

УДК 532.5.013.4

РАЗВИТИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

АХМЕТОВ В. К., ШКАДОВ В. Я.

Закрученные потоки широко используются в различных технических устройствах и наблюдаются в природных явлениях (смерчи, торнадо). Их изучению посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ. Важнейшие свойства закрученных течений изложены в [1, 2]. В [3, 4] проведено численное исследование закрученных потоков в каналах, в [5, 6] — течений в неограниченной среде. Результаты экспериментов по устойчивости закрученных течений и структуре приосевой рециркуляционной зоны представлены в [7–9].

Целью настоящей работы является исследование стационарных осесимметричных закрученных течений в каналах и свободных вихрях, а также выяснение роли гидродинамической неустойчивости в формировании резких структурных изменений этих течений при увеличении скорости вращения. На основе численных решений полных уравнений Навье — Стокса конечно-разностным методом установления изучены закрученные течения в трубе с непроницаемыми и проницаемыми стенками, а также в свободном вихре. Устойчивость закрученных осесимметричных течений рассматривается в предположении локальной параллельности: решается задача о нормальных модах колебаний, развивающихся на фоне осесимметричного течения, определяемого профилями скорости в локальных поперечных сечениях потока. Основное внимание уделено течениям в свободном вихре с возникновением зон обратных токов, их структуре и устойчивости.

1. Осесимметричное течение с закруткой в цилиндрической системе координат r, φ, z описывается уравнениями Навье — Стокса, которые можно представить в виде следующей системы уравнений для функции тока ψ , завихренности Ω и циркуляции Γ :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_z \Omega) + \frac{\partial}{\partial r} (v_r \Omega) = 2G^2 \frac{\Gamma}{r^3} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega) \right) \right] \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v_z \Gamma) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r \Gamma) = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) \right] \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\Omega \quad (1.3)$$

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = \frac{\Gamma}{r} \quad (1.4)$$

$$\Omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

Здесь v_r, v_z отнесены к характерному значению осевой скорости U_∞ , а v_φ — к максимальному значению азимутальной скорости V_1 в начальном сечении.

Течение рассматривается в цилиндрической области Q ($0 \leq z \leq z_h, 0 \leq r \leq r_h$), ограниченной плоскостями $z=0, z=z_h$ и поверхностью вращения $r=r_h$. В случае течения в трубе расчетная область ограничена твердой поверхностью $r_h=1$, в случае свободного вихря — условной границей $r_h = \text{const} \gg 1$.

Данные, определяющие развитие потока в области Q , задаются в начальном сечении $z=0$

$$v_z = v_{z0}(r), \quad v_\varphi = v_{\varphi0}(r), \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

Функции $v_{z0}(r)$, $v_{\varphi0}(r)$ берутся либо из экспериментальных данных, либо выводятся из теоретических рассмотрений. Первая из возможностей относится к случаю, когда начальное поле формируется с помощью специальных устройств; такие течения организуются в трубах для технических приложений. Вторая возможность возникает в тех случаях, когда вихревое течение с закруткой формируется вследствие естественного развития потока. В частности, свободный концевой вихрь образуется за крылом самолета вследствие отрыва потока с концевой кромки.

Условия (1.5) простым пересчетом переформулируются на функции ψ , Ω , Γ .

В выходном сечении $z=z_k$ граничные условия могут быть поставлены по-разному. Имеющийся опыт решения этих задач (например, [3]) показывает, что предпочтительно задавать мягкие граничные условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0, \quad z = z_k, \quad 0 \leq r \leq r_k \quad (1.6)$$

Условия этого типа оказывают слабое влияние на структуру течения вверх по потоку, поэтому при их использовании можно ограничиться малопротяженной областью Q по z .

