МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1988

УДК 532.529.5:536.24

ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ НА ТРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В ЗАПЫЛЕННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

АГРАНАТ В. М.

В случае несжимаемой несущей фазы, степенного закона изменения скорости внешнего течения газа и малой скоростной и температурной неравновесности фаз получены и апробированы приближенные аналитические формулы для локальных коэффициентов трения и теплообмена в запыленном ламинарном пограничном слое. Эти формулы дополняют численный анализ запыленного пограничного слоя на затупленном теле [1, 2] и асимптотический расчет трения и теплообмена в квазиравновесном пограничном слое запыленного газа на пластине [3]. Обсуждается совместное влияние запыления и градиента давления на коэффициенты трения и теплообмена. Полученные результаты могут найти применение при практических расчетах трения и теплообмена в квазиравновесном запыленном ламинарном пограничном слое и при интерпретации соответствующих экспериментальных данных.

Рассматривается стационарное плоское обтекание твердого тела с постоянной температурой поверхности T_w однородным монодисперсным потоком запыленного вязкого теплопроводного несжимаемого газа при больших числах Рейнольдса. Используются стандартные допущения модели запыленного ламинарного пограничного слоя [1—7] и предполагается, что скорость газа на внешней границе пограничного слоя увеличивается с ростом продольной координаты по степенному закону $u_e=cx^m$ $(m>0)$, а температура газа и частиц вдали от тела T_e постоянна.

Математическая постановка задачи о динамическом и тепловом взаимодействии обтекаемой стенки с запыленным газом существенно зависит от значений безразмерных параметров $\delta_1=L/l_u$ и $\delta_2=L/l_t$, определяющих соотношения между характерной длиной задачи L и характерными длинами динамической и тепловой релаксации частиц l_u, l_t [1—8]. При малых числах Рейнольдса обтекания частиц, когда реализуется стоксовский режим взаимодействия фаз, параметры δ_1 и δ_2 имеют для газовзвесей одинаковый порядок [5—8]

$$\frac{\delta_2}{\delta_1}=\frac{2}{3\,\mathrm{Pr}\,\gamma}=O(1),\quad \mathrm{Pr}=\frac{\mu c_p}{\lambda},\quad \gamma=\frac{c_s}{c_p}\quad \delta_1=\frac{18\rho L}{\rho_s{}^\circ d}\mathrm{Re}_s^{-1},\quad \mathrm{Re}_s=\frac{V_\infty d}{\nu} \tag{1}$$

Здесь d, $\rho_s{}^\circ$, c_s — диаметр, плотность и теплоемкость частиц, а остальные обозначения общепринятые [5].

Вычислим безразмерные локальные коэффициенты трения и теплообмена C_f и Nu_x в случае $\mathrm{Re}_s\leqslant 1$, когда во всей области течения можно использовать соотношения (1) и вид уравнений неизотермического запыленного ламинарного пограничного слоя зависит лишь от значения параметра δ_1. Если частицы мелкие и скорость обтекания невелика, то $\delta_1\gg 1$. В этом случае скоростная и температурная неравновесности течения несущественны и применима квазиравновесная модель [3—7]. С ростом d и V_∞ параметр δ_1 уменьшается и возникает необходимость использования полных уравнений неравновесного запыленного пограничного слоя [1, 2]. Заметим, что при больших Re_s соотношения (1) не выполняются, δ_1 может существенно превышать δ_2 [8] и при выборе математической модели следует оценивать значения обоих параметров δ_1, δ_2.

При $\delta_1 \gg 1$ движение запыленного газа в пограничном слое можно описать с помощью следующей краевой задачи:

$$f''' + (1+\varkappa) f f'' = \beta (1+\varkappa) [(f')^2 - 1] \tag{2}$$

$$\Theta'' + (1+\varkappa\gamma) \Pr f \Theta' = 0$$

$$\eta = 0:\ f = f' = \Theta = 0;\ \eta = \infty:\ f' = \Theta = 1$$

$$\varkappa = \frac{\rho_{s\infty}}{\rho}, \quad \beta = \frac{2m}{m+1}, \quad \Theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}, \quad \eta = y \left[\frac{u_e}{(2-\beta)\nu x} \right]^{1/2}$$

Здесь f и η — безразмерные функция тока и автомодельная переменная [5], Θ — безразмерная температура, $\varkappa$ — относительная массовая концентрация частиц в набегающем потоке, штрих означает производную по η.

При $\varkappa=0$ задача (2) совпадает с неизотермической задачей Фокнера — Скэн для чистого газа [5, 9], а при $\beta=0$ — с задачей Блазиуса для псевдогаза [3] (следует учесть, что уравнение энергии в [3] содержит опечатку — во втором члене утерян множитель f).

