МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1988

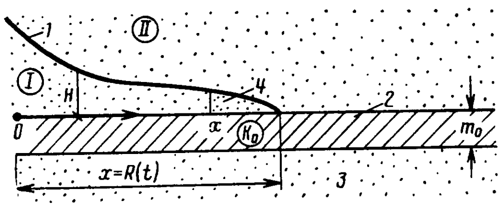
УДК 532.546

О РАСТЕКАНИИ ВОДЫ ПО ГЛИНИСТЫМ СЛОЯМ В СУХИХ ГРУНТАХ

КУРАНОВ Н. П.

Фильтрацию воды в сухих грунтах при растекании ее по водоупору или слабопроницаемым глинистым отложениям необходимо рассматривать при изучении вопросов потерь воды из вновь строящихся каналов, образования верховодки при орошении сельскохозяйственных культур, при строительном освоении территорий и прогнозе подтопления строящихся и эксплуатируемых зданий и сооружений как в гражданском, так и в промышленном строительстве [1–4], а так же в ряде других смежных областей.

Вывод условия на границе промачивания водой сухого грунта. Рассмотрим общий случай, когда растекание воды происходит по слабопроницаемому слою небольшой мощности m_0 с коэффициентом фильтрации k_0 (см. фигуру, где *1* — уровень грунтовых вод; *2* — слабо проницаемый слой



небольшой мощности; *3* — подстилающий необводненный хорошо проницаемый слой; *4* — элемент области фильтрации, прилегающий к границе промачивания $x=R(t)$). В частном случае $k_0=0$ слой *2* представляет собой водоупор. Фильтрация происходит в зоне I, зона II не обводнена. Через слабопроницаемый слой в зоне I происходит вертикальная фильтрация, т. е. перетекание воды из зоны I в подстилающий необводненный слой. Найдем условие, которое должно выполняться на границе промачивания. Для этого рассмотрим изменение объема воды в водонасыщенном элементе *4*, прилегающем к границе промачивания $x=R(t)$.

В этот элемент вдоль оси x за время Δt поступает объем воды, равный $\Delta v_x=v_xH(x)\Delta y\Delta t$, где v_x — скорость фильтрации вдоль оси x. Через слабопроницаемый слой за это же время выходит объем воды

$$\Delta v_1=-k_0\frac{H+m_0}{m_0}(R-x)\Delta y\,\Delta t$$

а через свободную поверхность может поступать только инфильтрационное питание в объеме $\Delta v_2=\omega(R-x)\Delta y\Delta t$ (при поливах $\omega>0$, при испарении со свободной поверхности $\omega<0$).

Поскольку $\Delta v_x+\Delta v_1+\Delta v_2=\Delta v$, где $\Delta v=0{,}5(R-x)\mu H_0\Delta y$ — объем воды в рассматриваемом элементе (μ — недостаток насыщения грунта водой), то из этого уравнения при переходе к пределу имеем

$$v_x H(x) - k_0 \frac{H+m_0}{m_0}(R-x) + \omega(R-x) = 0{,}5\frac{\partial[\mu(R-x)H]}{\partial t} \qquad (1)$$

Учитывая, что $v_x = -k\partial H/\partial x$, $\mu = \mathrm{const}$, уравнение (1) приведем к виду

$$-kH(x)\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{H+m_0}{m_0}(R-x) + \omega(R-x) = 0{,}5\mu H\frac{dR}{dt} + 0{,}5\mu(R-x)\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (2)$$

Особенностью уравнения (2) является тот факт, что при $x \to R$ все члены этого уравнения становятся бесконечно малыми, поскольку в этой точке уровень воды $H=0$, т. е. при $x \to R$ $H \to 0$. Однако легко видеть, что

$$\lim_{x \to R} \frac{H}{R-x} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad (3)$$

Используя (3) из (2) после деления правой и левой части на $R-x$ и перехода к пределу $x \to R$, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial x}\left(0{,}5\mu\frac{dR}{dt} + k\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0{,}5\mu\frac{\partial H}{\partial t} + k_0 - \omega \qquad (4)$$

Уравнение (4) и есть искомое наиболее общее условие на границе промачивания $x=R$.

