

УДК 532.517.4

**КРУПНОМАСШТАБНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ТОНКОМ СЛОЕ
НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ**

АРИСТОВ С. Н., ФРИК П. Г.

Исследуется динамика крупномасштабной неизотермической турбулентности в тонком вращающемся слое жидкости. Предложена иерархическая модель, получаемая усреднением исходных уравнений Буссинеска по вертикальной координате с последующим проектированием двумерных уравнений на базис, состоящий из набора осесимметричных спиральных вихрей прогрессивно уменьшающегося масштаба. Показано, что наличие горизонтальных неоднородностей температуры приводит к значительному увеличению времени вырождения турбулентности.

1. К крупномасштабным процессам в тонких вращающихся слоях жидкости относятся движения, характерные времена t которых много больше периода вращения слоя, а характерные размеры L значительно превосходят его толщину H : $L \gg H$, $t \gg f^{-1}$, где f — удвоенная частота вращения жидкости. Движения, удовлетворяющие этому условию, в основном горизонтальны и для их изучения широко применяются двумерные модели [1]. Наиболее аккуратным способом получения двумерных уравнений является усреднение уравнений движения поперек слоя с последующим замыканием системы относительно средних гидродинамических полей. В качестве исходных используются уравнения движения в приближении Буссинеска [2], записанные в системе координат, вращающейся со слоем

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + f \times \mathbf{v} &= -\nabla p - g \alpha T + \nu \Delta \mathbf{v} + \nu \partial_z^2 \mathbf{v} \\ \partial_t T + (\mathbf{v} \nabla) T &= \chi \Delta T + \partial_z^2 T \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость, T — температура, отсчитанная от средней по объему слоя, p — давление, деленное на среднюю плотность, без гидростатической компоненты $\rho g z$, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, включающее в себя в общем случае и центробежное ускорение. В данной постановке считается, что вектор \mathbf{g} ориентирован всюду перпендикулярно слою, что соответствует большинству геофизических задач [1]; α , ν , χ — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности. Геометрия задачи показана на фиг. 1.

Граничные условия для скорости и температуры задаются в виде

$$\begin{aligned} v_z = \partial_z v_x = \partial_z v_y = \partial_z T &= 0 \quad (z = H) \\ v_z = v_x = v_y = 0, T &= T_0(x, y) \quad (z = 0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где T_0 — температура нижней границы слоя, распределение которой определяет структуру возникающих движений. Усредняя уравнения движения поперек слоя и используя условия (1.2), получим вместо (1.1) следующую систему уравнений:

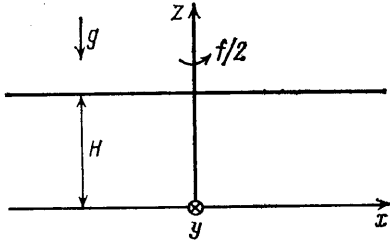
$$\begin{aligned} \partial_t \langle v_x \rangle + \partial_x \langle v_x v_x \rangle + \partial_y \langle v_y v_x \rangle - f \langle v_y \rangle &= -\partial_x \langle p \rangle + \nu \Delta \langle v_x \rangle - \tau_x \\ \partial_t \langle v_y \rangle + \partial_x \langle v_x v_y \rangle + \partial_y \langle v_y v_y \rangle + f \langle v_x \rangle &= -\partial_y \langle p \rangle + \nu \Delta \langle v_y \rangle - \tau_y \end{aligned}$$

$$\partial_x \langle v_x \rangle + \partial_y \langle v_y \rangle = 0$$

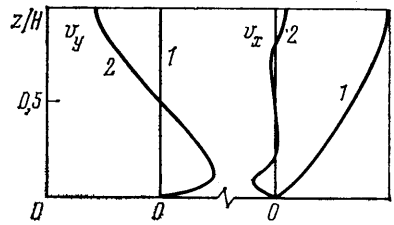
$$\partial_t \langle T \rangle + \partial_x \langle v_x T \rangle + \partial_y \langle v_y T \rangle = \chi \Delta \langle T \rangle + Q \quad (1.3)$$

где угловые скобки означают усреднение по толщине слоя, а $\tau_{x,y}$, Q — тангенциальные напряжения и поток тепла на нижней границе. Для замыкания системы относительно средних полей $\langle v_x \rangle$, $\langle v_y \rangle$, $\langle T \rangle$, $\langle p \rangle$ необходимо выразить через них интегралы вида $\langle v_m v_n \rangle$, $\langle v_m T \rangle$ и величины τ_m , Q , где $m, n = x, y$, что требует конкретизации вида профилей скорости и температуры.