На боковой поверхности расчетной области Q для закрученного течения в трубе выставляются условия прилипания, для закрученных течений в неограниченной среде — условия перехода в равномерный поток, а на оси $r=0$ — условия симметрии

$$\psi = \psi_1 = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad r = 1 \quad (1.7)$$

$$\psi = \psi_2 = \text{const}, \quad \Omega = 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial r} = 0, \quad r = r_k \quad (1.8)$$

$$\psi = 0, \quad \Omega = 0, \quad \Gamma = 0, \quad r = 0 \quad (1.9)$$

В ходе вычислений ставилась задача получить стационарное течение, определяемое уравнениями (1.1)–(1.3), граничными условиями (1.5)–(1.9) и параметрами $\text{Re} = U_\infty \delta / \nu$, $G = V_1 / U_\infty$, где δ — либо радиус трубы, либо линейный масштаб, на котором $\Gamma|_{z=0}$ становится постоянной.

Для этого применялся метод установления по времени и находилось предельное решение, устанавливающееся при $t \rightarrow \infty$ от заданных начальных условий

$$\Omega = \Omega_0(r, z) = 0, \quad \Gamma = \Gamma_0(r, z) = v_{\varphi0} r, \quad t = 0, \quad (r, z) \in Q$$

Алгоритм вычислений включает следующие итерации: по заданным в момент $t = t_n$ во всем поле течения значениям Γ и Ω находится распределение ψ как решение уравнения Пуассона (1.3). Затем на одном временном шаге решаются уравнения переноса (1.1), (1.2) и находятся значения Γ , Ω в момент $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. При этом сначала решается уравнение для Γ , а при решении уравнения для Ω используются найденные значения для Γ на слое $n+1$. После вычисления Γ и Ω для момента времени $t = t_{n+1}$ вычисления повторяются для нового шага по времени. Критерием выхода на стационарный режим служило условие

$$\max_{i,j} \left| \frac{\Omega_{ij}^{n+1} - \Omega_{ij}^n}{\Omega_{ij}^n} \right| \leq \varepsilon$$

в котором параметр $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$. Шаг по времени составлял $\Delta t = 0,02 - 0,06$.

Для решения уравнения Пуассона применялся метод неполной редукции [10]. Уравнения переноса решались по явной конечно-разностной схеме с аппроксимацией симметричными центральными разностями вязких членов и односторонними разностями (с учетом направления потока в ячейке сетки) конвективных членов [6]. Использование односторонних разностей обеспечивает лишь первый порядок точности используемой схемы, но существенно повышает ее устойчивость.

Вычисления проводились на сетках 31×65 , 41×65 , 41×129 . Увеличение числа расчетных точек по оси z позволяло проследить влияние расположения границы z_k . Кроме того, изменение числа расчетных точек использовалось для контроля точности вычислений. Увеличение длины расчетной области в 2 раза не приводило к изменениям качественной картины течения, а количественные характеристики изменялись в пределах 5%. Для контроля точности и сходимости решения был проведен также расчет одного из автомодельных решений в задаче о течении в трубе с движущейся стенкой [1]. При $Re=775$ и начальном однородном распределении $v_z=z$, $v_\varphi=0$, $v_r=0$ решение сходится к автомодельному примерно через 500 итераций и отличается от него в пределах 1%. Основные вычисления проведены при числах Рейнольдса, не превышающих 500.

2. Закрученные течения в трубе исследовались при следующих распределениях скоростей в начальном сечении $z=0$:

$$v_{z0}=D_0+D_1 \exp(-br^2), \quad v_{\varphi 0}=\frac{A}{r}(1-\exp(-br^2)), \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (2.1)$$

$$v_{z0}=s_0+s_1r+s_2r^2, \quad v_{\varphi 0}=t_0+t_1r+t_2r^2, \quad r_0 \leq r \leq 1$$

Эти профили скорости согласуются с данными экспериментов [9], они были использованы в расчетах [4]. При $0 \leq r \leq r_0$ распределение скорости соответствует течению типа свободного вихря. Константа b характеризует значение r , при котором азимутальная скорость максимальна; выбором D_0 , D_1 можно получить поток спутного или струйного типа. Коэффициенты полиномов s_i , t_i находятся из условий прилипания и непрерывности скоростей v_{z0} , $v_{\varphi 0}$ и их производных в точке r_0 . В расчетах были приняты значения $D_0=1$, $D_1=0$, $r_0=0,75$, $A=0,419$, $b=14$, $\nu=10$. При этих значениях параметров имеем равномерный набегающий поток для $0 \leq r \leq r_0$ с максимальным значением $v_\varphi=1$ при $r=r_{\max}=0,3$.

