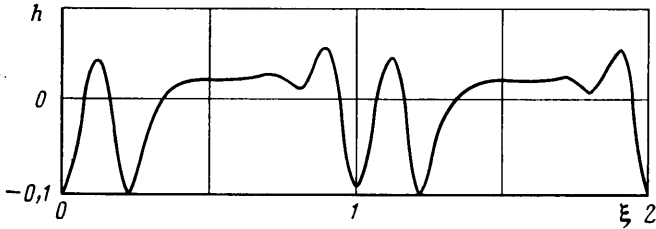
туации α лежат на кривой 2 (фиг. 1). Но порождающиеся от нее решения с α_* всегда неустойчивы к возмущениям той же периодичности, причем инкременты нарастают быстро. Так, при $z=10$ волны этого семейства существуют при $\alpha < \alpha_* \approx 0,403$, и уже при $\alpha=0,4$ инкремент $\delta = -\text{Real}(\gamma) \approx 2 \cdot 10^{-2}$. Для водоглицериновых пленок это, например, означает, что соответствующее возмущение вырастает в e раз на расстояниях $\sim 5-10$ см. При дальнейшем уменьшении α этот инкремент растет, а также появляются новые неустойчивые моды.

Характерный вид длинных волн из этого семейства приведен на фиг. 4. Здесь $\alpha=0,2$, $z=10$, $F=9,946$, $c=2,827$. Он очень похож на профили, рассчитанные в [10] для уравнения, справедливого при малых значениях числа Re . По-видимому, волны этого типа названы там третьим семейством. Своим пределом они имеют отрицательный двугорбый солитон – вмятину, но из-за сильной неустойчивости наблюдать такие волны не удастся.

Ветвление, аналогичное рассмотренному, возможно и в области неустойчивых по отношению к возмущениям с $Q \neq 0$ волновых чисел. Так, на линии 3 (фиг. 1) наряду с существующими неустойчивыми возмущениями становится нейтральным одно из возмущений с $Q=0,5$ и соответственно по линии 4 порождается самое интересное решение, названное в [4] волнами второго семейства. При $z^{-1} < z_1^{-1} = 0,81$ ветвление идет в сторону больших α , при $z^{-1} < z_1^{-1}$ – меньших. Неустойчивое в момент зарождения по отношению к возмущениям с $Q=0$, оно становится устойчивым, достигнув линии 5. От кривой 5 это семейство продолжается в область меньших α , оставаясь устойчивым к таким возмущениям вплоть до линии 6. На этой линии зануляются реальные части двух комплексносопряженных собственных значений, т. е. на ней аналогично линии 1 для первого семейства имеет место бифуркация Ландау – Хопфа. В пределе ($\alpha \rightarrow 0$) второе семейство переходит в положительные солитоны – возвышения [3–6].

Для второго семейства, так же как и в случае волн первого семейства, на плоскости (α, Q) зоны устойчивости определяются в основном поведением двух собственных чисел, выходящих при $Q=0$ из нуля. Отличие заключается в том, что теперь реальные части этих собственных чисел с изменением α меняются не монотонно, а совершают колебания около оси $\text{Real}(\gamma)=0$. В результате у второго семейства имеется несколько зон устойчивости [2]. Следует подчеркнуть также, что по абсолютной величине инкременты для второго семейства существенно меньше, чем у волн первого. Этим, по-видимому, объясняется, почему в эксперименте преимущественно наблюдаются волны второго семейства.

2. При исследовании устойчивости с уменьшением α приходится брать все большее число гармоник. Поэтому в целях экономии машинных ре-



Фиг. 4

сурсов (вычисления велись на ЭВМ БЭСМ-6 и ЕС 10-52) и учитывая, что самыми опасными, как правило, являются возмущения с малыми Q , для исследования размеров зон устойчивости в зависимости от параметра z можно применить полуаналитические методы. Чтобы подчеркнуть тот факт, что в излагаемом ниже методе рассматриваются только малые Q , в дальнейшем этот параметр будем обозначать как ϵ .

Вводя набор быстрых и медленных переменных $\xi_0 = \xi$, $\xi_1 = \epsilon \xi$, $t_n = \epsilon^n t$, $n=1,2$, представим решение системы (1.1) в виде рядов

$$q = q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \epsilon^3 q_3 + \dots, \quad h = h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \epsilon^3 h_3 + \dots$$

где $q_0(\xi)$, $h_0(\xi)$, а также фазовая скорость c и параметр F известны из решения стационарной задачи.