Самый простой способ замыкания заключается в пренебрежении зависимостью полей скорости и температуры от координаты z , что приводит в изотермическом случае к уравнениям мелкой воды [1]. Наиболее после-



Фиг. 1



Фиг. 2

довательный путь состоит в использовании точных решений исходных уравнений для вычисления необходимых интегралов [3].

Точные решения системы (1.1) удается найти для линейного распределения температуры на нижней границе слоя $T_0 = Ax + By$, где $A = \partial_x T_0$, $B = \partial_y T_0$ — константы, определяющие величину и направление градиента температуры. Для ламинарных течений, когда коэффициенты диффузии ν , χ постоянны, стационарные профили скорости и температуры при указанной зависимости $T_0(x, y)$ имеют вид

$$v_z = 0, \quad v_{x,y} = V_{x,y} + u_{x,y} \left(2 \frac{z}{H} - 1 \right) + W_{x,y}$$

$$\frac{\chi}{H^2} (T - T_0) = (AV_x + BV_y) \left(\frac{z^2}{2H^2} - \frac{z}{H} \right) + E(AV_y - BV_x)$$

$$u = \frac{g\alpha H}{2f} e_z \times \nabla T_0, \quad V = \frac{1}{f} e_z \times \nabla p_0$$

$$W_{x,y} = e^{-h(H-z)} [c_{1,2} \cos kz \pm c_{2,1} \sin kz] + e^{-hz} [\pm c_{3,4} \cos kz + c_{4,3} \sin kz] \quad (1.4)$$

$$2c_{1,2} e^{-hH} = \pm u_{x,y} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) + u_{y,x} (-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 + 1) \pm V_{x,y} (\varepsilon_3) + V_{y,x} (\varepsilon_4 - 1)$$

$$2c_{3,4} = u_{x,y} (-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \pm u_{y,x} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + 1) + V_{x,y} (-\varepsilon_3) \mp V_{y,x} (\varepsilon_4 + 1)$$

$$\varepsilon \varepsilon_1 kH = \cos kH \operatorname{ch} kH, \quad \varepsilon \varepsilon_2 kH = \sin kH \operatorname{sh} kH$$

$$\varepsilon \varepsilon_3 = \cos kH \sin kH, \quad \varepsilon \varepsilon_4 = \operatorname{ch} kH \operatorname{sh} kH$$

$$\varepsilon = \cos^2 kH \operatorname{ch}^2 kH + \sin^2 kH \operatorname{sh}^2 kH, \quad kH = (2E)^{-1/2}$$

где $E = \nu/fH^2$ — число Экмана, p_0 — давление, не связанное с неоднородностью нагрева, $W_{x,y}$ — компоненты скорости, которые при $E \ll 1$ соответствуют пограничному слою.

Структура течения зависит от входящих в решения (1.4) величин $V_{x,y}$, $\partial_{x,y} T_0$, которые можно выразить через соответствующие средние значения $\langle v_{x,y} \rangle$, $\partial_{x,y} \langle T \rangle$ путем интегрирования (1.4) по координате z . При этом вид поперечных профилей скорости и температуры полностью опре-

деляется средними полями $\langle v_{x,y} \rangle$, $\langle T \rangle$. В качестве примера на фиг. 2 приведены зависимости компонент скорости и температуры от поперечной координаты для следующих значений определяющих параметров: $Re = LV/\nu = 1$, $Gr = g\alpha H^4 A/\nu^2 = 225$, кривые 1, 2 соответствуют $kH = 0$; 15.