Вычисления полей течения, отвечающих краевой задаче (1.1)–(1.7), (1.9), (2.1) были проведены при $Re=10; 75; 150; 300; 500; 0 < G < 3$.

Наиболее важными свойствами течений с закруткой в трубе являются следующие. При достаточно большом значении $G=G_1$ (зависящем от значения Re) вблизи оси трубы возникает зона возвратного течения, ограниченная точками торможения, расположенными на оси симметрии. При увеличении закрутки до $G=G_2$ позади первой зоны возникает вторая зона возвратного течения, изолированная от первой, гораздо более протяженная по z . Скорость рециркуляции в ней гораздо меньше, чем в первой. Течение в каждой из этих зон имеет тороидальную структуру, составленную замкнутыми линиями тока. При дальнейшем увеличении закрутки до $G=G_3$ две зоны сливаются и образуют одну большую область, в которой скорость потока на оси отрицательна, однако внутри нее сохраняются два центра рециркуляции. При числах $Re \geq 300$, если продолжать увеличивать закрутку до $G=G_4$, впереди дополнительно возникает еще одна зона возвратного течения малой протяженности, которая при большей закрутке $G=G_5$ опять сливается с предыдущей областью возвратного течения. Картина линий тока при $Re=300$, $G=2,15$ представлена на фиг. 1. Кривые 1–8 соответствуют значениям $\psi=0,125; 0,08; 0,045; 0,02; 0,005; 0,0008; 0; -1,6 \cdot 10^{-5}$. Критические значения величин $G=G_1, G_2, \dots, G_5$, при которых происходят последовательные структурные изменения потока, приведены в табл. 1. Видно, что на протяженность и структуру рециркуляционных зон сильно влияет даже небольшое увеличение начальной закрутки. При малых числах Рейнольдса ($Re \sim 10$) начальная закрутка быстро уменьшается вдоль трубы и на выходе из расчетного участка трубы уста-

Таблица 1

Re	G ₁	G ₂	G ₃	G ₄	G ₅
75	2,38	2,5	2,62	—	—
150	2,14	2,25	2,36	—	—
300	2,0	2,05	2,08	2,1	2,14
500	1,95	1,98	2,0	2,02	2,04

Таблица 2

V ₀	v _{min}	z ₁	z ₂	d ₀	G	v _{min}	z ₁	z ₂	d ₀
Re=150, G=2,27					Re=100				
0	-0,088	0,12	1,25	0,32	1,0	0,110	—	—	—
0,01	-0,03	0,15	0,3	0,14	1,08	-0,077	0,56	1,76	0,45
0,015	0,027	—	—	—	1,17	-0,204	0,34	2,68	0,84
Re=300, G=2,15					Re=250				
0	-0,065	0,14	1,96	0,2	0,9	0,142	—	—	—
0,01	-0,034	0,48	1,45	0,11	1,0	-0,06	0,75	1,48	0,33
0,015	-0,013	0,52	1,2	0,076	1,08	-0,141	0,38	2,82	0,76
0,02	0,006	—	—	—	—	—	—	—	—
Re=500, G=2,03					Re=500				
0	-0,052	0,26	1,92	0,12	0,9	0,05	—	—	—
0,01	-0,025	0,55	1,3	0,084	1,0	-0,065	0,54	1,1	0,48
0,015	-0,007	0,62	1,15	0,06	1,04	-0,076	0,42	1,34	0,64
0,02	0,001	—	—	—	—	—	—	—	—

навливается профиль Пуазейля. С увеличением числа Re падение начальной закрутки сильно замедляется, а расстояние от входного сечения, на котором формируется профиль Пуазейля, растет.

Перейдем к сравнению теории с экспериментом. В [2] на основе обобщения большого количества экспериментальных данных по закрученным потокам в трубах получена следующая зависимость, характеризующая замедление начальной закрутки вдоль оси трубы:

$$\Phi' = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \exp(-pz), \quad \Phi = \left(\int_0^1 v_0 v_z r^2 dr \right) \left(\int_0^1 v_z^2 r dr \right)^{-1}, \quad \Phi_0 = \Phi|_{z=0} \quad (2.2)$$

Здесь Φ — интегральный параметр закрутки, представляющий собой отношение осевой составляющей потока момента количества движения к осевой составляющей потока количества движения; p — константа, определяемая экспериментально и зависящая от Φ_0 .