В первом приближении по ϵ получаем систему

$$\begin{aligned} & -c \frac{\partial q_1}{\partial \xi_0} + 1,2 \frac{\partial}{\partial \xi_0} \left[\frac{q_0^2}{h_0} \left(2 \frac{q_1}{q_0} - \frac{h_1}{h_0} \right) \right] - F h_1 + \\ & + z \frac{q_0}{h_0^2} \left(\frac{q_1}{q_0} - 2 \frac{h_1}{h_0} \right) - 3 h_0 \frac{\partial^3 h_1}{\partial \xi_0^3} - 3 h_1 \frac{\partial^3 h_0}{\partial \xi_0^3} = 0 \\ & -c \frac{\partial h_1}{\partial \xi_0} + \frac{\partial q_1}{\partial \xi_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ее решение имеет вид

$$q_1 = A \frac{\partial q_0}{\partial \xi}, \quad h_1 = A \frac{\partial h_0}{\partial \xi}$$

где A — функция медленных переменных.

Для второго приближения получается неоднородная система $U(q_2, h_2) = (f_1, f_2)$

$$\begin{aligned} f_1 = & -\frac{\partial q_1}{\partial t_1} + c \frac{\partial q_1}{\partial \xi_1} - 1,2 \frac{\partial}{\partial \xi_0} \left[\frac{q_0^2}{h_0} \left(\frac{q_1}{q_0} - \frac{h_1}{h_0} \right)^2 \right] - \\ & - 1,2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{q_0^2}{h_0} \left(2 \frac{q_1}{q_0} - \frac{h_1}{h_0} \right) \right] - z \frac{q_0}{h_0^2} \left(3 \frac{h_1^2}{h_0^2} - 2 \frac{h_1 q_1}{h_0 q_0} \right) + \end{aligned}$$

$$+ 3 \left(3h_0 \frac{\partial^3 h_1}{\partial \xi_0^2 \partial \xi_1} + h_1 \frac{\partial^3 h_1}{\partial \xi_0^3} \right) \quad (2.2)$$

$$f_2 = -\frac{\partial h_1}{\partial t_1} + c \frac{\partial h_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi_1}$$

Здесь U — линейный дифференциальный оператор системы (2.1). Из общей теории следует, что (2.2) разрешима в том случае, если правая часть ортогональна решениям однородной сопряженной к (2.1) задачи ψ^* , φ^* . Одно ее решение легко выписать

$$(\psi^*, \varphi^*) = (0, 1) \quad (2.3)$$

Численно проверялось, что других нетривиальных решений сопряженной задачи в неособых точках нет. Правая часть (2.2), очевидно, ортогональна (2.3). В силу линейности решение (2.2) представимо в виде

$$q_2 = \alpha_1 \frac{\partial A}{\partial t_1} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial \xi_1} + \gamma_1 A^2, \quad h_2 = \alpha_2 \frac{\partial A}{\partial t_1} + \beta_2 \frac{\partial A}{\partial \xi_1} + \gamma_2 A^2$$

Функции α_2 , β_2 , γ_2 , α_1 , β_1 , γ_1 зависят от переменной ξ_0 и определены численно.

Из требования ортогональности к (2.3) правой части системы третьего приближения получается уравнение на функцию $A(t_1, \xi_1)$, линейная часть которого имеет вид

$$-\langle \alpha_2 \rangle \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - (\langle \beta_2 \rangle - c \langle \alpha_2 \rangle + \langle \alpha_1 \rangle) \frac{\partial^2 A}{\partial t_1 \partial \xi_1} - (\langle \beta_1 \rangle - c \langle \beta_2 \rangle) \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} = 0 \quad (2.4)$$

$$\langle \alpha_2 \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \alpha_2(\xi) d\xi$$

Здесь знак $\langle \rangle$ означает осреднение, λ — длина волны решения $q_0(\xi)$, $h_0(\xi)$. Подставляя в (2.4) $A \sim e^{-\eta t_1} e^{i \xi_1}$, для комплексной величины η получаем квадратное уравнение. Из него для $a = \text{Real}(\eta)$ имеем

$$a^2 = -R_x = \frac{\langle \beta_1 \rangle - c \langle \beta_2 \rangle}{\langle \alpha_2 \rangle} - \frac{(\langle \beta_2 \rangle - c \langle \alpha_2 \rangle + \langle \alpha_1 \rangle)^2}{4 \langle \alpha_2 \rangle^2}$$

Если $R_x < 0$, то, очевидно, A нарастает со временем и решение q_0 , h_0 неустойчиво. Если $R_x \geq 0$, то η — мнимая величина. В этом случае требуется рассмотреть очередное приближение. Опуская промежуточные выкладки, приведем линейную часть следующего из условия ортогональности уравнения:

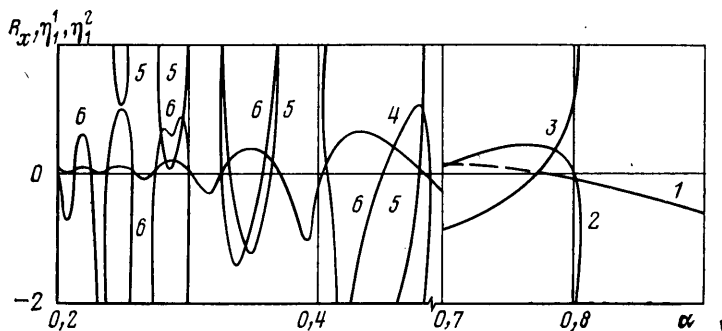
$$\begin{aligned} & -2 \langle \alpha_2 \rangle \frac{\partial^2 A}{\partial t_2 \partial t_1} - (\langle \beta_1 \rangle - c \langle \alpha_2 \rangle + \langle \alpha_1 \rangle) \frac{\partial^2 A}{\partial t_2 \partial \xi_1} - \\ & - \langle b \rangle \frac{\partial^3 A}{\partial t_1^3} - (\langle \mu_1 \rangle - c \langle \mu \rangle) \frac{\partial^3 A}{\partial \xi_1^3} - (\langle d \rangle - c \langle b \rangle + \\ & + \langle b_1 \rangle) \frac{\partial^3 A}{\partial t_1^2 \partial \xi_1} - (\langle \mu \rangle - c \langle d \rangle + \langle d_1 \rangle) \frac{\partial^3 A}{\partial t_1 \partial \xi_1^2} = 0. \end{aligned}$$

Здесь μ , μ_1 , b , b_1 , d , d_1 — функции от ξ_0 , получающиеся из решения системы при ϵ^3 .

Подставляя в (2.5) $A \sim \exp[-\eta_1 t_2 - \eta_1 t_1 + i \xi_1]$, для определения η_1 приходим к линейному уравнению. Заметим, что, так как из уравнения (2.4) для определения η получается квадратное уравнение, в экспоненту вместо η нужно подставлять поочередно оба решения этого уравнения и соответственно находить два значения η_1 : η_1^1 и η_1^2 . Если $\text{Real}(\eta_1^1)$ и $\text{Real}(\eta_1^2)$ будут больше нуля, то исходное решение устойчиво, а если хотя бы одна из этих реальных частей меньше нуля, то неустойчиво.

На фиг. 5 для волн первого семейства при значении параметра $z=10$ и второго семейства при $z=5$ в зависимости от волнового числа α приведены величины R_x — линии 1, 4, $\text{Real}(\eta_1^1)$ — линии 2, 5 и $\text{Real}(\eta_1^2)$ — линии 3, 6. В тех местах, где $R_x > 0$, линии 1, 4 проведены пунктиром, так как здесь устойчивость определяется знаками $\text{Real}(\eta_1^1)$ и $\text{Real}(\eta_1^2)$.

Для первого семейства при выходе из области устойчивых волновых чисел α через нижнюю границу (там, где линия 3 проходит ноль) инкременты нарастают значительно медленнее, $\sim \varepsilon^2$, чем при переходе через



Фиг. 5

верхнюю (точка нуля на кривой 2; здесь она практически совпадает с корнем кривой 1), $\sim \varepsilon$.

Для волн второго семейства из-за сложного поведения кривых 4–6 (фиг. 5) выделить какие-то общие для всех зон устойчивости закономерности в изменении инкрементов нельзя.

Анализ уравнений (2.1), (2.2), (2.4) и (2.5) приходится проводить численно, но на это требуется затрат меньше, чем при полном рассмотрении системы (1.4). Построенные в результате области устойчивости для второго семейства показаны на фиг. 1. Они примыкают к линии 6 и тоже выделены штриховкой.

Авторы благодарят участников семинаров В. Е. Накорякова в ИТФ СО АН СССР и Г. И. Петрова в НИИ механики МГУ за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
2. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Стационарные двумерные волны на вертикально стекающей пленке жидкости и их устойчивость // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54. № 1. С. 41–47.
3. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Нелинейные волны на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальной стенке // ПМТФ. 1985. № 5. С. 15–19.
4. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 691–696.
5. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 63–67.
6. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Волновые режимы в стекающих пленках жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений со свободной поверхностью. Новосибирск, 1985. С. 82–102.
7. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 2. С. 20–25.
8. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 63–66.
9. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 28–34.
10. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и тепломассообмен течений со свободной поверхностью. Новосибирск, 1985. С. 32–48.