

УДК 532.581+532.528

**ЯВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА КОНТУРЕ, БЛИЗКОМ
К ПРОФИЛЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

ГОНОР А. Л., ЗАБУТНАЯ В. И.

Широкое применение аппарата аналитических функций позволило найти решение многих важных и интересных задач гидродинамики плоских течений [1]. Однако реализация конформных отображений встречает значительные трудности и практически ограничена достаточно узким набором плоских контуров. Простое представление распределения скорости и давления на эллиптическом контуре, а также на произвольном трехосном эллипсоиде было получено в [2]. В частности, было показано, что скорость на поверхности заданного эллиптического профиля (или эллипсоида) записывается в элементарном виде: $v_s = k \cos \alpha$, где k — известная константа, α — местный угол атаки. Возникает вопрос: нельзя ли получить простые выражения параметров течения для произвольного профиля, близкого к эллиптическому? Подобная задача для тел, близких к эллипсоидам вращения, рассматривалась Ф. И. Франклем [3], однако решение получено в виде бесконечной двойной суммы по полиномам Лежандра, причем требуются громоздкие численные расчеты двойных интегралов для определения коэффициентов слагаемых.

Ниже с помощью теории конформного отображения близких областей [4] удается в простом виде получить распределение скорости (давления) на произвольном гладком профиле, являющемся вариацией эллиптического контура. Выражение для скорости может быть использовано, в частности, для определения характеристик «волнистых» профилей, для уточнения формы каверны при малых числах кавитации, которая, как известно, имеет почти эллиптический профиль [5], а также в задачах пленочного кипения [6] и др.

Цель данной работы — получить эффективный метод расчета обтекания нетонких кавитаторов в широком диапазоне чисел кавитации. Эффективная теория тонких каверн развита в работах [7, 8].

Обозначим контур эллипса через C , а близкий к нему контур через C_1 . Известно конформное отображение $\xi = F(z, C)$, $F(\infty, C) = \infty$ внешности эллипса C на внешность единичного круга $|\zeta| = 1$, из которого следует соответствие точек контура C и точек окружности $\zeta = e^{i\theta}$ ($\theta = \theta(s)$).

Обозначим через $n(s)$ длину отрезка нормали к C , взятую со знаком плюс или минус, если нормаль вне или внутри C . При отображении кривая C_1 перейдет в кривую C_1^* , полярное уравнение которой с точностью до малых высшего порядка относительно $\max |n(s)|$ будет

$$\rho = 1 + n[s(\theta)] \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = 1 + \delta(\theta), \quad \zeta = \rho e^{i\theta} \quad (1)$$

где $\delta(\theta)$ — функция, характеризующая отклонение кривой C_1^* от окружности единичного радиуса, $|\delta(\theta)| < \epsilon$.

Скорости в соответствующих точках контуров C и C_1 связаны соотношением [4]¹

$$|v_1| = |v| \left\{ 1 - \delta(\theta) + \frac{\cos \theta \Delta \theta - \cos \theta_0 \Delta \theta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) dt - \right.$$

¹ Во всех изданиях книги [4] дан неправильный способ переноса отображения внутренних областей на внешние. В итоге во втором слагаемом ряда формул, включая выражение (2), появляется неверный знак, который надо заменить минусом (см. [9]).

$$\left. - \frac{1}{4\pi_0} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 1/2(t-\theta)} dt \right\} \quad (2)$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} dt, \quad \Delta\theta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt$$

где $|v|$ — скорость потока на контуре C , θ — аргумент произвольной точки A контура C , θ_0 — аргумент точки E контура C , выбранной в качестве точки отсчета, $\Delta\theta$ — приращение аргумента образа точки A на контуре C_1 , $\Delta\theta_0$ — приращение аргумента образа точки E на контуре C_1 .

Формула (2) связывает скорости точек A и A_1 контуров C и C_1 соответственно, находящихся на одной нормали к C (фиг. 1).

Перейдем теперь к определению скорости потока на профиле, близком к эллипсу произвольного удлинения. На эллиптическом контуре [2]

$$|v| = k \cos \alpha, \quad k = 1 + b/a \quad (3)$$

где b/a — отношение полуосей эллипса, α — местный угол атаки на эллипсе, т. е. угол между направлением невозмущенной скорости и касательной к эллипсу в произвольной точке. Значение скорости на близком к эллипсу профиле найдем через значение местного угла атаки α_1 в точках контура C_1 .

