

УДК 532.526

**О ВОСПРИИМЧИВОСТИ ДОЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ  
К ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ, ЛОКАЛИЗОВАННЫМ  
НА ДНЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

МАНУЙЛОВИЧ С. В.

Исследуются три способа возбуждения малых колебаний в дозвуковом течении вязкого теплопроводного газа: вибрацией участка обтекаемой поверхности, периодическим вдувом-отсосом и колебаниями температуры стенки. Произведен численный расчет сформулированных краевых задач для линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса в приближении параллельности основного течения. Изучены процессы генерации звука и волн Толлмина – Шлихтинга.

**1. Постановка задачи.** Будем изучать нестационарные двумерные возмущения дозвукового течения совершенного газа около плоской полубесконечной пластины, вызванные малыми гармоническими по времени воздействиями, локализованными на дне пограничного слоя (вибрация участка пластины, щелевой вдув-отсос, колебания температуры обтекаемой поверхности). Набегающий поток будем предполагать равномерным (с числом  $M < 1$ ), параллельным поверхности пластины и перпендикулярным ее передней кромке.

Введем декартову систему координат с началом в точке  $O$ , расположенной на пластине на расстоянии  $L$  от передней кромки, осью  $x$ , направленной вдоль вектора скорости набегающего потока, и осью  $y$ , перпендикулярной обтекаемой поверхности. Все величины будем считать безразмерными, используя в качестве основных единиц измерения плотность набегающего потока  $\rho_\infty$ , его скорость  $U_\infty$ , температуру  $T_\infty$  и характерную длину  $\delta = (\lambda_\infty L / \rho_\infty U_\infty)^{1/2}$  ( $\lambda_\infty$  – коэффициент вязкости газа во внешнем течении). Число Рейнольдса  $R = \rho_\infty U_\infty \delta / \lambda_\infty$  будем считать достаточно большим, с тем чтобы к описанию основного течения в окрестности начала координат была применима концепция пограничного слоя. Профили скорости и температуры обозначим  $U(y)$ ,  $T(y)$ ; символами  $\tau$ ,  $T_w$  будем обозначать значения величин  $dU/dy$ ,  $T$  при  $y=0$ . Обтекаемую поверхность в первом приближении будем считать теплоизолированной. Будем предполагать, что отношение  $\kappa$  удельных теплоемкостей газа постоянно, а коэффициент вязкости связан с температурой степенной зависимостью ( $\alpha$  – показатель степени). Число Прандтля обозначим  $\sigma$ .

Обозначим посредством  $\epsilon q(x, y) \exp(-i\omega t)$  возмущения компонент вектора скорости, давления, плотности, температуры (соответственно  $q = v_x, v_y, p, \rho, \theta$ ); здесь  $t$  – время,  $\epsilon \ll 1$  – амплитуда внешнего воздействия,  $\omega > 0$  – его частота. Функции  $q$  удовлетворяют линейной системе уравнений

$$-i\omega\rho + U \frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dy} v_y \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{T} \left( -i\omega v_x + U \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{dU}{dy} v_y \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{T^\alpha}{R} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{T} \frac{dT}{dy} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$$

$$\frac{1}{T} \left( -i\omega v_y + U \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{T} \left( -i\omega\theta + U \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{dT}{dy} v_y \right) = (\kappa - 1) M^2 \left( -i\omega p + U \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{T^\alpha}{\sigma R} \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$$

$$\kappa M^2 p = T\rho + \frac{1}{T} \theta$$

По сравнению с линеаризованной системой уравнений Навье — Стокса в системе (1.1) опущены члены, связанные с непараллельностью основного течения, а также члены, малые по сравнению с последними. В связи с этим рассматриваемая область течения удовлетворяет условию  $|x| \ll L$  (не исключая при этом возможности  $|x| \gg 1$ ). Подробное обоснование процедуры упрощения полной линеаризованной системы для больших конечных чисел  $R$  содержится в [1]. Отметим, что система (1.1) содержит все члены, существенные в асимптотическом анализе рассматриваемых задач восприимчивости при  $R \rightarrow \infty$  [2].