Если в соответствии с условием ($L \gg H$, $t \gg f^{-1}$) средние поля являются медленными функциями координат x , y и времени t , а релаксационные процессы мало существенны, то полученные решения достаточно точно описывают структуру потока в каждой точке плоскости слоя в любой момент времени. В этом смысле выражения (1.4) могут быть названы локально-равновесными решениями и использованы для замыкания системы (1.3) [4].

Введя функцию тока Ψ $\langle v_{x,y} \rangle = \mp \partial_{y,x} \Psi$, исключив давление и выразив функции $\langle v_m v_n \rangle$, $\langle v_m T \rangle$, τ_m , Q через среднюю температуру и функцию тока с использованием (1.4), получим систему уравнений, замкнутую относительно Ψ , $\langle T \rangle$. При достаточно быстром вращении ($E \ll 1$) уравнения имеют вид

$$\partial_t \Delta \Psi + \{ \Psi, \Delta \Psi \} + \frac{1}{3} \{ \Gamma, \Delta \Gamma \} = \nu \Delta^2 \Psi - \mu (\Delta \Psi - \Delta \Gamma) \quad (1.5)$$

$$\partial_t \Gamma + \{ \Psi, \Gamma \} = \chi \Delta \Gamma - q (\Gamma - \Gamma_0) \quad (1.6)$$

$$\Gamma = \frac{g\alpha H}{2f} \langle T \rangle, \quad \{ \Psi, \Gamma \} = \partial_x \Psi \partial_y \Gamma - \partial_x \Gamma \partial_y \Psi$$

где Γ — средняя поперек слоя температура, приведенная к размерности функции тока, $\mu = f\sqrt{E}/2$ — коэффициент эффективного экмановского трения [1], $q = 3\chi/H^2$ — коэффициент теплоотдачи нижней границы слоя.

В изотермическом пределе ($\Gamma = 0$) формулы (1.5)–(1.6) переходят в известные уравнения мелкой воды [1], дополненные членом $\mu \Delta \Psi$, учитывающим эффективное экмановское трение.

Уравнения (1.5)–(1.6) имеют два принципиальных отличия от своих изотермических аналогов. Во-первых, появляется дополнительный нелинейный член $\{ \Gamma, \Delta \Gamma \}$ в (1.5), что приводит, в частности, к изменению интегралов движения. Если невязкие двумерные уравнения сохраняют кинетическую энергию E_v и энстрофию Ω

$$E_v = \frac{1}{2} \iint \nabla \Psi^2 dx dy, \quad \Omega = \frac{1}{2} \iint \Delta \Psi^2 dx dy$$

то уравнения (1.5)–(1.6) в бездиссипативном пределе ($\nu, \mu, \chi, q = 0$) сохраняют три квадратичные величины

$$I_1 = E_v - E_u, \quad I_2 = \iint \nabla \Psi \nabla \Gamma dx dy, \quad I_3 = \iint \Gamma^2 dx dy \quad (1.7)$$

$$E_u = \iint \frac{1}{6} \nabla \Gamma^2 dx dy$$

Наибольший интерес представляет первый интеграл I_1 , из вида которого следует возможность роста кинетической энергии E_v при одновременном росте квадрата пульсаций градиента температуры E_u .

Второе качественное отличие касается характера диссипации энергии. Во вращающихся изотермических слоях основным диссипативным фактором является экмановское трение, обусловленное структурой пограничных слоев. В двумерных уравнениях ему соответствует член $\mu \Delta \Psi$, который для крупномасштабных вихрей значительно превосходит член $\nu \Delta^2 \Psi$ и одинаково эффективен для вихрей всех размеров. Учет горизонтальных неоднородностей температуры приводит к появлению в (1.5) члена $\mu (\Delta \Psi - \Delta \Gamma)$, первая часть которого по-прежнему учитывает экмановскую

подкачку в пограничный слой, а вторая — действие сил плавучести. Видно, что эти механизмы диссипации могут компенсировать друг друга.