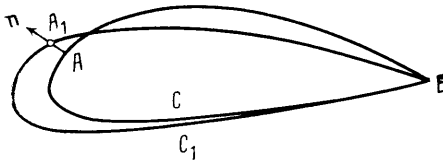
Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, параметр φ есть эксцентрический угол (фиг. 2). Нетрудно показать, что $a \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \varphi$.

Установим связь между углом θ , входящим в формулы (1), (2), и параметром φ . Покажем, что при конформном отображении внешности эллипса на внешность единичного круга $\zeta = e^{i\theta}$ угол φ является аргументом образа произвольной точки M , другими словами, углы θ и φ эквивалентны. Указанное конформное отображение осуществляет функция

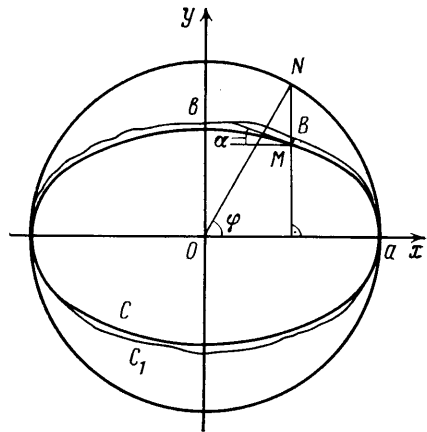
$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}, \quad z = a \cos \varphi + ib \sin \varphi, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (4)$$

Подставляя значение z в формулу (4), получаем $\zeta = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\theta}$ или $\theta = \varphi$. Данный результат иллюстрируется также построением эксцентрического угла φ на фиг. 2.

Функцию отклонения δ контура C_1 от эллипса представим в виде зависимости от угла φ и вектора нормали к эллипсу $n = \{m, p\}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Запишем уравнение контура C_1 , близкого к эллипсу, в параметрической форме

$$x = a \cos \varphi + \varepsilon m \Phi(\varphi), \quad y = b \sin \varphi + \varepsilon p \Phi(\varphi), \quad m = 2 \cos \varphi / a, \quad p = 2 \sin \varphi / b \quad (5)$$

где ε — малая величина, характеризующая близость контуров C и C_1 . Тогда расстояние произвольной точки контура C_1 до эллипса, измеренное вдоль нормали к последнему и взятое с плюсом, если C_1 вне эллипса, есть

$$n = 2\varepsilon \Phi(\varphi) \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}} \quad (6)$$

Дифференцируя (4), получаем

$$\left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{2}{\sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2 - 2(a^2 - b^2) \cos 2\varphi}} \quad (7)$$

С помощью выражений (6) и (7) на основании (1) имеем

$$\delta(\varphi) = 2\varepsilon \frac{\Phi(\varphi)}{ab} \quad (8)$$

Установим связь местного угла атаки α в произвольной точке M эллипса с местным углом атаки α_1 в точке B контура C_1 (фиг. 2)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = -\frac{b \cos \varphi + \varepsilon [p'_\varphi \Phi(\varphi) + p \Phi'_\varphi(\varphi)]}{-a \sin \varphi + \varepsilon [m'_\varphi \Phi(\varphi) + m \Phi'_\varphi(\varphi)]} \approx \\ &\approx \frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi \left[1 + \varepsilon \left(\frac{p'_\varphi \Phi(\varphi) + p \Phi'_\varphi(\varphi)}{b \cos \varphi} + \frac{m'_\varphi \Phi(\varphi) + m \Phi'_\varphi(\varphi)}{a \sin \varphi} \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначая выражение в круглых скобках через q и учитывая формулу для $\operatorname{tg} \alpha$, имеем

$$\begin{aligned} q &= 2 \left[\frac{\cos \varphi \Phi(\varphi) + \sin \varphi \Phi'_\varphi(\varphi)}{b^2 \cos \varphi} + \frac{\cos \varphi \Phi'_\varphi(\varphi) - \sin \varphi \Phi(\varphi)}{a^2 \sin \varphi} \right] \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \operatorname{tg} \alpha (1 + \varepsilon q), \quad \cos \alpha = \cos \alpha_1 (1 + \varepsilon q \sin^2 \alpha_1) \end{aligned} \quad (10)$$

