МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1988

УДК 532.546

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КАПИЛЛЯРНЫХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ НА ДВУМЕРНЫЙ ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПЕРЕНОС ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ

КАНЕВСКАЯ Р. Д.

Проводится асимптотический анализ системы уравнений двумерной двухфазной фильтрации для оценки влияния капиллярных и гравитационных сил на перераспределение флюидов по вертикали. Показано, что при крупномасштабном описании давления в фазах равны и постоянны по вертикали, однако при этом вертикальные перетоки жидкостей отличны от нуля. Указаны случаи, когда допустимо понижение размерности задач и использование псевдофункций фазовых проницаемостей и капиллярного давления [1—6]; получены критерии их применимости. Исследована структура переходных зон, которые при крупномасштабном описании соответствуют скачкам насыщенности.

1. Постановка задачи. Рассматривается двухфазная фильтрация в вертикальной плоскости с учетом капиллярных и гравитационных сил. Пусть u_i, v_i — компоненты скоростей фаз, p_i — давление, μ_i — вязкость, γ_i — удельный вес, k_x, k_y и $k=(k_x^2+k_y^2)^{0,5}$ — диагональные компоненты и модуль тензора абсолютной проницаемости, m — пористость, σ — коэффициент межфазного натяжения, θ — краевой угол смачивания. Индекс $i=1$ относится к несмачивающей фазе (нефти); $i=2$ — к смачивающей (воде). Отметим звездочкой размерные величины, где их необходимо отличать от соответствующих безразмерных величин. Введем безразмерные переменные и обозначения

$$x=\frac{mx^*}{X},\quad y=\frac{my^*}{Y},\quad t=\frac{t^*}{T},\quad u_i=\frac{u_i^*T}{X}$$

$$v_i=\frac{v_i^*T}{Y},\quad p_i=\frac{p_i^*}{\Delta p^*},\quad k_x=\frac{k_x^*}{K_x},\quad k_y=\frac{k_y^*}{K_y}$$

$$k=\frac{k^*}{K},\quad \gamma_i=\frac{\gamma_i^*}{\gamma_1^*-\gamma_2^*},\quad \mu=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma\cos\theta}{\Delta p^*}\sqrt{\frac{m}{K}},\quad \varepsilon_2=\frac{Y^2K_x}{X^2K_y},\quad \varepsilon_3=\frac{(\gamma_1^*-\gamma_2^*)Y}{m\sigma\cos\theta}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Здесь X — характерный продольный размер пласта, Y — его максимальная толщина, Δp^* — характерный внешний перепад давления, K_x, K_y и $K=(K_x^2+K_y^2)^{0,5}$ — характерные значения компонентов и модуля тензора проницаемости, T — масштаб времени, определяемый соотношением $X/mT=K_x\Delta p^*/\mu_1 X$.

Система уравнений двухфазной фильтрации с учетом капиллярных и гравитационных сил [7] в безразмерной форме может быть представлена в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (1.1)$$

$$u_1=\left[u-\varepsilon_1\mu k_x f_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right]F \tag{1.2}$$

$$v_1=\left\{v+\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\mu k_y f_2\left[\varepsilon_3(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right]\right\}F \tag{1.3}$$

$$u=-k_x(f_1+\mu f_2)\frac{\partial p_1}{\partial x}+\varepsilon_1\mu k_x f_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right) \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_2 v=-k_y(f_1+\mu f_2)\frac{\partial p_1}{\partial x}+\varepsilon_1\mu k_y f_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)+\varepsilon_1\varepsilon_3(\gamma_1 f_1+\mu\gamma_2 f_2) \tag{1.5}$$

$$p_1-p_2=\varepsilon_1 J/\sqrt{k} \tag{1.6}$$

Здесь s — насыщенность порового пространства несмачивающей фазой, $f_i(s)$ — относительные фазовые проницаемости, $F(s)=(1+\mu f_2/f_1)^{-1}$ — функция Баклея — Леверетта, равная доле несмачивающей фазы в потоке, $J(s)$ — безразмерная функция Леверетта, определяющая капиллярный скачок давления на границе между фазами, $u=u_1+u_2$, $v=v_1+v_2$ — компоненты суммарной скорости фильтрации.