Система (1.5)–(1.6) позволяет найти Ψ , Γ для заданных граничных и начальных условий, после чего вертикальная структура полей скорости и температуры восстанавливается согласно (1.4). Вертикальная скорость равна нулю только при строгой однородности градиента температуры на всей плоскости. В общем случае генерируется слабая вертикальная скорость, которую можно вычислить, проинтегрировав уравнение непрерывности по вертикальной координате. Для малых чисел Экмана средняя вертикальная скорость есть

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{2k} (\Delta \Psi - \Delta \Gamma) \quad (1.8)$$

Таким образом, несмотря на двумерность уравнений (1.5)–(1.6), они позволяют составить представление о трехмерной структуре адвективных потоков.

Характер движения жидкости в крупномасштабных вихрях иллюстрирует следующий пример. Рассмотрим течение жидкости над осесимметричным источником тепла, задающим распределение температуры Γ_0 с максимумом в точке (x_0, y_0) на нижней границе слоя. Полагая, что решение уравнений стационарно, а роль диссипативных слагаемых не существенна, положим правые части (1.5)–(1.6) равными нулю и опустим члены с производными по времени. Функция тока и температура, удовлетворяющие преобразованной системе уравнений, имеют вид $\Gamma = f_1(r)$, $\Psi = f_2(r)$, где $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, а $f_{1,2}$ — произвольные функции, вид которых определяется из граничных условий. Если температуру задать в виде $\Gamma_0 = A \exp(-r^2/L^2)$, где L — размер теплового возмущения, то поля скорости и температуры, восстановленные согласно (1.4), зависят от координат (r, z) как

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{1}{2kr} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r} [\alpha_1 (-1 + \cos kz \operatorname{ch} kz + \sin kz \operatorname{sh} kz) + \\ &+ \alpha_2 (1 - \cos kz \operatorname{ch} kz + \sin kz \operatorname{sh} kz) + \alpha_3 (\sin kz \operatorname{ch} kz - \cos kz \operatorname{sh} kz)] \\ v_\varphi &= \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r} \left[2 \frac{z}{H} - \alpha_3 - \alpha_1 \sin kz \operatorname{sh} kz + \alpha_2 \cos kz \operatorname{sh} kz + \alpha_3 \cos kz \operatorname{ch} kz \right] \\ v_r &= - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r} [\alpha_1 \cos kz \operatorname{sh} kz + \alpha_2 \sin kz \operatorname{ch} kz + \alpha_3 \sin kz \operatorname{sh} kz] \\ \Gamma &= \Gamma_0 + \frac{EH^2}{\chi} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial r} v_\varphi \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\alpha_0 \alpha_1 = 2 \sin kH \cos kH - \cos kH \operatorname{sh} kH - \sin kH \operatorname{ch} kH$$

$$\alpha_0 \alpha_2 = 2 \operatorname{sh} kH \operatorname{ch} kH - \cos kH \operatorname{sh} kH - \sin kH \operatorname{ch} kH$$

$$\alpha_0 \alpha_3 = 2 \cos kH \operatorname{ch} kH - 2 \cos^2 kH \operatorname{ch}^2 kH - 2 \sin^2 kH \operatorname{sh}^2 kH$$

