

УДК 532.54

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ВОРОНКООБРАЗОВАНИЯ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ
ИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЕМКОСТЕЙ**

ИЩЕНКО В. П., ШРАГЕР Г. Р., ЯКУТЕНОК В. А.

При переработке полимерных материалов происходит слив высоковязкой жидкости из баков различной формы. Характерной особенностью реализуемых при сливе течений является наличие свободной границы. В процессе истечения наблюдается искривление свободной поверхности и образование воронки с дальнейшим прорывом газа через сливное отверстие. Остаток массы жидкости в момент прорыва газа зависит от формы свободной поверхности. В большинстве работ, касающихся исследования процессов слива, рассматривается невязкая жидкость [1–4]. В работе [5] рассматривается задача о течении пленки высоковязкой жидкости на вертикальной и наклонной стенке. На основе решения этой задачи оценивается масса жидкости, остающаяся на стенках при опорожнении цилиндрических и конических емкостей. В рамках такого подхода невозможно получить эффект образования воронки, поскольку предполагается, что жидкость вытекла полностью, за исключением пленки на стенке.

В данной работе рассматривается осесимметричное истечение высоковязкой жидкости из конических и цилиндрических емкостей с учетом изменения формы свободной поверхности.

1. Постановка задачи. При рассмотрении медленных течений высоковязкой жидкости, т. е. для задач, в которых число Рейнольдса $Re \ll 1$, нестационарными и конвективными членами в уравнениях Навье – Стокса можно пренебречь. Капиллярные силы считаются малыми по сравнению с вязкими и гравитационными силами и также не учитываются. Тогда задача о течении жидкости со свободной поверхностью, заполняющей в начальный момент времени заданную область Ω_0 , в квазистационарной постановке сводится к определению области Ω_t в заданный момент времени t , а также вектора скорости $v(x, t)$ и давления $p(x, t)$

$$Q_t = \{(x, t) : x \in \Omega_t, t \in [0, T]\}, \quad \Omega_t \in R^3$$

$$\nabla \Pi + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \Delta p = 0 \tag{1.1}$$

$$\Pi = -p\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}$$

Здесь Π – тензор напряжений; \mathbf{I} – единичный тензор; μ – динамический коэффициент вязкости; \mathbf{E} – тензор скоростей деформаций; ρ – плотность. Второе уравнение (1.1) – следствие первого и условия несжимаемости $\nabla v = 0$ при $\nabla \mathbf{F} = 0$.

При рассмотрении течения в конической емкости используется сферическая система координат с полярной осью, направленной против потока, для цилиндрического бака используется цилиндрическая система координат. На выходе задается постоянный расход, профиль скорости при этом приближенно определяется известными решениями для установившегося течения жидкости в каналах соответствующей формы. Для конической емкости профиль скорости на выходе совпадает с решением задачи о стоксовском течении жидкости в коническом конфузоре [6], для цилиндрического бака – с решением Пуазейля [7].

Задание постоянного расхода на выходе требует, вообще говоря, соответствующего изменения массовой силы \mathbf{F} либо наличия устройства, обеспечивающего этот расход. Однако описанные ниже эксперименты при $\mathbf{F}=\text{const}$ показывают, что расход жидкости остается постоянным практически до момента проскока воздуха в сливное отверстие и в случае отсутствия специального устройства для обеспечения постоянного расхода.

Таким образом, граничные условия запишутся в виде

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in S_2, \quad q=\text{const} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{s}\Pi\mathbf{n}=0, \quad \mathbf{n}\Pi\mathbf{n}=-p_0, \quad \mathbf{x}\in S_1 \quad (1.3)$$

Здесь S_1 — свободная граница области; $S_2=\partial\Omega\setminus S_1$; $\partial\Omega$ — граница области Ω ; q — расход жидкости в выходном сечении; \mathbf{n} , \mathbf{s} — единичные векторы, нормальный и касательный к свободной поверхности; $p_0=\text{const}$ — внешнее давление; $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ — заданный вектор скорости (на неподвижной твердой стенке $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})=0$).

На оси симметрии должны выполняться условия осевой симметрии. Свободная поверхность движется в соответствии с кинематическим условием

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f=0 \quad (1.4)$$

где $f(\mathbf{x}, t)$ — уравнение свободной поверхности.

В начальный момент времени емкость заполнена жидкостью и форма свободной поверхности плоская.

Для эквивалентности решения задачи с использованием уравнений (1.1) решению задачи с уравнением неразрывности вместо $\Delta p=0$ требуется выполнение условия неразрывности на границах [8]

$$\nabla\mathbf{v}=0, \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega \quad (1.5)$$

Выполнение условия (1.5) гарантирует консервативность поля скорости внутри области.

2. Метод расчета. Использование общего решения системы уравнений, описывающих ползущее течение, для аналитического решения поставленной задачи чрезвычайно усложняется наличием неизвестной свободной границы. В данной работе для решения использован разностный метод. Разностные аналоги уравнений (1.1) записываются на сетке, которая содержит нерегулярные узлы в окрестности свободной поверхности и дополнительно сгущается в области сливного отверстия. Для их решения используется итерационный метод Гаусса — Зейделя [9]. Первое условие (1.3) совместно с условием (1.5) на свободной поверхности записывается в локальной ортогональной системе координат в виде, предложенном в [10], что позволяет использовать схемы бегущего счета для расчета составляющих скорости. Для более точного выполнения разностного аналога условия несжимаемости внутри расчетной области на каждой итерации используется корректирующая процедура Прахта [11], заключающаяся во введении потенциала корректирующей скорости. Использование этой процедуры для перерасчета скоростей, полученных из разностных аналогов проекций уравнения (1.1), обеспечивает соленоидальность поля вектора скорости на все время процесса без накопления ошибки.