Коэффициент ε_1 — отношение капиллярного давления к внешнему перепаду — является малой величиной. Коэффициент ε_2, характеризующий отношение толщины пласта к его длине и анизотропию пласта, для большинства реальных объектов также можно считать малым параметром. Коэффициент ε_3 определяется соотношением гравитационных и капиллярных сил, действующих вдоль вертикали; он может принимать различные значения в зависимости от условий задачи. Поскольку параметры ε_1 и ε_2 малы, то для анализа системы (1.1)—(1.6) целесообразно применить метод сращиваемых асимптотических разложений [8], ограничившись при этом первыми членами внешнего и внутреннего разложения решений.

2. Крупномасштабное описание процесса. Для построения первого члена внешнего разложения пренебрежем в уравнениях (1.1)—(1.6) слагаемыми порядка ε_1 и ε_2. Рассмотрим вначале случай, когда капиллярные и гравитационные силы сопоставимы по величине или преобладают капиллярные силы, т. е. $\varepsilon_3\leqslant O(1)$. Из уравнений (1.5), (1.6) следует, что в крупномасштабном приближении давления в фазах одинаковы, $p_1=p_2=p$, и, если в пласте нет изолирующих прослоев, постоянны вдоль вертикали. При этом выражения для скоростей (1.2)—(1.5) принимают вид

$$u=-k_x(f_1+\mu f_2)\frac{\partial p}{\partial x};\qquad \frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

$$u_1=uF;\qquad v_1=\left\{v+\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\mu k_y f_2\left[\varepsilon_3(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right]\right\}F \tag{2.2}$$

Несмотря на постоянство давления по вертикали, в общем случае $v_i\neq 0$. Аналогичный результат получен в [9], где показано, что в гетерогенных средах средние давления в фазах композита равны, тогда как переток между ними отличен от нуля. Из уравнений (1.1), (2.2) видно, что распределение насыщенности в пласте и вертикальные перетоки существенно зависят от отношения параметров $\varepsilon_1/\varepsilon_2$.

Рассмотрим предельные случаи. Условие $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\ll 1$ соответствует фильтрации при незначительных капиллярных и гравитационных силах в мощном анизотропном пласте. В этом случае в уравнениях (1.1), (2.2) можно пренебречь слагаемыми порядка $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$. Имеем

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

Из системы (2.1), (2.3) следует, что при $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\ll 1$ в слоистом пласте с непроницаемыми кровлей и подошвой, если суммарная подвижность фаз $f_1+\mu f_2$ незначительно изменяется в зоне смеси, реализуется послойное течение при постоянном давлении вдоль вертикали. При этом $v_i=0$.

Соотношение $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\gg 1$ соответствует фильтрации в тонком пласте с хорошей вертикальной сообщаемостью при существенных капиллярных и гравитационных силах. В этом случае из второго уравнения (2.2) при $k_y\neq 0$ имеем

$$\left[\varepsilon_3(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right]f_1f_2=0 \tag{2.4}$$

Условие (2.4) при $\varepsilon_3=O(1)$ определяет капиллярно-гравитационное, а при $\varepsilon_3\ll 1$ — капиллярное равновесие флюидов в вертикальном сечении пласта.