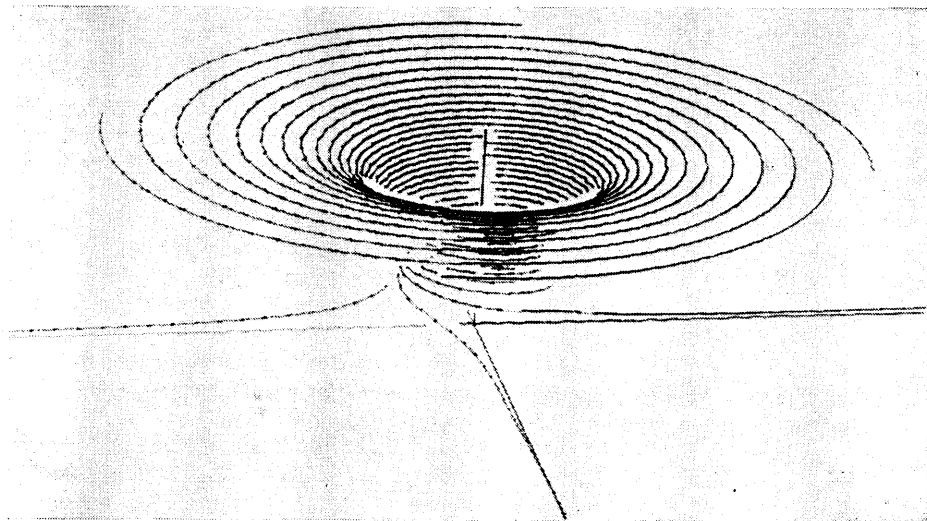
$$\alpha_0 = kH (\sin kH \cos kH - \operatorname{sh} kH \operatorname{ch} kH)$$

Структуру центральной части адвективного вихря иллюстрирует фиг. 3, на которой приведены траектории четырех частиц, запущенных из точек с $z/H = 0,05$ с расстояния $r = 3L$ от центра вихря, $kH = 15$, а соотношение масштабов на рисунке для наглядности выбрано равным единице.

2. Если в слое задано случайное распределение температуры Γ , удовлетворяющее условию крупномасштабности, то можно ожидать, что возникающее турбулентное движение складывается из спиральных вихрей типа (1.9), размеры которых могут изменяться от минимального H , до максимального L , где L — размер области турбулентности. Это позволяет

говорить о крупномасштабной турбулентности, пространственный спектр которой занимает область $(2\pi/H, 2\pi/L)$, включающую в себя широкий диапазон волновых чисел.

При этом можно представить себе ситуацию, когда профили гидродинамических полей останутся ламинарными (например, тонкие масляные пленки) и под коэффициентами ν, χ в уравнениях понимаются молекулярные коэффициенты диффузии. Более распространенной представляется ситуация, когда существует развитая мелкомасштабная турбулентность с волновыми числами $k > 2\pi/H$. Под коэффициентом ν в этом случае понимается турбулентная вязкость, которая в общем случае зависит от координаты z , что должно повлиять на решение (1.4). При быстром вращении это влияние не существенно, так как основная диссипация энергии про-



Фиг. 3

исходит в экмановском пограничном слое и значение коэффициента вязкости можно оценить по виду осредненных профилей скорости, исходя из наблюдаемой толщины погранслоя ($\nu = \nu_T = fH_i/2$, где H_i — толщина пограничного слоя).

Исследование крупномасштабной неізотермической турбулентности в слое возможно на основе прямого численного решения уравнений (1.5) — (1.6). В этом случае необходимо обеспечить пространственное разрешение порядка толщины слоя H , что для рассматриваемого ниже случая соответствует сетке 1000×1000 . Известно, что моделирование длительных эволюций турбулентных течений с таким пространственным разрешением остается на пределе возможностей ЭВМ даже для более простых уравнений [6]. Загрубление сетки требует привлечения гипотезы анизотропной турбулентной вязкости и автоматически исключает из рассмотрения большую часть пространственного спектра.

В то же время существует эффективный подход, позволяющий рассматривать длительные эволюции спектров турбулентных течений с учетом взаимодействий в широком интервале волновых чисел при незначительных затратах машинного времени, основанный на использовании иерархических моделей турбулентности [7, 8].

Модель турбулентных течений, описываемых двумерными уравнениями, строится путем разбиения пространства волновых векторов на кольцевые области с прогрессивно увеличивающейся шириной кольца: $\pi 2^i \leq |k| \leq \pi 2^{i+1}$, $i = 0, \pm 1, \dots$. Энергия пульсаций поля скорости и температу-