Перепишем соотношение (2), учитывая, что $\theta_0 = 0$

$$\begin{aligned} |v_1| &= |v| \left\{ 1 - \delta(\theta) + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi \sin \theta} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 1/2(t-\theta)} dt \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Принимая во внимание, что $\theta = \varphi$ и формулы (3), (8), (10), (11) и обозначая в последней $|v_1| = v_s$, получим

$$\begin{aligned} v_s &= \left(1 + \frac{b}{a} \right) |\cos \alpha| \left\{ 1 + \varepsilon \left[q \sin^2 \alpha_1 - \frac{2}{ab} \Phi(\varphi) + \frac{1}{\pi ab} \int_0^{2\pi} \Phi(t) dt + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi ab \sin \varphi} \int_0^{2\pi} \Phi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\pi ab} \int_0^{2\pi} \Phi(t) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-t}{2} dt - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2\pi ab} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(t) - \Phi(\varphi)}{\sin^2 1/2(t-\varphi)} dt \right] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение (12) дает явное от геометрии контура представление скорости v_s на произвольном гладком профиле C_1 , являющимся вариацией эллиптического контура. Помимо слагаемых, зависящих от локальной характеристики произвольной точки контура C_1 (местный угол атаки α_1), присутствуют также члены, отражающие влияние профиля в целом.

При $b/a \rightarrow 0$ соотношение (12) определяет равномерно пригодное распределение скорости в рамках теории тонкого тела.

В ряде задач удобно задавать форму профиля $\Phi(\varphi)$ в виде тригонометрического ряда

$$\delta(\varphi) = \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \right) \quad (13)$$

тогда интегралы исчезают и выражение (11) сводится к элементарной формуле

$$\begin{aligned} |v_1| = |v| \left\{ 1 + \varepsilon \left[a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + a_2 (1 + 2 \cos 2\varphi) + b_2 \left(\frac{1 - \cos 3\varphi}{\sin \varphi} \right) + \right. \right. \\ + a_3 (2 \cos \varphi + 3 \cos 3\varphi) + b_3 \left(\frac{1 - \cos 4\varphi}{\sin \varphi} + \sin 3\varphi \right) + \dots + a_{2n} (1 + 2 \cos 2\varphi + \dots \\ \dots + 2 \cos 2(n-1)\varphi + 2n \cos 2n\varphi) + b_{2n} \left(\frac{1 - \cos (2n+1)\varphi}{\sin \varphi} + 2(n-1) \sin 2n\varphi \right) + \\ + a_{2n+1} (2 \cos \varphi + 2 \cos 3\varphi + \dots + 2 \cos (2n-1)\varphi + (2n+1) \cos (2n+1)\varphi) + \\ \left. \left. + b_{2n+1} \left(\frac{1 - \cos 2(n+1)\varphi}{\sin \varphi} + (2n-1) \sin (2n+1)\varphi \right) + \dots \right] \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

Выражения (12) и (14) можно использовать и для определения параметров течения на контуре C_1 при наличии угла атаки. В этом случае множитель перед скобкой заменяется выражением скорости на эллипсе, обтекаемом под углом атаки. Последняя находится с помощью разложения скорости набегающего потока на две составляющие [2].

Применим полученные соотношения к задачам кавитационного обтекания. Однако предварительно проверим формулы на тестовом примере, для которого известно точное решение.

За опорный контур C примем окружность радиуса a , а в качестве близкого к нему контура C_1 выберем эллипс, уравнение которого в параметрической форме, согласно (5), будет

$$\begin{aligned} x = a \cos \varphi (1 - \varepsilon \sin^2 \varphi), \quad y = a \sin \varphi (1 - \varepsilon \sin^2 \varphi) \\ \Phi(\varphi) = -1/2 a^2 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

Все интегралы, входящие в выражение (12), вычисляются в этом случае элементарно и принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Phi(t) dt = -\frac{\pi a^2}{2}; \quad \int_0^{2\pi} \Phi(t) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-t}{2} dt = \frac{\pi a^2}{2} \sin 2\varphi \\ \int_0^{2\pi} \Phi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = 0; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(t) - \Phi(\varphi)}{\sin^2 1/2(t-\varphi)} dt = -2\pi a^2 \cos 2\varphi \end{aligned}$$

Согласно формуле (10), получаем $q = -2$. Учитывая, что $\cos 2\varphi = 2 \sin^2 \alpha - 1 + O(\varepsilon)$, и подставляя найденные величины в (12), получим

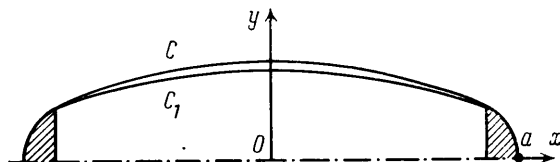
$$v_s = 2 \cos \alpha (1 - \varepsilon/2) \quad (15)$$

С другой стороны, точное распределение скорости на эллиптическом контуре определяется формулой [2] $v_s = (1 + b/a) \cos \alpha$. В нашем случае $b = (1 - \varepsilon)a$, и последнее выражение совпадает с формулой (15).