Рассмотрим случай $\varepsilon_3\gg 1$, когда капиллярность по сравнению с гравитацией несущественна. При этом из уравнений (1.3), (1.5) получаем

$$v_1=[v+\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3\mu k_y f_2(\gamma_1-\gamma_2)]F \tag{2.5}$$

$$k_y\left[(f_1+\mu f_2)\frac{\partial p}{\partial y}-\varepsilon_1\varepsilon_3(\gamma_1 f_1+\mu\gamma_2 f_2)\right]=0 \tag{2.6}$$

Вид решения зависит от соотношения параметров $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3$ и $\varepsilon_1\varepsilon_3$. При $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3\gg 1$, согласно (2.5), $k_yf_1f_2=0$. Поэтому одна фаза неподвижна, под действием гравитации течение расслаивается. Давление определяется выражением (2.6): при $\varepsilon_1\varepsilon_3\ll 1$ гравитационные силы несущественны по сравнению с внешним перепадом давления и $\partial p/\partial y=0$; в противном случае давление распределено по гидростатическому закону: $\partial p/\partial y=\varepsilon_1\varepsilon_3\gamma_1$ при $f_2=0$ и $\partial p/\partial y=\varepsilon_1\varepsilon_3\gamma_2$ при $f_1=0$. Таким образом, условия $\varepsilon_3\gg 1$, $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3\gg 1$ задают гравитационное равновесие жидкостей по вертикали.

При $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3=O(1)$, согласно (2.6), имеем $\partial p/\partial y=0$. Распределение насыщенности в этом случае определяется уравнением (1.1). В частности, при $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3\ll 1$ получаем (2.3).

3. Псевдофункции. Предлагаемый здесь подход к решению профильных задач может быть использован для обоснования и определения области применения методов осреднения уравнений фильтрации и введения псевдофункций фазовых проницаемостей и капиллярного давления. Эти методы базируются на предположении о постоянстве по вертикали продольной составляющей градиента давления, что соответствует крупномасштабному описанию процесса. Осредненные зависимости определяются либо приближенно на основании численных решений профильных задач [6], либо с использованием дополнительных гипотез о распределении фаз по вертикали, которые позволяют получить однозначные зависимости осредненных по толщине фазовых проницаемостей от средней насыщенности [1—5]. Эти упрощающие предположения ограничивают область использования псевдофункций разобранными выше предельными случаями. Простыми критериями применимости различных псевдофункций могут служить безразмерные параметры ε_1, ε_2, ε_3. Псевдофункции, предполагающие мгновенное установление капиллярно-гравитационного равновесия флюидов в каждом сечении пласта [1, 2], применимы при $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\gg 1$, $\varepsilon_3=O(1)$. Псевдофункции гравитационного равновесия [3] могут эффективно использоваться, если $\varepsilon_3\gg 1$, $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3\gg 1$. Псевдофазовые проницаемости, применяемые при моделировании заводнения слоистых пластов [4, 5], получены в предположении, что вытесняющая фаза заполняет пропластки в порядке убывания их абсолютной проницаемости. Как показано выше, оно справедливо при $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\ll 1$, $\varepsilon_3=O(1)$ или $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3\ll 1$, $\varepsilon_3\gg 1$.

Введение псевдокапиллярного давления [4—6], учитывающего действие капиллярных и гравитационных сил, в большинстве случаев нецелесообразно, поскольку псевдофункции применимы только при описании процесса в крупномасштабном приближении, а при этом, как показано выше, давления в фазах равны и постоянны вдоль вертикали. Исключение составляет случай гравитационного равновесия, когда $\varepsilon_1\varepsilon_3=O(1)$ или $\varepsilon_1\varepsilon_3\gg 1$.