На фиг. 2 приводится сравнение величины Φ' , вычисленной для расчетных течений при $Re=150, G=2,39$; $Re=300, G=2,1$; $Re=500, G=2,0$ (сплошные линии 1–3) с зависимостью (2.2) (штриховая линия). Значение $p=0,025$, определяемое величиной Φ_0 для профилей (2.1), было взято из [2]. С увеличением Re кривые для расчетных течений приближаются к экспериментальной зависимости, полученной при $Re=10^4-10^5$.

Рассмотрим теперь закрученные течения в осесимметричной трубе при наличии вдува через ее боковую поверхность. Положим, что вдув производится в радиальном направлении с постоянной скоростью $-V_0$ на части боковой поверхности $0 \leq z \leq z_0, r=1$. К граничным условиям (1.5) в этом

случае необходимо добавить

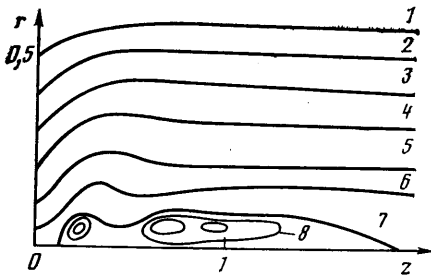
$$\psi = V_0 z + \text{const}, \quad 0 \leq z \leq z_0, \quad r = 1$$

Результаты расчетов, показывающие влияние вдува на образование зон возвратных течений для $Re=150; 300; 500$ при $z_0=2,5$, представлены в табл. 2. Видно, что с увеличением V_0 минимальная скорость на оси трубы v_{\min} возрастает и становится положительной, так что рециркуляционные зоны, которые наблюдались при отсутствии вдува ($V_0=0$), пропадают.

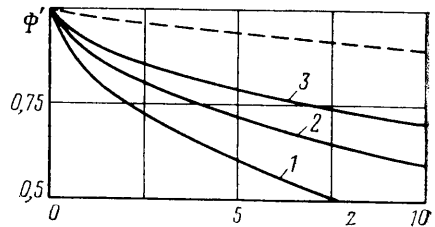
Закрученные течения в неограниченной среде исследовались при следующем распределении скоростей в начальном сечении $z=0$:

$$v_{z0}=1, \quad v_{\varphi 0} = \frac{0,554}{r} (1 - \exp(-8r^2)), \quad 0 \leq r \leq r_k \quad (2.3)$$

Основные расчеты проводились на сетке 31×129 при длине расчетной области $z_k=20$. Величина r_k полагалась равной 10, так как дальнейшее



Фиг. 1



Фиг. 2

увеличение расчетной области не приводило к существенным изменениям картины течения. В силу того что основное внимание уделялось возникновению рециркуляционных зон, было предпринято сгущение расчетной сетки вблизи оси течения, аналогично [5].

Решения краевой задачи (1.1)–(1.6), (1.9), (2.3) были получены при $Re=10; 100; 250; 500; 0 < G < 2$. При этом, так же как и в случае закрученных течений в трубе, при достаточно большом значении G вблизи оси течения возникает область возвратного тока. При возрастании закрутки увеличиваются диаметр этой области d_0 и значение максимальной скорости обратного течения. Передняя точка торможения z_1 смещается вверх по потоку, а задняя z_2 — вниз. Значения z_1, z_2, d_0 и v_{\min} для $Re=100; 250; 500$ и различных G приведены в табл. 2. В отличие от закрученного течения в трубе здесь получалась только одна замкнутая область возвратного течения. Характерная картина поля течения при наличии рециркуляционной зоны представлена на фиг. 3. Здесь $Re=500, G=1$. Кривые 1–9 соответствуют значениям $\psi=0,26; 0,118; 0,43; 0,009; 0,0013; 8 \cdot 10^{-5}; 0; -1,6 \cdot 10^{-4}; -3 \cdot 10^{-5}$. Штриховой линией на фиг. 3 показан контур области возвратного течения, наблюдавшийся в экспериментах [9] в расширяющейся трубе. Число Рейнольдса, построенное по расходной скорости U_0 и начальному диаметру трубы D , составляло 2560. Параметр закрутки, определяемый как $G_1 = \Gamma / U_0 D$, где Γ — циркуляция на задней кромке вихревой лопатки, равнялся 1,777. При наложении его на расчетную рециркуляционную зону имеется практически полное совпадение.