Сформулируем краевые условия для системы (1.1). Рассмотрим сначала условия, задаваемые на поверхности пластины. Если возмущения течения вызваны вибрацией участка обтекаемой поверхности [3], т. е. движением точек пластины в вертикальном направлении по закону  $y_w = \varepsilon f(x) \exp(-i\omega t)$ , то из условий прилипания имеем

$$v_x(x, 0) = -\tau f(x), \quad v_y(x, 0) = -i\omega f(x), \quad \theta(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

Другим типом возбуждения колебаний является периодический вдув-отсос [3], при котором на некотором участке поверхности пластины вертикальная компонента скорости отлична от нуля и определяется выражением  $\varepsilon f(x) \exp(-i\omega t)$ . В этом случае граничные условия принимают вид

$$v_x(x, 0) = \theta(x, 0) = 0, \quad v_y(x, 0) = f(x) \quad (1.3)$$

Третий тип генерации возмущений — тепловой [4], когда колебания течения вызваны малыми осцилляциями температуры стенки вида  $T_w + \varepsilon f(x) \exp(-i\omega t)$ . Для возмущений такого типа имеем

$$v_x(x, 0) = v_y(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = f(x) \quad (1.4)$$

В приведенных соотношениях функция  $f$  обозначает распределение интенсивности воздействия вдоль поверхности пластины. Ввиду того что в рассматриваемой постановке задачи не учитывается влияние непараллельности основного течения, внешнее воздействие будем предполагать сосредоточенным, поэтому функцию  $f$  считаем довольно быстро затухающей при  $|x| \rightarrow \infty$  и заметно отличной от нуля лишь при  $|x| \sim 1$ .

В качестве краевых условий для всех рассматриваемых типов задач будем использовать также условия затухания возмущений при  $y \rightarrow \infty$  и вверх по потоку ( $x \rightarrow -\infty$ ).

Сформулированные граничные условия не позволяют построить замкнутого решения системы (1.1). При выборе условия, замыкающего задачу, необходимо различать два основных случая: случай I — внешнее воздействие имеет докритическую частоту  $\omega$  (возбуждаемая волна Толлмина — Шлихтинга затухает при  $x \rightarrow +\infty$ ); случай II — частота колебаний закритическая (генерируемая волна неустойчивости растет вниз по потоку).

Рассмотрим сначала случай, когда решение системы (1.1) затухает при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Решение поставленной краевой задачи будем искать с помощью преобразования Фурье по переменной  $x$

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(k) q^*(k, y) \exp(ikx) dk \quad (1.5)$$

$$f^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ikx) dx$$

Здесь фурье-образы искоемых функций нормированы на образ  $f^*$  распределения внешнего воздействия. Поскольку коэффициенты системы (1.1) зависят только от переменной  $y$ , преобразование (1.5) позволяет свести систему уравнений в частных производных для функций  $q$  к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для их фурье-компонент  $q^*$ . Эта система может быть преобразована к виду

$$\frac{dz}{dy} = Az \quad (1.6)$$

где компоненты вектора  $z(y)$  и ненулевые элементы матрицы  $A(y)$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} z_1 &= v_x^*, \quad z_2 = dv_x^*/dy, \quad z_3 = v_y^*/(ik) \\ z_4 &= p^*, \quad z_5 = \theta^*, \quad z_6 = d\theta^*/dy \\ A_{12} &= A_{36} = -A_{31} = 1, \quad A_{21} = Va_1/T \\ A_{23} &= a_1 a_2, \quad A_{24} = a_1, \quad A_{26} = -\alpha a_2 \\ A_{33} &= a_3, \quad A_{34} = -\kappa M^2 V, \quad A_{35} = V/T \\ A_{43} &= k^2 V/T, \quad A_{63} = \sigma a_1 a_3, \quad A_{64} = -\sigma(\kappa - 1) M^2 Va_1 \\ A_{65} &= \sigma Va_1/T, \quad V = U - c, \quad c = \omega/k \\ a_1 &= ikR/T^\alpha, \quad a_2 = T^{-1} dU/dy, \quad a_3 = T^{-1} dT/dy \end{aligned}$$

Для построения единственного решения системы шестого порядка (1.6) необходимо поставить шесть краевых условий. Первые три следуют из условий (1.2)–(1.4) и сводятся к заданию величин  $z_1(0)$ ,  $z_3(0)$ ,  $z_5(0)$ : соответственно  $-\tau$ ,  $-c$ ,  $0$ ;  $0$ ,  $1/(ik)$ ,  $0$ ;  $0$ ,  $0$ ,  $1$  для случаев вибратора, вдува-отсоса и теплового возбуждения. Остальные три условия являются следствием затухания возмущений при  $y \rightarrow \infty$ .