4. Мелкомасштабное описание процесса. Система уравнений (1.1), (2.1), (2.2), дающая крупномасштабное описание двухфазной фильтрации в вертикальной плоскости, имеет разрывные решения. Рассмотрим решение исходной системы (1.1)—(1.6) внутри узкой области, которая в крупномасштабном приближении представляется скачком. Для этого найдем первый член внутреннего разложения. В окрестности данной точки разрыва введем локальную декартову систему координат с центром в этой точке. Направления осей оставим прежними, введем масштабы по осям x, y и t при помощи соответствующих масштабных множителей ε_x, ε_y и ε_t, значения которых определим позднее. Масштабы измерения скоростей оставим без изменения. Будем считать, что скорости u, v и проницаемости k_x, k_y постоянны в переходной зоне. Тогда из (1.1)—(1.3) получим

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_t}\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(u-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_x}\mu f_2\frac{k_x}{\sqrt{k}}\frac{\partial J}{\partial x}\right)F\right]+ \tag{4.1}$$

$$+\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[v+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\mu k_y f_2\left(\varepsilon^3(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{1}{\varepsilon_y\sqrt{k}}\frac{\partial J}{\partial y}\right)\right]F\right\}=0$$

Масштабные коэффициенты выбираются таким образом, чтобы слагаемые, выражающие перенос фазы за счет действия капиллярных сил в направлении осей x и y и внешнего перепада давления, были одного порядка: $\varepsilon_1/\varepsilon_x=\varepsilon_1\varepsilon_x/\varepsilon_2\varepsilon_y^2=1$. Отсюда $\varepsilon_x=\varepsilon_1$, $\varepsilon_y=\varepsilon_1/\sqrt{\varepsilon_2}$. Положим $\varepsilon_x=\varepsilon_t=\varepsilon_1$. Выбранные таким образом коэффициенты являются малыми всегда, кроме случаев капиллярного, капиллярно-гравитационного и гравитационного равновесия, которые будут рассмотрены отдельно.

Поверхность разрыва в окрестности данной точки заменим плоскостью $x-ay-bt=\xi$ и будем искать решение уравнения (4.1) в виде бегущей волны $s=s(\xi)$, удовлетворяющее граничным условиям сращивания

$$s(-\infty)=s^-,\quad s(+\infty)=s^+ \tag{4.2}$$

После замены переменных и подстановки значений ε_x, ε_y и ε_t получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-b\frac{ds}{d\xi}+\frac{d}{d\xi}\left[\left(u-\mu\frac{k_xf_2J_s'}{\sqrt{k}}\frac{ds}{d\xi}\right)F\right]-a\frac{d}{d\xi}\left\{\left[\sqrt{\varepsilon_2}v+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_2}}\mu(\gamma_1-\gamma_2)k_yf_2+a\mu\frac{k_yf_2J_s'}{\sqrt{k}}\frac{ds}{d\xi}\right]F\right\}=0;\qquad J_s'=dJ/ds.$$

В этом уравнении можно пренебречь гравитационным членом и слагаемым, содержащим вертикальную компоненту скорости, так как они содержат малые множители. В результате получим

$$-b\frac{ds}{d\xi}+\frac{d}{d\xi}\left[\left(u-\mu\frac{k_xf_2J_s'}{\sqrt{k}}\frac{ds}{d\xi}\right)F\right]-$$

$$-a^2\mu\frac{k_y}{\sqrt{k}}\frac{d}{d\xi}\left(f_2FJ_s'\frac{ds}{d\xi}\right)=0 \tag{4.3}$$

Проинтегрируем (4.3) с учетом условий (4.2) и разрешим относительно $ds/d\xi$

$$\frac{ds}{d\xi}=\frac{u\sqrt{k}}{k_x+a^2k_y}\,\frac{F^+s^- - F^-s^+ + F(s^+-s^-)-(F^+-F^-)s}{\mu(s^+-s^-)Ff_2J_s'} \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) описывает распределение насыщенности в переходной зоне и позволяет оценить ее ширину, определяемую как расстояние между точками, насыщенности s_1 и s_2 в которых отличаются от предельных s^+ и s^- на некоторую малую величину ε

$$\xi_1-\xi_2=\frac{(k_x+a^2k_y)\mu}{u\sqrt{k}}\int\limits_{s_2}^{s_1}\frac{(s^+-s^-)f_2FJ_s'\,ds}{F^+s^- - F^-s^+ + F(s^+-s^-)-(F^+-F^-)s} \tag{4.5}$$