ры распадается на энергии соответствующих октав волновых чисел

$$E_v = \sum_i E_{vi}, \quad E_u = \sum_i E_{ui} \quad (2.1)$$

Функция тока и температура проектируются на функциональный базис

$$\Psi(x, y, t) = \sum_i A_{ii}(t) f_{ii}(x, y), \quad \Gamma(x, y, t) = \sum_i C_{ii}(t) f_{ii}(x, y) \quad (2.2)$$

$$f_{ii} = \frac{1}{2^i \sqrt{3} \pi^3} \int_s^{2s} \frac{J_0(z)}{z} dz, \quad s = 2^i \pi |r - r_{ii}|$$

где r_{ii} — центр вихря l яруса i , J_0 — функция Бесселя. Базис отличается тем, что функции i -го яруса имеют спектр, локализованный в соответствующем кольце k -пространства, в силу чего энергия E_i включает только энергию вихрей данного яруса, имеющих определенные размеры и размещенных в пространстве случайным образом с плотностью $\rho_i = 3\pi 2^{2i-2}$. Переход к следующему ярусу (увеличение i на единицу) соответствует уменьшению размеров вихрей вдвое и увеличению их числа в 4 раза.

Для получения малопараметрической модели вводятся коллективные переменные A_i и C_i , имеющие смысл характерных амплитуд вихрей данного яруса. При этом $E_{vi} = A_i^2$, $E_{ui} = C_i^2$. Обезразмеренные уравнения (1.5) — (1.6) (за единицу измерения функций Ψ и Γ выбрана кинематическая вязкость ν , длины — размер области L , времени — величина L^2/ν) приводят к следующей системе для величин A_i и C_i :

$$A_i = \sum_{j,k>j} T_{ijk} \left(A_j A_k + \frac{1}{3} C_j C_k \right) + K_i A_i - \kappa (A_i - C_i) \quad (2.3)$$

$$C_i = \sum_{j,k>j} M_{ijk} (A_j C_k - A_k C_j) + \text{Pr}^{-1} K_i C_i + Q \quad (2.4)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad K_i = -21,4 \cdot 2^{2i}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2}{E}} \frac{L^2}{H^2}$$

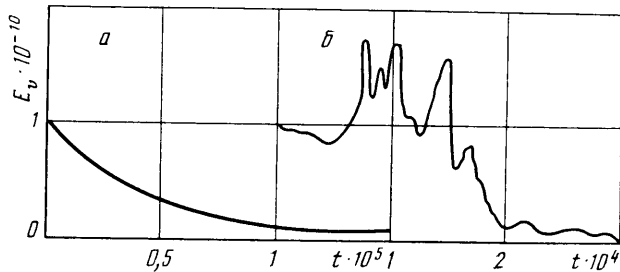
Для матрицы нелинейных взаимодействий справедливо соотношение $T_{ijk} = 2^i T_{0,j-i,k-i}$, а значения элементов T_{ijk} приведены в [8], где подробно описано построение каскадных уравнений для изотермической двумерной турбулентности. В [9] модель использовалась для исследования спектральных характеристик турбулентной конвекции в тонких вертикальных щелях. В отличие от [9] в данной работе разложение поля температуры проводится по тем же базисным функциям, что и поле функции тока. В этом случае член $\{\Gamma, \Delta\Gamma\}$ в (1.5) не приводит к вычислению новой матрицы в уравнении (2.3). При таком разложении в уравнении теплопроводности появляется матрица M_{ijk} , вычисленная в [10] при рассмотрении двумерной МГД-турбулентности.

Вид функции Q в (2.4) зависит от вида температурных условий, поддерживаемых на подстилающей поверхности, а в общем случае может включать и источники тепла, распределенные в самом слое. Если на поверхности поддерживается температурное поле со сложной структурой, то его следует спроецировать на базис (2.2) и получить соответствующий член, описывающий подкачку энергии в турбулентное течение за счет неоднородного нагрева нижней поверхности.

При рассмотрении вырождения неизотермической турбулентности над изотермической поверхностью ($\Gamma_0 = \text{const}$) $Q = -3\kappa C_i / \text{Pr}$ и аналогичен

члену $-\kappa A_i$ в уравнении (2.3). Если моделировать вырождение турбулентности над теплоизолированной поверхностью, то $Q=0$. Последний случай исследовался при численных решениях (2.3)–(2.4), т. е. рассматривалось влияние температурных неоднородностей на вырождение крупномасштабной турбулентности во вращающемся слое жидкости при слабой теплоотдаче на подстилающей поверхности.