Данный результат также следует из формулы (14) с использованием выражений (8) и (10).

Таким образом, тестовый пример согласуется с представлением скорости формулами (12) и (14).

В рамках предложенного подхода можно простыми средствами решать задачи кавитационного обтекания по схеме Рябушинского. Рассмотрим две постановки: в первой задана форма кавитатора, нужно определить распределение скорости на нем и форму каверны; во второй задано распределение скорости на кавитаторе, находится его форма и форма соответствующей каверны (обратная задача). При решении этих задач форму кавитатора и каверны удобно задавать в виде ряда Фурье. С учетом сим-



Фиг. 3

метрии кавитатора и симметрии схемы Рябушинского (фиг. 3) ряд Фурье имеет вид

$$\delta(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cos 2k\theta \quad (16)$$

Учитывая представление (16), полагая $\varepsilon=1$ и преобразуя формулу (14), получим

$$F(\theta) = \frac{|v_1|}{|v|} - 1 = (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots) + 2(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots) \cos 2\theta + 2(2a_4 + a_6 + a_8 + \dots) \cos 4\theta + 2(3a_6 + a_8 + \dots) \cos 6\theta + 2(4a_8 + \dots) \cos 8\theta + \dots \quad (17)$$

Неизвестное распределение скорости на кавитаторе можно разыскивать в виде степенного либо тригонометрического полинома. Ниже будем задавать распределение скорости тригонометрическим полиномом, тогда $F(\theta)$ будет определяться следующим образом:

$$F(\theta) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n x_i \cos \frac{\pi i \theta}{\theta_0}; & -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0; \quad \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0 \\ \frac{(1+\sigma)^{1/2}}{1+b/a} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{ctg}^2 \theta - 1}; & \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0; \quad \pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0 \end{cases} \quad (18)$$

где σ — число кавитации, θ_0 — эксцентрический угол точки сопряжения тела с каверной.

Если теперь функцию $F(\theta)$, записанную формулой (18), представить в виде ряда Фурье

$$F(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \cos 2n\theta; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (19)$$

то с помощью соотношения (17) легко связать коэффициенты a_{2k} и c_{2n} .

Для нескольких первых коэффициентов имеем

$$a_2 = \frac{c_2}{2} - \frac{c_4}{4} - \frac{c_6}{12} - \frac{c_8}{24}; \quad a_4 = \frac{c_4}{4} - \frac{c_6}{12} - \frac{c_8}{24}; \quad a_6 = \frac{c_6}{6} - \frac{c_8}{24};$$

$$a_8 = \frac{c_8}{8}; \quad c_0 = c_2 \quad (20)$$

В свою очередь коэффициенты c_{2n} зависят от коэффициентов x_i , входящих в выражение (18), и отношения b/a . Последнее определяется из условия равенства давления в точке сопряжения кавитатора с каверной. Распределение скорости (18) должно удовлетворять условию $c_0 = c_2$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{(1+\sigma) \operatorname{ctg}^2 \theta_0 - 1} \left\{ 1 - (1+\sigma)^{1/2} (1-\sigma \operatorname{ctg}^2 \theta_0)^{1/2} + 2\epsilon r(x_i, \theta_0) \left[1 + \frac{1 - (1+\sigma)^{1/2} (1-\sigma \operatorname{ctg}^2 \theta_0)^{1/2}}{(1+\sigma) \operatorname{ctg}^2 \theta_0 - 1} - \frac{(1+\sigma)^{1/2}}{2 \sin^2 \theta_0 (1-\sigma \operatorname{ctg}^2 \theta_0)^{1/2}} \right] \right\} \quad (21)$$