Выражение (4.5) отличается от аналогичного выражения для ширины стабилизированной зоны в случае одномерной фильтрации [10] только множителем $k^{-1/2}(k_x+a^2k_y)$, обусловленным анизотропией пласта и положением линии разрыва в плоскости $x0y$. Ширина переходной области обратно пропорциональна скорости фильтрации. Выражение (4.5) не зависит от гравитационных сил, так как их действие проявляется при больших толщинах, а в узкой области, соответствующей стабилизированной зоне, они несущественны.

В случае капиллярного или капиллярно-гравитационного равновесия $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\gg 1$, $\varepsilon_3=O(1)$, а распределение флюидов вдоль вертикали всюду, кроме переходной зоны, определяется соотношением (2.4). Поэтому линия разрыва является вертикальной: $x=\mathrm{const}$. Введем новую систему координат, связанную со скачком, с меньшими масштабами измерения продольной координаты и времени $\varepsilon_x=\varepsilon_t=\varepsilon_2\varepsilon_1^{-1}$. Масштаб по оси y оставим прежним. Положим, что в стабилизированной зоне $k_x=k_x(y)$, $k_y=k_y(y)$, $u=u(y)$. Из уравнений (1.1)–(1.3) следует

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(u-\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2}\mu\frac{k_x}{\sqrt{k}}f_2\frac{\partial J}{\partial x}\right)F\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}v+\mu k_yf_2\left(\varepsilon_3(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right)\right]F\right\}=0$$

Слагаемым, содержащим малый множитель $\varepsilon_2\varepsilon_1^{-1}$, можно пренебречь

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(u-\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2}\mu\frac{k_x}{\sqrt{k}}f_2\frac{\partial J}{\partial x}\right)F\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu k_yf_2F\left[\varepsilon_3(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right]\right\}=0$$

Рассмотрим решение этого уравнения в виде бегущей волны $s=s(\xi, y)$, $\xi=x-bt$, удовлетворяющее краевым условиям (4.2). Кроме того, значения s^+ и s^- должны удовлетворять соотношению (2.4). После замены переменных и интегрирования по ξ с учетом (4.2) получим

$$\frac{ds}{d\xi}=\frac{\sqrt{k}}{k_x}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}(\mu f_2FJ_s')^{-1}\Bigg\{u(F-F^-)-b(s-s^-)+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\xi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu k_yf_2F\left(\varepsilon_3(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right)\right]d\xi\Bigg\} \tag{4.6}$$

$$b=u\frac{F^+-F^-}{s^+-s^-}+\frac{1}{s^+-s^-}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu k_y f_2 F\left[\varepsilon_3(\gamma_1-\gamma_2)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right]\right\}d\xi \quad (4.7)$$

Интеграл в выражении (4.7) представляет собой полный вертикальный переток несмачивающей фазы на скачке в слое y. Если кровля и подошва пласта непроницаемы, то его среднее значение по толщине пласта равно нулю. Линия разрыва является вертикалью, поэтому скорость скачка не зависит от y. Осредняя (4.7), получим

$$b=\frac{\langle uF^+\rangle-\langle uF^-\rangle}{\langle s^+\rangle-\langle s^-\rangle}$$

В соответствии с уравнениями (2.1) $\langle uF^\pm\rangle=\langle u\rangle F^{*\pm}$, так как $\partial p/\partial x=$ $=\langle u\rangle(f_1^{*\pm}+\mu f_2^{*\pm})^{-1}\langle k_x\rangle^{-1}$. Здесь $f_i^*=\langle k_x f_i\rangle\langle k_x\rangle^{-1}$ – псевдофункции капиллярно-гравитационного равновесия, $F^*=(1+\mu f_2^*/f_1^*)^{-1}$. Поэтому

$$b=\langle u\rangle\frac{F^{*+}-F^{*-}}{\langle s^+\rangle-\langle s^-\rangle} \quad (4.8)$$