Поскольку решение системы (1.1) ищется в форме интегрального преобразования (1.5), условие затухания возмущений при  $|x| \rightarrow \infty$  выполняется автоматически.

**2. Генерация звука.** Рассмотрим подробнее вопрос об асимптотических граничных условиях для системы (1.6). Общее решение этой системы имеет вид суперпозиции шести линейно независимых решений:  $z = c_1 z_1 + \dots + c_6 z_6$ . При  $y \rightarrow \infty$  коэффициенты системы (1.6) можно считать постоянными ( $U(\infty) = T(\infty) = 1$ ), поэтому асимптотики ее линейно независимых решений имеют вид  $z_n \sim z_{\infty n} \exp(\lambda_n y)$ ,  $n = 1, \dots, 6$ , где  $\lambda_n$  и  $z_{\infty n}$  – собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы  $A(\infty)$ .

При  $R \gg 1$  собственные числа определяются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &\sim \pm k \sqrt{1 - M^2(1-c)^2} \\ \lambda_{3,4} &\sim \pm \sqrt{ikR(1-c)}, \quad \lambda_{5,6} \sim \pm \sqrt{ik\sigma R(1-c)} \end{aligned}$$

Если волновое число  $k$  фурье-компоненты лежит вне промежутка, определяемого неравенством

$$-\frac{M\omega}{1-M} < k < \frac{M\omega}{1+M} \quad (2.1)$$

то для всех  $n$   $\operatorname{Re} \lambda_n \neq 0$ , поэтому на решения системы (1.6) накладывается условие затухания при  $y \rightarrow \infty$ , т. е. коэффициенты  $c_n$  при решениях с  $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$  должны быть положены равными нулю (соответствующие номера обозначим  $n=2, 4, 6$ ).

В случае выполнения неравенства (2.1) фурье-гармоника бежит со сверхзвуковой скоростью относительно потока. При этом в первом приближении  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$ , поэтому условие затухания решения  $z_1$  при  $y \rightarrow \infty$  должно быть заменено условием Аккерета о сносе возмущений в направлении, противоположном движению гармоники:  $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$ . Тем не менее оказывается, что точное значение действительной части  $\lambda_1$  удовлетворяет старому условию  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ , т. е. в случае сверхзвуковых возмущений условие Аккерета и условие затухания в направлении  $y \rightarrow \infty$  непротиворечивы.

Таким образом, решение системы (1.6), удовлетворяющее условию затухания при  $y \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$z = c_1 z_1 + c_3 z_3 + c_5 z_5 \quad (2.2)$$

«Диссипативные» решения  $z_3$  и  $z_5$  быстро затухают с ростом  $y$ ; «невязкое» решение  $z_1$  в случае дозвуковых возмущений также затухает, хотя и значительно медленнее. В случае сверхзвуковых возмущений решение  $z_1$  представляет собой слабо затухающую акустическую волну, поэтому всякое внешнее воздействие, содержащее гармоники вида (2.1), приводит к возбуждению в потоке звуковых волн.

**3. Возбуждение волн Толлмина — Шлихтинга.** Вопрос о генерации волн неустойчивости внешним сосредоточенным воздействием рассматривался ранее в [5, 6]. В работе [5] изучалась задача о возбуждении волны Толлмина — Шлихтинга при помощи вибратора, причем число  $R$  предполагалось бесконечно большим (в этом случае реальное течение газа в пограничном слое происходит в турбулентном режиме), а частота вибрации  $\omega$  соответствовала окрестности нижней ветви нейтральной кривой.