3. Рассмотрим задачу об устойчивости полученных осесимметричных закрученных течений в предположении локальной параллельности, так как для профилей $v_z(r, z)$ и $v_\varphi(r, z)$ зависимость от z является слабой. Для этого на течения, определяемые профилями осевой $U(r)$ и азимутальной $W(r)$ компонентами скорости в локальных поперечных сечениях потока,

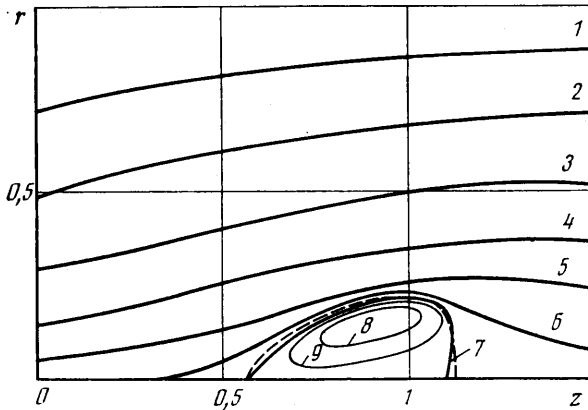
наложим малые возмущения типа бегущей волны (нормальные моды)

$$\{v_z', v_r', v_\varphi', p'\} = \{F, iS, H, P\} \exp [i(\alpha z + n\varphi - \alpha ct)] \quad (3.1)$$

Для комплексных амплитудных функций $F(r)$, $S(r)$, $H(r)$, $P(r)$ получаем систему уравнений после линеаризации (1.1)–(1.3) и подстановки (3.1)

$$\begin{aligned} r^2 \gamma F + \alpha r^2 P + r^2 S U' &= \frac{1}{i \operatorname{Re}} [r(rF')' - (\alpha^2 r^2 + n^2)F] \\ r^2 \gamma S + 2rHW - r^2 P' &= \frac{1}{i \operatorname{Re}} [r(rS')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)S - 2nH] \\ r^2 \gamma H + r^2 S \left(W' + \frac{W}{r} \right) + rnP &= \frac{1}{i \operatorname{Re}} [r(rH')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)H - 2nS] \\ \alpha r F + (rS)' + nH &= 0, \quad \gamma = \alpha(U - c) + n \frac{W}{r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В уравнениях (3.2) поперечная составляющая скорости основного потока не учитывалась. Это оправдано тем, что максимальная величина ра-



Фиг. 3

диальной компоненты скорости более чем на порядок меньше соответствующей величины для осевой и азимутальной компонент.

Граничные условия для системы (3.2) заключаются в требовании регулярности решения вблизи оси $r=0$, затухания возмущений на бесконечности для течения в неограниченной среде и условий прилипания при $r=1$ для течения в трубе

$$\begin{aligned} S(0) = H(0) = 0, \quad F(0), P(0) < \infty \quad (n=0) \\ S(0) \pm H(0) = 0, \quad F(0) = P(0) = 0 \quad (n = \pm 1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} S(0) = H(0) = F(0) = P(0) = 0 \quad (|n| > 1) \\ F(\infty) = S(\infty) = H(\infty) = P(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$F(1) = S(1) = H(1) = 0 \quad (3.5)$$

Комплексное собственное число с однородной краевой задачи (3.2)–(3.5) дает фазовую скорость волны c_r и коэффициент усиления αc_i . При $c_i > 0$ амплитуды возмущения (3.1) растут, при $c_i < 0$ затухают с течением времени.