Для расчета C_f и Nu_x достаточно найти безразмерные величины $a = f''(0)$ и $b = \Theta'(0)$, так как

$$\tfrac{1}{2} C_f \mathrm{Re}_x^{1/2} = (2-\beta)^{-1/2} a, \qquad \mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2} = (2-\beta)^{-1/2} b \tag{3}$$

Путем введения новых переменных и параметров

$$\eta_* = \sqrt{1+\varkappa}\,\eta, \quad f_* = \sqrt{1+\varkappa}\, f, \quad \Theta_* = \Theta, \quad \beta_* = \beta, \quad \Pr_* = \Pr \frac{1+\varkappa\gamma}{1+\varkappa} \tag{4}$$

вычисление a и b из задачи (2) сводится при любом $\varkappa$ к нахождению вспомогательных величин a_*, b_* из неизотермической задачи Фокнера — Скэн

$$\frac{d^3 f_*}{d\eta_*^3} + f_* \frac{d^2 f_*}{d\eta_*^2} = \beta_* \left[\left(\frac{df_*}{d\eta_*} \right)^2 - 1 \right], \quad \frac{d^2\Theta_*}{d\eta_*^2} + \Pr_* f_* \frac{d\Theta_*}{d\eta_*} = 0 \tag{5}$$

$$\eta_* = 0:\ f_* = \frac{df_*}{d\eta_*} = \Theta_* = 0; \quad \eta_* = \infty:\ \frac{df_*}{d\eta_*} = \Theta_* = 1$$

$$a = \sqrt{1+\varkappa}\, a_*, \quad b = \sqrt{1+\varkappa}\, b_*, \quad a_* = \left. \frac{d^2 f_*}{d\eta_*^2} \right|_{\eta_*=0}, \quad b_* = \left. \frac{d\Theta_*}{d\eta_*} \right|_{\eta_*=0} \tag{6}$$

Здесь β_* — обычный в теории пограничного слоя параметр градиента давления, а в роли числа Прандтля выступает эффективное число Прандтля псевдогаза $\Pr_*$ [3, 5–7]. При $\gamma \neq 1$ параметры $\Pr_*$ и $\Pr$ различаются, причем различие возрастает с увеличением $\varkappa$ и при $\varkappa \geqslant 0$ справедливы оценки

$$\gamma < \frac{\Pr_*}{\Pr} \leqslant 1 \quad (\gamma < 1), \qquad 1 \leqslant \frac{\Pr_*}{\Pr} < \gamma \quad (\gamma > 1) \tag{7}$$

Если $|\gamma - 1| \ll 1$, то для любого $\varkappa$ можно принять $\Pr_* \approx \Pr$ (например, для аэровзвеси алюминиевых частиц при стандартных условиях $\gamma \approx 0{,}9$). При $|\gamma - 1| \sim 1$ для существенно запыленного газа ($\varkappa \sim 1$) следует учитывать различие между $\Pr_*$ и $\Pr$. Например, в случае аэровзвеси ($\Pr \approx 0{,}7$) при $\varkappa = 2$ для водяных капель ($\gamma \approx 4{,}2$) имеем $\Pr_* \approx 2{,}2$, а для медных частиц ($\gamma \approx 0{,}4$) $\Pr_* \approx 0{,}4$.

Используя комбинацию асимптотических методов [10—12], на основе (5) можно получить приближенные аналитические формулы для a_* и b_* при $0 \leqslant \beta_* \leqslant 2$ и $\Pr_* = O(1)$, обобщающие численные и асимптотические данные об этих величинах при фиксированных β_* из теории пограничного слоя чистого газа [5, 9—11]. В итоге с учетом (3), (4), (6) приходим к следующим расчетным формулам для относительных коэффициентов трения и теплообмена в квазиравновесном запыленном ламинарном пограничном слое:

$$\frac{C_f}{C_{f0}{}^\circ}=\alpha_1(\varkappa)k_1(\beta),\qquad \alpha_1=(1+\varkappa)^{1/2},\qquad k_1=\left(\frac{2}{2-\beta}\right)^{1/2}\frac{a^\circ(\beta)}{a_0{}^\circ} \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Nu}_{x0}{}^\circ}=\alpha_1(\varkappa)k_2(\beta,\mathrm{Pr},\varkappa,\gamma),\qquad k_2=\left(\frac{2}{2-\beta}\right)^{1/2}\frac{b_*}{b_0{}^\circ} \tag{9}$$

$$a^\circ=a_1{}^\circ\equiv a_0{}^\circ[{}^1/_2(1+\sqrt{1+8{,}064\beta})]^{1/2}\quad(0\leqslant\beta\leqslant0{,}35) \tag{10}$$

$$a_0{}^\circ=0{,}470,\quad a^\circ=a_2{}^\circ\equiv1{,}233\beta^{1/2}\quad(0{,}7\leqslant\beta\leqslant2)$$

$$a^\circ=a_3{}^\circ\equiv{}^1/_2(a_1{}^\circ+a_2{}^\circ)\quad(0{,}35<\beta<0{,}7)$$

$$b_*=0{,}616(a^\circ\mathrm{Pr}_*)^{1/3}(1+0{,}153z+0{,}077z^2),\qquad z=\beta(a^\circ)^{-4/3}\mathrm{Pr}_*^{-1/3} \tag{11}$$

Здесь индекс градус относится к характеристикам чистого газа ($\varkappa=0$), а индекс ноль — к характеристикам безградиентного течения ($\beta=0$).