Изменение характера эволюции крупномасштабной турбулентности под действием горизонтальных неоднородностей температуры иллюстрирует фиг. 4. Значение параметров выбраны близкими к величинам, характерным для атмосферы Земли в средних широтах: $f=10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $H=10 \text{ км}$, $v=100 \text{ м}^2/\text{с}$, $kH=10$. Наибольший рассматриваемый масштаб движения $L \sim 4000 \text{ км}$, т. е. $\kappa=1,6 \cdot 10^5$. Решалась система уравнений (2.3)–(2.4) для $i=0-9$, т. е. учитывались квазидвумерные движения с масштабами от 10



Фиг. 4

до 4000 км. На фиг. 4, а приведен график изменения кинетической энергии при вырождении изотермической турбулентности во вращающемся слое. В начальный момент времени энергия движения была сосредоточена в вихрях размером порядка 500 км, характерная скорость в которых была принята равной 10 м/с. Экмановское трение приводит к быстрому убыванию энергии, которая падает на порядок за время $\sim 10^{-6}$, что соответствует размерному времени около 1 сут.

Результаты счета системы для случая, когда в начальный момент времени такая же энергия сосредоточена в пульсациях, температуры того же пространственного масштаба (это горизонтальные разности температуры $\sim 10 \text{ С}$ на расстояниях $\sim 500 \text{ км}$), представлены на фиг. 4, б. Время вырождения неизотермической турбулентности оказалось на два порядка больше и составило $t \sim 10^{-4}$ — это размерное время порядка 100 сут. Член $\mu(\Delta\Psi - \Delta\Gamma)$ приводит к тому, что за время $t \sim 10^{-8}$ поле функции тока стремится сравняться с полем температуры, подавляя тем самым экмановский механизм диссипации. При дальнейшей эволюции наблюдается значительный рост кинетической энергии — как следует из (1.7), она растет одновременно с E_u , что эквивалентно известному эффекту обострения температурных фронтов. Из необходимости сохранения величины I_3 (1.7) следует, что рост E_u , а следовательно, и E_v возможен только с одновременным уменьшением характерных размеров вихрей и усиление энергии турбулентного течения происходит за счет вихрей малых (но по-прежнему больших толщины слоя) размеров.

Приведенный пример не претендует на детальное сходство с процессами в атмосфере, но указывает на принципиальные различия в характере вырождения крупномасштабной турбулентности в рамках изотермической и неизотермической моделей. Учет горизонтальных неоднородностей температуры приводит к существенному увеличению времени вырождения, в процессе которого возможен значительный рост кинетической энергии системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 1. 396 с.; Т. 2. 415 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Аристов С. Н., Зимин В. Д. Адвективные волны во вращающемся шаровом слое: Препринт № 145. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. 50 с.
4. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препринт № 99. Свердловск: УрО АН СССР, 1987. 48 с.
5. Аристов С. Н., Зимин В. Д. Адвективные течения на вращающемся самогравитирующем шаре // Динамика вязкой жидкости: Сб. статей. Свердловск: УрО АН СССР, 1987. С. 4-14.
6. Райнс П. Геоострофическая турбулентность // Вихри и волны. М.: Мир, 1984. С. 153-198.
7. Зимин В. Д. Иерархическая модель турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981. Т. 17. № 12. С. 1265-1273.
8. Фрик П. Г. Иерархическая модель двумерной турбулентности // Магнит. гидродинамика, 1983. № 1. С. 60-66.
9. Фрик П. Г. Моделирование каскадных процессов в двумерной турбулентной конвекции // ПМТФ, 1986. № 2. С. 71-79.
10. Фрик П. Г. Двумерная МГД-турбулентность. Иерархическая модель // Магнит. гидродинамика, 1984. № 3. С. 48-54.

Пермь

Поступила в редакцию
4.V.1987