Метод расчета собственных чисел включает несколько этапов. Вблизи

$r=0$ и $r=\infty$ (для течений в неограниченной среде) строятся асимптотические решения по методу Фробениуса, которые позволяют перенести граничные условия в точки $r=r_a$ и $r=r_d$ соответственно. Для течения в трубе от точки r_a до $r=1$ решения продолжают численным интегрированием по методу Кутты — Мерсона с автоматическим выбором шага, дополненным пошаговой ортогонализацией. В точке $r=1$ подбором c_r , c_i , который осуществляется итерациями по методу Ньютона, добиваемся выполнения условий (3.5).

Для течений в неограниченной среде интегрирование проводится от r_a и r_d внутрь расчетной области к точке r_m ($r_a < r_m < r_d$), в которой решения

Таблица 3

Re	G	α	c_r	αc_i	f	Re	G	α	c_r	αc_i	f
$z=0,62$						$z=0,94$					
250	0,9	0,46	1,79	0,026	0,245	250	1,0	0,6	1,34	0,185	0,231
500	1,0	0,54	1,59	0,157	0,255	150	2,27	2,05	1,33	-0,087	-
250	0,9	0,54	2,04	0,186	0,345	300	2,1	2,1	1,3	-0,045	-
500	1,0	0,57	1,4	0,202	0,258	500	2,0	2,15	1,28	-0,028	-
$z=2,5$						$z=5$					
250	0,9	0,605	1,43	0,136	0,214	150	2,27	1,55	1,24	-0,084	-
500	1,0	0,53	1,3	0,124	0,171	300	2,1	1,85	1,3	-0,043	-
250	0,9	0,6	1,43	0,197	0,23	500	2,0	1,85	1,29	-0,027	-
500	1,0	0,5	1,29	0,16	0,201	-	-	-	-	-	-
$z=5$						$z=10$					
250	0,9	0,54	1,5	0,028	0,193	150	2,27	1,05	0,96	-0,086	-
500	1,0	0,53	1,33	0,04	0,16	300	2,1	1,55	1,21	-0,041	-
250	0,9	0,6	1,48	0,091	0,219	500	2,0	1,85	1,27	-0,024	-
500	1,0	0,43	1,35	0,066	0,173	-	-	-	-	-	-
$z=10$						$z=z_p$					
250	0,9	0,48	1,53	-0,025	-	150	2,27	1,6	1,11	-0,834	-
500	1,0	0,48	1,38	-0,045	-	300	2,1	2,1	1,1	-0,325	-
250	0,9	0,595	1,47	0,031	0,21	500	2,0	2,4	1,1	-0,319	-
500	1,0	0,46	1,34	0,025	0,166	-	-	-	-	-	-

склеиваются, что достигается также подбором c_r , c_i . В расчетах полагалось $r_a=0,01$, $r_d=7$, $r_m=2$.

Устойчивость расчетных течений исследовалась для возмущений (3.1) с $n=-1$, так как, согласно [11, 12], эта мода наиболее опасна как для закрученных течений в трубе, так и для свободных вихрей, а в [8] показывается, что, вероятно, именно эта мода наблюдается в эксперименте.

Для течения в неограниченной среде удобно перейти от профилей $U(r)$ и $W(r)$ к $U_1(r)$ и $W_1(r)$ соответственно по формулам

$$U_1 = (1-U)/\Delta, \quad W_1 = WG/\Delta, \quad \Delta = 1-U(0)$$

а за характерный размер взять величину $l=r_{\max}/1,122$, r_{\max} — точка, в которой $W(r)$ максимальна. Тогда в качестве оценки начального значения для собственного числа s можно использовать собственные числа [11] для течения

$$U_0(r) = \exp(-r^2), \quad W_0(r) = q/r(1 - \exp(-r^2)) \quad (3.6)$$

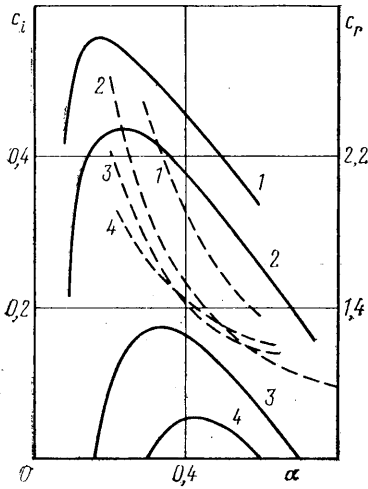
с параметром закрутки $q=W(r_{\max})/0,639$ и числом $Re_1=Re \Delta l$. Профили (3.6) получены теоретически из автомодельного решения уравнений Навье — Стокса, полученного Бэтчелором [13] для вязкого закрученного следа, как асимптотические приближения при $z \rightarrow \infty$.