Если учесть, что $H(R;\ t)=0$, то после дифференцирования его по времени из (4) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial x}\left(\mu\frac{dR}{dt} + k\frac{\partial H}{\partial x}\right) = k_0 - \omega \qquad (5)$$

Условия (4) и (5) на границе $x=R$ эквивалентны и различаются между собой лишь формой записи.

Рассмотрим некоторые частные случаи этого условия.

При $k_0=\omega=0$ из (5) имеем

$$\mu dR/dt = -k\partial H/\partial x \qquad (6)$$

Это условие, предложенное в [2, 4], наиболее часто употребляется в работах, посвященных рассматриваемому вопросу. Поэтому условие (5) является обобщением этого условия на случай $k_0 > \omega \neq 0$. При переходе в (6) от x и t к автомодельной переменной $\xi = x\sqrt{\mu/2H_0kt}$ получим

$$\frac{du}{d\xi} = -\xi; \qquad u = \frac{H}{H_0} \qquad (7)$$

что совпадает с условием [1, 3].

Если в (5) принять $dR/dt=0$, то получим

$$\partial H/\partial x = -\sqrt{(k_0-\omega)/k} \qquad (8)$$

Это условие характеризует стационарный случай, когда вся вода, поступающая в зону I, перетекает в зону III и растекание по слабопроницаемому слою не происходит, а образуется сформировавшийся бугор грунтовых вод.

Если в (5) принять $k_0=\omega=0$ и $dR/dt=0$, то получим $\partial H/\partial x=0$, т. е. на водоупоре при отсутствии инфильтрационного питания уровень грунтовых вод на границе промачивания подходит к оси x как к касательной только при $t \to \infty$. Заметим, что всюду $\omega < k_0$, так как в противном случае зона II будет частично обводнена, что здесь не рассматривается.

Найдем решение некоторых конкретных задач с условием (4) или (5).

Фильтрация из совершенного водоема в сухой грунт. Для круглого в плане водоема, ложе которого совпадает с кровлей слабопроницаемого слоя небольшой мощности, при быстром заполнении его водой до высоты H_0 фильтрация из водоема описывается краевой задачей

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(rH \frac{\partial H}{\partial r}\right) - \frac{k_0}{m_0}(H+m_0)+\omega \tag{9}$$

$$H(r_0;\ t)=H_0; \quad H(R;\ t)=0; \quad R(0)=r_0 \quad (r_0 \leqslant r \leqslant R)$$

которая дополняется уравнением (5) на границе $r=R$. Здесь r_0 — радиус водоема.

Точное решение этой задачи при $k_0=\omega=0$ для удлиненного водоема (канала) найдено в [1]. При этом $R=1{,}1428\sqrt{2kH_0t/\mu}$.

Решение этой же задачи легко находится приближенным методом [5], в котором полагают $\partial H/\partial t=F(t)$, т. е. скорость подъема уровня грунтовых вод принимают не зависящей от координаты. В этом случае решение принимает простой вид

$$H=H_0(1-x/R); \quad R=\sqrt{2kH_0t/\mu} \tag{10}$$

Сравнение (10) с точным решением [1] указывает на достаточно высокую точность приближенного способа [5] в задачах такого типа. Максимальная ошибка (14%) возникает при определении границы промачивания $R=R(t)$.

Для круглого в плане водоема решение задачи (9), (5) при $k_0=\omega=0$ приводит к решению в виде

$$H^2=H_0^2\left[R^2 \ln \frac{R}{r} - 0{,}5(R^2-r^2)\right]\left[R^2 \ln \frac{R}{r_0} - 0{,}5(R^2-r_0^2)\right]^{-1} \tag{11}$$

При этом закон движения границы $R(t)$ определяется из уравнения

$$\tau=\left(\varphi \frac{R}{r_0}\right); \quad \varphi\left(\frac{R}{r_0}\right)=\int_1^{R/r_0} \sqrt{x^2 \ln x-0{,}5(x^2-1)}\,dx, \quad \tau=\frac{kH_0t}{\mu r_0^2} \tag{12}$$

Расчеты показывают, что если τ принимает значения 0,2; 2; 4; 6; 8; 10, то величина R/r_0 меняется соответственно 1,6; 2,8; 3,5; 4,1; 4,4; 4,6, т. е. со временем существенно замедляются темпы растекания воды по водоупору, что согласуется с физическим смыслом рассматриваемых процессов.