Оценим значение интеграла в уравнении (4.6). Естественно предположить, что подынтегральное выражение, представляющее собой локальный вертикальный переток в переходной зоне, не меняет знак. Тогда указанный интеграл является монотонной функцией ξ и изменяется от нуля при $\xi=-\infty$ до максимального значения $b(s^+-s^-)-u(F^+-F^-)$, определяемого формулой (4.7), при $\xi=+\infty$. Это позволяет оценить ширину стабилизированной зоны. Из уравнений (4.6), (4.8) получим

$$\xi_1-\xi_2=\mu\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2}\frac{\Phi(\langle s^+\rangle,\langle s^-\rangle)}{\langle u\rangle}$$

$$\Phi(\langle s^+\rangle,\langle s^-\rangle)\leqslant\frac{k_x}{\sqrt{k}}\max(I^+(\langle s^+\rangle,\langle s^-\rangle,y),I^-(\langle s^+\rangle,\langle s^-\rangle,y)) \quad (4.9)$$

$$I^\pm(\langle s^+\rangle,\langle s^-\rangle,y)=\int\limits_{s_2}^{s_1}\left[\frac{F^{*+}-F^{*-}}{\langle s^+\rangle-\langle s^-\rangle}(s^\pm-s)-\right.$$
$$\left.-\frac{(f_1^\pm+\mu f_2^\pm)k_x(F^\pm-F)}{(f_1^{*\pm}+\mu f_2^{*\pm})\langle k_x\rangle}\right]^{-1}f_2FJ_s'\,ds$$

Полученное неравенство выполняется при любом значении y, поэтому его можно выбирать произвольно. Насыщенности s^+ и s^- определяются по соответствующим значениям $\langle s^+\rangle$ и $\langle s^-\rangle$ при помощи условия равновесия (2.4). В случае стационарного скачка $\langle s^-\rangle=\text{const}$ и значения $\langle s^+\rangle$ и $\langle s^-\rangle$ связаны соотношением

$$F^{*\prime}_{\langle s^-\rangle}=(F^{*+}-F^{*-})/(\langle s^+\rangle-\langle s^-\rangle)$$

Формула (4.9) может использоваться для оценки протяженности зоны, в которой не выполняются условия равновесия, справедливые в крупномасштабном приближении. В переходной зоне неприменимы псевдофункции капиллярно-гравитационного равновесия.

Условия гравитационного равновесия $\varepsilon_3\gg1$, $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3\gg1$ при крупномасштабном описании процесса определяют раздельное течение жидкостей, распределенных вдоль вертикали в соответствии с удельным весом. На самом деле разделу между ними соответствует узкая зона смеси, в которой существенно действие не только гравитационных, но и капиллярных сил. Для описания распределения насыщенности в переходной зоне введем в окрестности данной точки разрыва новую систему координат с центром в этой точке. В данном случае целесообразно ввести мелкий масштаб вдоль оси y, а масштаб вдоль оси x оставить без изменения: $\varepsilon_x=1$, $\varepsilon_y=\varepsilon_3^{-1}$. Подставим в уравнение (4.1) значения ε_x и ε_y и преобразуем его к виду

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3^2\varepsilon_t}\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(u-\varepsilon_1\mu\frac{k_x}{\sqrt{k}}f_2\frac{\partial J}{\partial x}\right)F\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3}v+\mu k_y f_2\left(\gamma_1-\gamma_2-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right)\right]F\right\}=0 \qquad (4.10)$$

В уравнении (4.10) можно пренебречь членами порядка $\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1}$ и выше. Пусть $\varepsilon_t=\varepsilon_2\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_3^{-2}$. Тогда уравнение (4.10) примет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu k_y f_2 F\left(\gamma_1-\gamma_2-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J}{\sqrt{k}}\right)\right)\right]=0 \qquad (4.11)$$