Метод вычисления амплитуды генерируемой волны [5] может быть распространен на случай конечных чисел  $R$ . Следуя [5], аналитически продолжим фурье-образы  $q^*$  (1.5) на плоскость комплексного  $k$ . Функции  $q^*$  имеют особенности типа полюсов первого порядка в точках плоскости  $k$ , являющихся собственными значениями задачи для системы уравнений (1.6) с однородными граничными условиями. Полюс  $k_0(\omega)$ , соответствующий неустойчивой моде, в случае I (докритические  $\omega$ ) расположен в верхней полуплоскости вблизи действительной оси. Резкое изменение подынтегральной функции в окрестности  $k_0$  приводит к тому, что решение (1.5) при  $x \gg 1$  имеет вид волны Толлмина — Шлихтинга, определяемый вычетом подынтегрального выражения в точке  $k_0$  [5]

$$q_{TS}(x, y) = 2\pi i f^*(k_0) \operatorname{res}_{k=k_0} q^*(k, y) \exp(ik_0 x) \quad (3.1)$$

По мере приближения частоты воздействия к критической полюс  $k_0$  приближается к действительной оси, поэтому декремент затухания возбуждаемой волны уменьшается. Если в результате дальнейшего изменения  $\omega$  полюс  $k_0$  пересекает действительную ось, решение (1.5) изменяется скачком [7]: вниз по потоку от области локализации воздействия оно становится быстро затухающим, а вверх по потоку, напротив, затухает слабо и определяется вычетом в точке  $k_0$  (3.1), взятым со знаком минус.

Таким образом, решение системы (1.1), полученное с помощью преобразования (1.5) для случая II (закритические  $\omega$ ), противоречит физическому смыслу: оно описывает волну Толлмина — Шлихтинга, приходящую к области внешнего воздействия из области  $x < 0$ , в то время как физически приемлемое решение должно описывать генерацию волны неустойчивости в окрестности сосредоточения воздействия и распространение ее

вниз по потоку. Указанные противоречия могут быть устранены, если в случае II изменить математическую постановку задачи. Отбросим требование о затухании возмущений течения при  $x \rightarrow +\infty$  и определим искомое решение как сумму волны, определяемой выражением (3.1), и старого решения (1.5), построенного с помощью классического преобразования Фурье. Эта сумма является решением поставленной краевой задачи, поскольку функции (3.1) удовлетворяют системе уравнений (1.1) и однородным граничным условиям. Одновременно достигается непрерывность изменения решения в зависимости от частоты  $\omega$ .

Описанный выше принцип построения решения для случая закритических частот был впервые предложен в [7] и впоследствии доказан в [8]. Он дает единое выражение (3.1) для генерируемой волны Толлмина — Шлихтинга в I и II случаях.

**4. Результаты расчетов.** Задача в аналогичной постановке рассматривалась ранее в работе [6], однако там был изучен лишь вопрос о возбуждении волны Толлмина — Шлихтинга. Целью данной работы является полный расчет возмущенного движения на конечных расстояниях от области локализации внешнего осциллирующего воздействия.

Прежде всего заметим, что непосредственное вычисление обратного преобразования Фурье (1.5) с помощью численного интегрирования возможно лишь при достаточно быстром затухании подынтегрального выражения при  $|k| \rightarrow \infty$ . Скорость затухания этого выражения тем выше, чем лучшими дифференциальными свойствами обладает функция  $f(x)$ . Исходя из этого, в данной работе расчеты проводились для бесконечно дифференцируемой функции

$$f(x) = \exp(-ax^2), \quad a = 0,01 \quad (4.1)$$

Функция (4.1) заметно отлична от нуля лишь при  $|x| \leq a^{-1/2}$ , поэтому такое воздействие может считаться сосредоточенным. Величина постоянной  $a$  выбиралась из условия совпадения по порядку величины характерного масштаба изменения функции  $f$  с длиной волны Толлмина — Шлихтинга: в этом случае амплитуда генерируемой волны наибольшая.