Для определения стационарного положения уровня грунтовых вод задачу (9) необходимо рассматривать при $\mu=0$ и условии (8), что при линеаризации по I способу [1] приводит к решению в виде

$$H = \frac{H_0-m_0(1-\omega')}{\Delta_0}\left[K_0(\lambda R)I_0(\lambda r)-I_0(\lambda R)K_0(\lambda r)\right]+$$

$$+\frac{m_0(1-\omega')}{\Delta_0}\left[K_0(\lambda r_0)I_0(\lambda r)-I_0(\lambda r_0)K_0(\lambda r)\right]+m_0(1-\omega')$$

$$\lambda R(\Delta_0+M\Delta_1)=M(h_0-1) \tag{13}$$

$$\Delta_0=I_0(\lambda r_0)K_0(\lambda R)-I_0(\lambda R)K_0(\lambda r_0), \quad \Delta_1=I_0(\lambda r_0)K_1(\lambda R)+I_1(\lambda R)K_0(\lambda r_0)$$

$$\lambda^2=\frac{k_0}{km_0H_s}; \quad M^2=\frac{m_0(1-\omega')}{H_s}; \quad h_0=\frac{H_0}{m_0(1-\omega')}, \quad \omega'=\frac{\omega}{k_0}$$

Здесь $I_0(x)$; $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, H_s — параметр линеаризации, характеризующий среднюю мощность потока.

Налив в совершенную скважину в сухом грунте. Рассмотрим фильтрацию из совершенной скважины в сухом грунте при наличии слабопроницаемого слоя (фигура), в которую подают воду с постоянным расходом Q. В этом случае краевая задача о фильтрации воды из скважины может быть сформулирована в виде ($\omega=0$)

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH\frac{\partial H}{\partial r}\right)-\frac{k_0}{m_0}(H+m_0);\qquad 0\leqslant r\leqslant R \tag{14}$$

$$-2\pi r_c kH\frac{\partial H}{\partial r}+\pi r_c^2\frac{\partial H_c}{\partial t}=Q;\qquad H=H_c;\qquad r=r_c \tag{15}$$

$$\mu\frac{dR}{dt}+k\frac{\partial H}{\partial r}=k_0;\qquad H=0;\qquad r=R;\qquad R(0)=r_c \tag{16}$$

Здесь r_c — радиус скважины; H_c — уровень воды в скважине. Условие (15) учитывает изменение уровня в стволе скважины при наливе, а условие (16) эквивалентно (4) в радиальной системе координат. Задача (14)—(18) в случае $k_0\neq0$ имеет стационарное решение. При линеаризации уравнения (14) по H^2, принимая $k_0(H+m_0)\approx k_0H^2/H_s+k_0m_0$, стационарное решение можно записать в следующем виде:

$$\frac{H^2}{m_0H_s}=\lambda R[K_1(\lambda R)I_0(\lambda r)+I_1(\lambda R)K_0(\lambda r)]\qquad \lambda^2=\frac{2k_0}{km_0H_s} \tag{17}$$

Граница R находится из уравнения

$$I_1(\lambda R)K_1(\lambda r_c)-I_1(\lambda r_c)K_1(\lambda R)=Q/2\pi r_ck_0R \tag{18}$$

Здесь $I_i(z)$; $K_i(z)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода i-того ($i=0$; 1) порядка