Введем в рассмотрение профили $U_2(r)$, $W_2(r)$

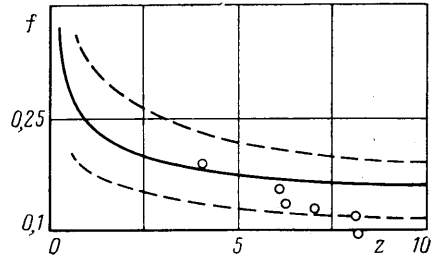
$$U_2 = U_0 + \varepsilon_0(U_1 - U_0), \quad W_2 = W_0 + \varepsilon_0(W_1 - W_0) \quad (3.7)$$

Тогда, двигаясь по ε_0 малым шагом от нуля до единицы, при фиксированных остальных параметрах можно преобразовать профили U_0, W_0 в U_1, W_1 и тем самым получить для них точные начальные значения c_r^1, c_i^1 .

Было исследовано четыре характерных течения: $Re=250; G=0,9; 1$ и $Re=500; G=0,9; 1$. Два из них имели рециркуляционную зону. В каждом рассматривалось от четырех до шести локальных поперечных сечений $z=const$. Вычислялось одно собственное число с максимальным c_i , хотя в [14] показано, что спектральная задача (3.2)–(3.4), (3.6) может иметь несколько собственных чисел,



Фиг. 4



Фиг. 5

отвечающих растущим возмущениям. В табл. 3 представлены фазовые скорости $c_r=1-\Delta c_r^1$, максимальные значения коэффициентов усиления αc_i и частота колебаний f , отвечающие наиболее неустойчивому волновому числу α , а на фиг. 4 изображены зависимости $c_i(\alpha), c_r(\alpha)$ для течения при $Re=500, G=1$ (сплошными и штриховыми линиями соответственно). Кривые 1–4 соответствуют значениям $z=0,62; 2,5; 5; 10$. Безразмерная частота колебаний f , отнесенная к U_∞/δ , определялась по формуле $f=\alpha c_r/2\pi$.

Рассматривая локальные поперечные сечения, устанавливаем, что с увеличением z неустойчивость потока сначала повышается, а затем падает. Таким образом, выделяется некоторая ограниченная по z область неустойчивости, которая обладает следующими свойствами: при фиксированной закрутке увеличение числа Re усиливает неустойчивость течения, а сама область неустойчивости увеличивается; при фиксированном Re увеличение закрутки приводит к незначительному смещению границы области неустойчивости вверх по потоку; при наличии в потоке области возвратного течения в ней наблюдается наиболее сильная неустойчивость.

Перейдем к сравнению теории с экспериментами. Спектральные характеристики для течений такого типа исследовались в [8]. Отмечалось, что энергетический спектр всегда содержит отдельные низкочастотные (~ 10 Гц) пики для флуктуаций осевой и азимутальной компонент скорости. Безразмерную частоту, отвечающую главному максимуму измеренных спектров для течений с пузыревидной рециркуляционной зоной, можно сравнить с частотой колебаний f , вычисленной для расчетных течений. На фиг. 5 сплошной линией представлена зависимость f от z для течения при $Re=500, G=1$, штриховой линией изображены значения f , соответствующие двум ветвям нейтральной кривой ($c_i=0$). Точками нанесены результаты экспериментов [8], безразмерная частота для которых определялась скоростью набегающего потока и начальным радиусом трубы экспериментальной установки и умножалась на поправочный коэффициент $K=(r_{max}/R_{max})|_{z=0}$. Величина K характеризует отношение радиусов в начальном сечении, при которых $W(r)$ — максимальна, для расчетного профиля

(2.3) и экспериментальных течений [8]. Видно, что имеется достаточно хорошее соответствие теории с экспериментом.