Необходимо отметить, что соотношения (8), (9) являются точными в рамках модели (2), а погрешность приближенных формул (10), (11) зависит от значений β, Pr_*. Формулы (10) обобщают численные данные [5, 9, 10] с максимальной погрешностью $\pm3{,}5\%$, причем для $\beta=0$ (продольное обтекание пластины), 0,5 (обтекание критической точки осесимметричного тела) и 1 (обтекание критической точки цилиндрического тела) погрешность составляет десятые доли процента. Погрешность формулы (11) при $\beta=1$ не превышает 0,5% во всем указанном в [5] диапазоне чисел Прандтля (для $0{,}6\leqslant\mathrm{Pr}_*\leqslant15$), а при $\beta=0{,}5$ эта формула согласуется с численными результатами [10] при $\mathrm{Pr}_*=0{,}7$ и 1 соответственно с точностью до 1,3 и 0,6%. При $\beta=1$ и $\mathrm{Pr}_*=\mathrm{Pr}$ формула (11) совпадает с формулой [11], а при $\beta\to0$ или $\mathrm{Pr}_*\to\infty$ она принимает вид

$$b_*=0{,}616[a^\circ(\beta)\mathrm{Pr}]^{1/3}\left(\frac{1+\varkappa\gamma}{1+\varkappa}\right)^{1/3} \tag{12}$$

Отсюда для $\varkappa=0$ и $\beta=1$ в полном соответствии с [9] получим $b_*=b^\circ=0{,}661\mathrm{Pr}^{1/3}$ ($\mathrm{Pr}\to\infty$), а для $\beta=0$ в согласии с [3] находим

$$b_*=b_0=b_0{}^\circ\left(\frac{1+\varkappa\gamma}{1+\varkappa}\right)^{1/3},\qquad b_0{}^\circ=a_0{}^\circ\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{13}$$

Из формул (8), (10) следует, что запыление и градиент давления действуют на трение независимым образом, причем коэффициент α_1 увеличения интенсивности трения вследствие запыления газа имеет такой же вид, как и при $\beta=0$ [3]. С другой стороны, в силу (9), (11) влияние примеси и градиента давления на интенсивность теплообмена в общем случае разделить нельзя и, следовательно, при оценках коэффициента теплообмена Nu_x, вообще говоря, нельзя применять принцип суперпозиции воздействий. Из (11)—(13) вытекает, что этот принцип справедлив лишь в частных случаях: $\gamma=1$ ($\mathrm{Pr}_*=\mathrm{Pr}$), $\beta\to0$, $\mathrm{Pr}_*\to\infty$, когда $z=z(\beta,\mathrm{Pr})$ или $z\to0$. Поскольку для газовзвесей с учетом (7) имеем $\mathrm{Pr}_*=O(1)$, а случай $\beta=0$ рассмотрен в [3], то из трех указанных случаев при $\beta\neq0$ практический интерес представляет лишь случай $\gamma=1$.

При $\gamma=1$ из (9), (11) следует

$$\frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Nu}_{x0}{}^\circ}=\alpha_1(\varkappa)k_2(\beta,\mathrm{Pr}) \tag{14}$$

так что коэффициент α_2 влияния примеси на Nu_x совпадает с α_1. Это объясняется тем, что при $\gamma=1$ ($c_s=c_p$) теплоемкость псевдогаза c_{p*} совпадает с теплоемкостью газа c_p и интенсификация трения и теплообмена в квазиравновесном запыленном ламинарном пограничном слое вызвана лишь увеличением плотности псевдогаза по сравнению с плотностью газа ρ в α_1^2 раз [5—7]. При $\gamma\neq1$ и $\beta\neq0$ запыление влияет на Nu_x более сложным образом, чем на C_f.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осипцов А. Н.* Пограничный слой на затупленном теле в потоке запыленного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 99–107.
2. *Осипцов А. Н., Шапиро Е. Г.* Влияние мелкодисперсной примеси на структуру пограничного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленного тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 55–62.
3. *Агранат В. М.* Об аналогии Рейнольдса в запыленном ламинарном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 160–162.
4. *Стулов В. П.* Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 51–60.
5. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
6. *Марбл Ф.* Динамика запыленных газов // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1971. № 6. С. 48–89.
7. *Панкратов Б. М., Полежаев Ю. В., Рудько А. К.* Взаимодействие материалов с газовыми потоками. М.: Машиностроение, 1976. 224 с.
8. *Ивандаев А. И.* Об оценке характерных времен динамического и теплового взаимодействия фаз в задачах волновой динамики газовзвесей // ПМТФ. 1985. № 2. С. 102–106.
9. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
10. *Тирский Г. А.* Сублимация тупого тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметрическом потоке смеси газов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 5. С. 884–902.
11. *Резников Б. И., Смыслов Ю. Н.* Об одном методе определения трения и теплового потока в автомодельных задачах пограничного слоя // ПМТФ. 1964. № 1. С. 53–58.
12. *Агранат В. М., Берцун В. Н., Гришин А. М.* Устойчивость режимов тепломассообмена в лобовой критической точке тела, обтекаемого потоком диссоциированного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 5. С. 97–106.

Томск

Поступила в редакцию
26.VI.1987