Расчет колебаний, вносимых в течение внешними воздействиями, проиллюстрируем на примере возмущенного давления, вычисленного при  $y=0$

$$P(x) \equiv p(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^*(k) \exp(ikx) dk \quad (4.2)$$

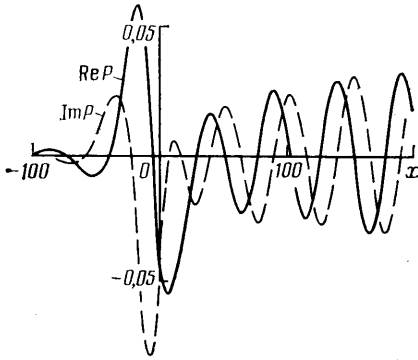
$$P^* = \frac{p^*(k, 0)}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right)$$

Для оперативного расчета обратного преобразования (4.2) фурье-амплитуда  $P^*(k)$  табулировалась в  $\sim 800$  точках на отрезке  $[-0,7; 0,7]$ , причем точки сгущались в областях ее сильного изменения. Вычисление функции  $P^*$  в каждой из точек производилось следующим образом. По заданному  $k$  и значениям других параметров методом ортогонализации [9] рассчитывались три линейно независимых решения  $z_1, z_3, z_5$  системы (1.6), удовлетворяющих при  $y \rightarrow \infty$  условиям, сформулированным в разд. 2. Искомое решение представлялось в виде суммы (2.2), коэффициенты  $c_1, c_3, c_5$  однозначно определялись из условий при  $y=0$ . После этого могла быть вычислена величина  $p^*(k, 0) = z_4(0)$ , а вместе с ней и искомая функция  $P^*(k)$ .

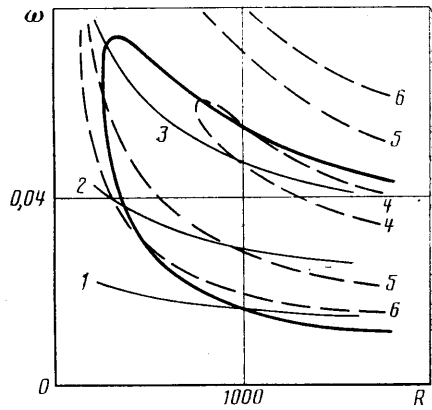
Для расчета функции  $P(x)$  интеграл (4.2) заменялся суммой интегралов по отрезкам проведенного разбиения области интегрирования, причем функция  $P^*(k)$  аппроксимировалась ломаной линией, построенной по значениям на концах промежутков, что позволяло вычислять каждый из входящих в сумму интегралов по точной формуле. Точность расчетов контролировалась уменьшением числа узлов в 2 раза.

При расчете возмущенного давления в случае II кроме интеграла (4.2) требовалось вычислить величину  $p_{TS}(x, 0)$  (3.1). С этой целью задавалось начальное значение комплексного волнового числа  $k$ , близкое моде  $k_0$ , после чего эта мода, являющаяся корнем уравнения

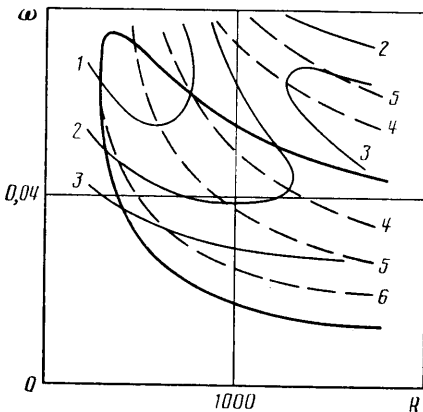
$$F(k) \equiv [p^*(k, 0)]^{-1} = 0$$



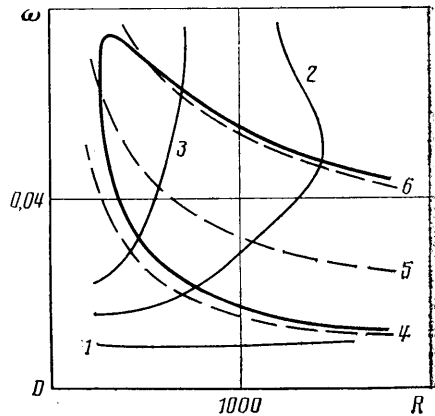
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

рассчитывалась методом Ньютона. Одновременно в процессе итераций определялась искомая величина

$$A = \operatorname{res}_{k=k_0} p^*(k, 0) = \left[ \frac{dF}{dk}(k_0) \right]^{-1}$$

характеризующая амплитуду волны (3.1).