Приведем также нестационарное решение задачи (14)—(16) при $k_0=0$, найденное с использованием гипотезы Г. И. Гусейнова

$$H^2=\frac{Q}{2\pi k}W(r;t),\qquad W(r,t)=\frac{1}{\mu\eta^2+1-\mu}\left[2\mu\eta^2\ln\frac{R}{r}-\mu\frac{R^2-r^2}{r_c^2}\right]$$

$$\tau=\sqrt{\frac{kQ}{\pi}\frac{2t}{r_c^2}}=\sqrt{\mu\eta^2(\mu\eta^2+1-\mu)}-\sqrt{\mu}+(1-\mu)\ln\frac{\eta\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu\eta^2-1-\mu}}{1+\sqrt{\mu}},$$

$$\eta=\frac{R}{r_c} \tag{19}$$

Глинистые основания, как правило, имеют довольно низкую проницаемость ($k_0<0{,}1$ м/сут), и поэтому в подавляющем большинстве случаев $\lambda r_c\ll1$.

С учетом того, что при этом условии $I_0(\lambda r_c)\sim1$, $I_1(\lambda r_c)\sim0{,}5\lambda r_c$, $K_0(\lambda r_c)\sim\ln(2/\gamma\lambda r_c)$ (γ — константа Эйлера), $K_0(\lambda r_c)\sim1/\lambda r_c$, расчетные зависимости существенно упрощаются. Так, положение границы R в (18) с точностью не ниже 5% может быть оценено по формуле

$$\lambda RI_1(\lambda R)=q,\qquad q=\frac{Q}{\pi km_0H_s} \tag{20}$$

В этом случае изменение уровня в скважине H_c, определяемое по (17) при $r=r_c$ и $H=H_c$, находится из выражения

$$h_c^2=\lambda RK_1(\lambda R)+q\ln\frac{2}{\gamma\lambda r_c};\qquad h_c^2=\frac{H_c^2+m_0H_s}{m_0H_s} \tag{21}$$

Формулы (20) и (21) весьма удобно использовать для оценки фильтрационных свойств слабопроницаемых необводненных слоев путем решения обратных задач.

В самом деле, если осуществляется налив в скважину, пройденную до кровли глинистого слоя, и замеряется уровень воды в скважине H_c, то известны безразмерные параметры q и h_c. Тогда из (20) может быть найдена величина $\delta=\lambda R$, а из (21) – величина λ, характеризующая проницаемость k_0 глинистого слоя

$$\lambda=\frac{2}{\gamma r_c}\exp\left[-\frac{\overline{H}_c^2-\delta K_1(\delta)}{q}\right];\quad k_0=\frac{km_0H_s}{2}\lambda^2 \qquad (22)$$

В качестве иллюстрации изложенного рассмотрим пример налива воды в скважину радиусом $r_c=0{,}05$ м, с расходом $Q=15$ м³/сут при значениях параметров $H_c=5$ м, $k=10$ м/сут, $m_0=3$ м, $H_s=0{,}4\ H_c$.

В этом случае в соответствии с (20) $q=0{,}7958$, а $\delta=\lambda R=1{,}16$. Поскольку $h_c^2=5{,}1666$, то из (22) $\lambda=0{,}0675$ см$^{-1}$, $k_0=1{,}37\cdot10^{-2}$ м/сут.

Таким образом, выполненные исследования показали, что при растекании воды в сухих грунтах по слабопроницаемым глинистым отложениям на границе промачивания следует ставить условия (4) или (5).

Решения рассмотренных здесь задач не только позволяют рассчитывать положения уровней грунтовых вод в данных условиях, но и характеризуют общую методику расчета техногенных водоносных горизонтов на слабопроницаемых основаниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1977. 682 с.
2. *Веригин Н. Н., Васильев С. В., Разумов Г. А. и др.* Фильтрационные расчеты гидромелиоративных систем. М.: Колос, 1970. 440 с.
3. *Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.* Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969. С. 382.
4. *Куранов Н. П.* Прогноз формирования верховодки на непроницаемых и слабопроницаемых породах // Прогноз подтопления и проектирования мероприятий по его предотвращению: Тр. ин-та ВОДГЕО. М.: 1986. С. 51–60.
5. *Гусейнов Г. П.* Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Баку: Азернефть, 1961. С. 181.

Москва

Поступила в редакцию 4.VII.1986