Положим, что в переходной зоне $k_x=k_x(x)$, $k_y=k_y(x)$. Будем искать решение уравнения (4.11) в виде бегущей волны $s=s(\xi)$, $\xi=y-bt$, удовлетворяющее краевым условиям (4.2). После замены переменных и интегрирования с учетом условий (4.2) получим

$$\frac{ds}{d\xi}=(\gamma_1-\gamma_2)\sqrt{k}\,\frac{f_2F(s^+-s^-)-(f_2^+F^+-f_2^-F^-)s-(f_2^-F^-s^+-f_2^+F^+s^-)}{(s^+-s^-)f_2FJ_s'} \qquad (4.12)$$

Поскольку краевые значения s^+ и s^- определяются условием гравитационного равновесия, то $f_2^+F^+=f_2^-F^-=0$.

Из (4.12) имеем

$$ds/d\xi=\sqrt{k}(\gamma_1-\gamma_2)/J_s'$$

Отсюда

$$\xi_1-\xi_2=\frac{J(s^++\varepsilon)-J(s^--\varepsilon)}{\sqrt{k}(\gamma_1-\gamma_2)}$$

Высота переходной зоны обратно пропорциональна разности удельных весов и $\sqrt{k}$.

При крупномасштабном описании фильтрации в условиях гравитационного равновесия при $\varepsilon_1\varepsilon_3\ll1$ возникают, кроме того, вертикальные разрывы — скачки средней насыщенности. Тогда, как и в случае капиллярно-гравитационного равновесия, ширина переходной зоны определяется выражением (4.9). Если условие $\varepsilon_1\varepsilon_3\ll1$ не выполняется, давление вдоль вертикали распределено по гидростатическому закону, псевдокапиллярное давление существенно, уравнение для средней насыщенности аналогично известному уравнению Раппопорта — Лиса [11], при этом средняя насыщенность непрерывна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курбанов А. К.* О некоторых обобщениях уравнений фильтрации двухфазной жидкости // Науч.-техн. сб. по добыче нефти. 1961. Вып. 15. С. 32–38.
2. *Coats K. H., Nielsen R. L., Terhune M. H., Weber A. G.* Simulation of three-dimensional two-phase flow in oil and gas reservoirs. // Soc. Petrol. Eng. J. 1967. V. 7. № 4. P. 377–388.
3. *Coats K. H., Dempsey J. R., Henderson J. H.* The use of vertical equilibrium in two-dimensional reservoir performance // Soc. Petrol. Eng. J. 1971. V. 11. № 1. P. 63–71.
4. *Курбанов А. К., Атанов Г. А.* К вопросу о вытеснении нефти водой из неоднородного пласта // Нефть и газ Тюмени. 1972. Вып. 13. С. 36–38.

5. *Hearn C. L.* Simulation of stratified water flooding by pseudo relative permeability curves // J. Petrol. Technol. 1971. V. 28. № 7. P. 805–813.
6. *Зайдель Я. М., Леви Б. И.* Об использовании метода осреднения для решения пространственных задач двухфазной фильтрации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 3. С. 71–75.
7. *Маскет М.* Физические основы технологии добычи нефти // Пер. с англ. М.: Гостоптехиздат, 1953. 608 с.
8. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
9. *Швидлер М. И.* Об условном осреднении неустановившихся фильтрационных полей в случайных композитных пористых средах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 69–74.
10. *Рыжик В. М., Чарный И. А., Чэнь Чжунсян.* О некоторых точных решениях уравнений нестационарной фильтрации двухфазной жидкости // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 1. С. 121–126.
11. *Rappoport L. A., Leas W. J.* Properties of Linear waterfloods. // Trans. AIME. 1953. V. 198. P. 139–150.

Москва

Поступила в редакцию
9.II.1987