Заметим, что описанный выше метод расчета амплитуды генерируемой волны неустойчивости с вычислительной точки зрения имеет преимущество по сравнению с методом, приведенным в [6]. В этой работе амплитуда волны определялась с помощью разложения решения в области, лежащей вниз по потоку от области локализации внешнего воздействия, в ряд по биортогональной системе собственных функций. Этот метод математически эквивалентен приведенному в данной работе (легко показать, что коэффициент ряда [6] при собственной функции, соответствующей волне Толлмина — Шлихтинга, равен единице, если в качестве этой функции выбрать  $q_{TS}$  из (3.1)), однако наряду с решением системы (1.1) он требует расчета сопряженной задачи.

В данной работе производились расчеты возмущенного давления и коэффициентов порождения волны Толлмина — Шлихтинга для всех трех типов рассматриваемых задач. На фиг. 1 показано распределение давления, вызванное колебаниями вибратора вида (4.1) для  $R=500$ ;  $M=0,8$ ;  $\sigma=0,75$ ;  $\kappa=1,4$ ;  $\alpha=0,76$ . Частота воздействия  $\omega=0,05$  соответствует случаю II. Вычисления показывают, что кроме растущей волны Толлмина — Шлихтинга, распространяющейся вниз по течению, вниз и вверх по потоку распространяются затухающие волны с волновыми числами, равны-

ми 0,0227 и  $\sim 0,2$  соответственно. Как показывает соотношение (2.1), этим волновым числам соответствуют звуковые волны, распространяющиеся вдоль оси  $x$ . Наиболее ярко выражена волна, распространяющаяся вниз по потоку, поскольку ее длина много больше толщины пограничного слоя, и процесс ее генерации носит невязкий характер (фурье-образ решения имеет резкий пик вблизи правого конца промежутка (2.1), соответствующий особенности в формулах Прандтля — Глауэрта и Аккерета при скоростях течения, близких звуковой). Волна, распространяющаяся вверх по течению, при  $M=0,8$  имеет на порядок меньшую длину, поэтому диссипативные эффекты играют при ее формировании существенную роль (пик фурье-образа в окрестности левого конца промежутка (2.1) отсутствует).

Распределения давления, порожденные вдувом-отсосом и колебаниями температуры, имеют примерно тот же вид, что и в случае вибратора, и различаются лишь амплитудой и фазой.

На фиг. 2, 3 и 4 приведены результаты расчета коэффициентов порождения волны Толлмина — Шлихтинга (для случаев вибратора, вдува-отсоса и теплового воздействия соответственно) в зависимости от параметров  $R$  и  $\omega$ ; остальные параметры принимают значения, указанные выше. Линии уровня амплитуды  $|A|$  отмечены сплошными кривыми 1—3, а линии постоянной фазы  $-\pi < \arg A < \pi$  обозначены штриховыми кривыми 4—6. Сплошной жирной линией показано положение нейтральной кривой. Иллюстрируемые величины  $|A|$  и  $\arg A$  принимают на линиях 1—6 значения  $\{0,0005; 0,001; 0,002; -0,4; -0,2; 0\}$ ,  $\{0,045; 0,05; 0,055; 1,5; 1,6; 1,7\}$ ,  $\{0,0002; 0,0004; 0,0006; 0,6; 0,7; 0,8\}$  для фиг. 2, 3, 4 соответственно. Как показывают результаты расчетов, при равных безразмерных амплитудах воздействий периодический вдув-отсос генерирует волну Толлмина — Шлихтинга наибольшей амплитуды, а колебания температуры стенки — наименьшей.

Автор благодарит Когана М. Н. и Михайлова В. В. за внимание к работе и полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов В. В. Об асимптотике нейтральных кривых линейной задачи устойчивости ламинарного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 5. С. 39—46.
2. Мануйлович С. В. О свободном взаимодействии пространственного пограничного слоя с внешним потенциальным течением // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 45—52.
3. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 151 с.
4. Liepmann H. W., Brown G. L., Nosenchuck D. M. Control of laminar-instability waves using a new technique // J. Fluid Mech. 1982. V. 118. P. 187—200.
5. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1049—1055.
6. Федоров А. В. Возбуждение волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое периодическим внешним воздействием, локализованным на обтекаемой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 36—41.
7. Богданова Е. В., Рыжова О. С. О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах // ПМТФ. 1982. № 4. С. 65—72.
8. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264—272.
9. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3 (99). С. 171—174.

Москва

Поступила в редакцию  
26.XII.1986