$$r(x_i, \theta_0) = \sum_{i=0}^N (-1)^i x_i$$

Отсюда следует, что коэффициенты c_{2n} в конечном счете будут зависеть от неизвестных коэффициентов x_i . Если решается обратная задача, т. е. коэффициенты x_i заданы, то по формулам (20) и (16) находятся коэффициенты a_{2k} , форма кавитатора и каверны. Если же решается прямая задача, тогда задана форма кавитатора $\delta^*(\theta)$ и с учетом того, что на интервале $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ форма кавитатора, определяемая формулой (16), должна совпадать с заданной формой $\delta^*(\theta)$, имеем

$$\int_0^{\theta_0} \delta(\theta) \cos 2i\theta \, d\theta = \int_0^{\theta_0} \delta^*(\theta) \cos 2i\theta \, d\theta, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Последние условия дают систему линейных уравнений для определения коэффициентов x_i .

В частном случае, если задать кавитатор эллиптической формы, то $\delta^*(\theta) = 0$ и условия (22) упрощаются.

В качестве иллюстрации метода проведем расчет следующей конкретной задачи: определим форму кавитатора и каверны при условии, что распределение скорости на кавитаторе совпадает с точностью до множителя с распределением скорости на соответствующей части эллипса при безотрывном обтекании. В этом случае

$$F(\theta) = \begin{cases} x_0; & -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0; \quad \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0 \\ \frac{(1+\sigma)^{1/2}}{1+b/a} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{ctg}^2 \theta - 1}; & \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0; \quad \pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0 \end{cases}$$

Полагая, что число кавитации $\sigma = 0,1$ и угол точки сопряжения тела с каверной $\theta_0 = \pi/6$, с помощью формулы (21) получим $b/a = 0,04683$.

Тогда с учетом того, что $b/a \ll 1$, коэффициенты c_{2n} ряда (19) вычисляются по формуле

$$c_{2n} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sqrt{1+\sigma}}{1+b/a} - 1 \right) \frac{\sin 2n\theta}{2n} + \frac{2}{\pi} \frac{b^2}{a^2} \frac{\sqrt{1+\sigma}}{1+b/a} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 \theta \cos 2n\theta \, d\theta$$

и для функции отклонения $\delta(\theta)$ искомого контура (контур кавитатора

и каверны) от эллиптического при условии $\delta(0)=0$ получаем

$$10^4\delta(\theta) = -14,87 + 11,47 \cos 2\theta + 4,027 \cos 4\theta + \\ + 0,309 \cos 6\theta - 0,929 \cos 8\theta + \dots \quad (23)$$

С помощью формул (23), (5) были вычислены координаты кавитатора, каверны и эллиптического профиля, имеющего пропорциональное распределение скорости в переменных $v(\theta)$ с кавитатором. Как показал расчет, значения $\delta(\theta)$ малы ($\sim 5\%$ от отношения b/a опорного эллипса), что подтверждает справедливость теории и согласуется с постановкой задачи. Координаты полученных контуров даны ниже:

x	1	0,9848	0,9396	0,8659	0,7659	0,6427	0,4999	0,3419	0,1736	0,0000
y_1	0	0,0081	0,0158	0,0228	0,0289	0,0342	0,0386	0,0419	0,0438	0,0444
y_2	0	0,0082	0,0162	0,0236	0,0304	0,0362	0,0409	0,0444	0,0465	0,0472

Как видно из сравнения, кавитационный профиль (x, y_1) тоньше эллиптического профиля (x, y_2) с распределением скорости, соответствующим безотрывному обтеканию. Если полученную форму каверны сравнить с каверной почти эллиптической формы, определяемой теорией тонкого тела Тулина [10], то разница в диаметрах миделевого сечения каверн составит $\sim 7\%$. При этом каверна, определяемая предложенным методом, имеет большую толщину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
2. Гонор А. Л. Определение поля течения на поверхности некоторых тел в потоке несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 2. С. 187–190.
3. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
5. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными поверхностями. Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
6. Шютте Ф. Некоторые задачи гидродинамики пленочного кипения. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982. 15 с.
7. Григорян С. С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 951–953.
8. Якимов Ю. Л. Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации // ПММ. 1969. Т. 32. Вып. 3. С. 499–501.
9. Гонор А. Л. О распространенной ошибке в теории конформного отображения близких областей и в приложении к обтеканию профиля // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 345–348.
10. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974. 688 с.

Москва
Днепропетровск

Поступила в редакцию
29.VI.1987