В [7] представлены результаты экспериментов по устойчивости вихрей, сходящих с задней кромки крыла. Главный максимум измеренных спектров отвечал частотам около 300 Гц. Используя параметры течения [7] $U_\infty=18,3$ м/с, $\delta=0,127$ м, $K=8$, находим, что безразмерная частота для этого случая составляет 0,26, что также близко к расчетным частотам.

Рассмотрим устойчивость расчетных течений в трубе. В этом случае комплексные собственные числа определяются из решения однородной краевой задачи (3.2)–(3.3), (3.5). Было исследовано три течения с рециркуляционными зонами: $Re=150$, $G=2,27$; $Re=300$, $G=2,1$; $Re=500$, $G=2$. В каждом из них рассматривалось по три поперечных сечения $z=0,94$; 5; 10. В качестве оценки начальных значений для c_r , c_i использовались собственные числа, которые вычислялись описанным выше методом для течения Пуазейля с вращением по закону твердого тела

$$U_0=1-r^2, \quad W_0=\omega r, \quad \omega=\text{const}$$

Например, при $Re=150$, $\omega=1$, $\alpha=0,32$ получаем собственное число $c_r=-2,478$, $c_i=0,260$.

Вводя профили U_2 , W_2 по формулам (3.7) и проводя аналогичные действия, получаем начальные значения c_r , c_i . Проведенные расчеты с этими начальными значениями дали моды колебаний с наибольшими значениями c_i .

В табл. 3 приведены фазовые скорости c_r , максимальные значения αc_i и отвечающие им волновые числа α . Видно, что все рассмотренные течения устойчивые. С увеличением числа Re максимальное значение αc_i по абсолютной величине уменьшается, но все же остается отрицательным. По сечениям $z=\text{const}$ характеристики устойчивости меняются слабо. Аналогичные величины α , c_r , αc_i для течения Пуазейля, которое должно сформироваться на выходе из трубы при данных начальных условиях, представлены в табл. 3 при $z=z_p$. Видно, что во всех случаях максимальные значения αc_i для профиля Пуазейля меньше соответствующих величин в сечениях $z=\text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
2. Щукин В. К., Халатов А. А. Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах. М.: Машиностроение, 1982. 200 с.
3. Будунов Н. Ф. О некоторых расчетах закрученных течений несжимаемой жидкости // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1977. № 13. Вып. 3. С. 3–10.
4. Uchida S., Nakamura Y., Suehiro F. Numerical calculations of swirling flows in a circular pipe // Trans. Jap. Soc. Aeron. Space Sci. 1981. V. 24. № 63. P. 17–25.
5. Grabowski W. J., Berger S. A. Solutions of the Navier-Stokes equations for vortex breakdown // J. Fluid Mech. 1976. V. 75. № 3. P. 525–544.
6. Kopecky R. M., Torrance K. E. Initiation and structure of axisymmetric eddies in a rotating stream // Computers and Fluids. 1973. V. 1. N 3. P. 289–300.
7. Singh P. I., Uberoi M. S. Experiments of vortex stability // Phys. Fluids. 1976. V. 19. № 12. P. 1858–1863.
8. Garg A. K., Leibovich S. Spectral characteristics of vortex breakdown flowfields // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 11. P. 2053–2063.
9. Faler J. H., Leibovich S. An experimental map of the internal structure of a vortex breakdown // J. Fluid Mech. 1978. V. 86. № 2. P. 313–335.
10. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
11. Lessen M., Paillet F. The stability of a trailing line vortex. Pt 2. Viscous theory // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. № 4. P. 769–779.
12. Mackrodt P. A. Stability of Hagen-Poiseuille flow with superimposed rigid rotation // J. Fluid Mech. 1976. V. 73. № 1. P. 153–164.
13. Batchelor G. K. Axial flow in a trailing vortices // J. Fluid Mech. 1964. V. 20. № 4. P. 645–658.
14. Азметов В. К., Шкадов В. Я. К вопросу об устойчивости свободного вихря // Вестн. МГУ. Сер. математика. Механика. 1987. № 2. С. 35–40.

Москва

Поступила в редакцию
19.11.1986