Общий порядок расчета заключается в следующем.

С помощью итерационных схем находится решение разностных аналогов уравнений (1.1) с выполнением на границах условий (1.2), (1.3), (1.5). Значения давления на границе S_2 находятся из разностных аналогов проекций первого уравнения (1.1). После получения установившегося поля скорости из разностного аналога условия (1.4) определяется новая форма свободной поверхности. Затем вновь находится решение системы уравнений (1.1).

Таким образом получается последовательность квазистационарных решений и изменение свободной поверхности с течением времени.

3. Экспериментальная установка. Для проверки результатов расчета была создана

на экспериментальная установка. Она состоит из выполненной из оргстекла емкости (коническая емкость с углом раствора 30° или цилиндр диаметром 0,08 м), снабженной насадком с краном для останковки течения. Диаметр насадка для конической емкости равняется 0,025 м, для цилиндра — 0,032 м. Используемые емкости снабжены также герметически закрывающимися верхними крышками. Кроме свободного течения под действием силы тяжести возможно также создание в емкости избыточного давления. Для этого сжатый воздух через редуктор подается в емкость. Так как нормальный режим работы редуктора возможен при некотором минимальном расходе газа, а по условиям эксперимента изменение объема емкости сравнительно мало, то крышка снабжена дросселирующим клапаном, который позволяет весьма точно поддерживать постоянный перепад давления.

Расход через сливное отверстие определяется путем взвешивания вытекаемой жидкости и фиксирования времени в момент взвешивания секундомером. Установлено, что расход жидкости остается постоянным практически во все время эксперимента, вплоть до момента проскока воздуха в насадок. С увеличением избыточного давления в емкости расход жидкости растет линейно от давления. Проникновение воздуха в насадок фиксируется визуально. Форма свободной поверхности в емкости в процессе истечения наблюдается при помощи телевизионной установки «Интроскоп» (источник рентгеновского излучения — аппарат УРС-1,0) и фотографируется с экрана видеоконтрольного устройства в определенные моменты времени.

В качестве рабочей жидкости использовался пластифицированный трансформаторным маслом бутилкаучук. Исследование реологических свойств используемой жидкости, проведенное на ротационном вискозиметре [12], показало, что в реализуемом диапазоне скоростей сдвига она может рассматриваться как ньютоновская жидкость с вязкостью, равной 600 Па·с при комнатной температуре. Начальная высота заполнения емкости в каждом опыте равнялась 0,1 м.

4. Результаты исследований. При обсуждении результатов воспользуемся безразмерным комплексом $W = \rho g R^2 / \mu U$, характеризующим отношение гравитационных и вязких сил. Здесь g — ускорение силы тяжести; R — радиус сливного отверстия; U — средняя скорость в сливном отверстии.

Течение, возникающее при сливе жидкости из конических емкостей, кроме W определяется углом раствора конуса Θ_0 и безразмерной высотой заполнения H_0 , равной отношению первоначальной высоты заполнения к радиусу сливного отверстия. В случае цилиндрической емкости наряду с W и H_0 определяющим параметром является коэффициент сужения β , равный отношению радиуса цилиндрической емкости к радиусу сливной трубы.

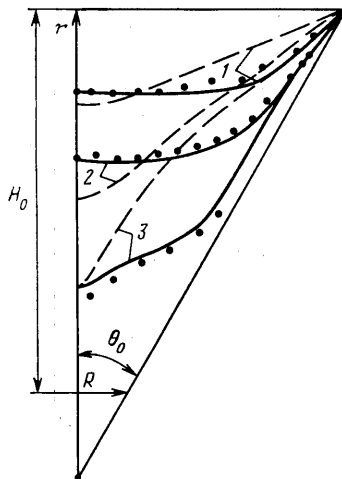
На фиг. 1 изображены формы свободной поверхности, изменяющиеся с течением времени при истечении жидкости из конической емкости с $\Theta_0 = 30^\circ$, $H_0 = 8$. Сплошными линиями показаны формы при $W = 1,88$, штриховыми — при $W = 0,12$ (τ — время, отнесенное к величине R/U). Для $W = 1,88$ поверхности 1, 2, 3 соответствуют временам $\tau = 39,5$; 60,7; 80,8; для $W = 0,12$ — временам 27,4; 47,4; 56,2. В рассматриваемом диапазоне изменения числа W при прочих равных условиях реализуются два качественно различных типа течения. При $W = 0,12$ наблюдается течение, характеризующееся интенсивным движением жидкости в окрестности оси и быстрым образованием воронки. По мере роста W , в частности при $W = 1,88$, реализуется течение другого типа. В процессе истечения на твердой стенке формируется пленка, а в окрестности оси симметрии свободная поверхность сохраняет плоскую форму.

Такой режим течения сохраняется до определенного времени, после которого реализуется течение первого типа и образуется воронка. Точками на фиг. 1 изображены экспериментальные формы свободной поверхности при $W = 1,88$ в моменты времени, совпадающие с расчетными. На фиг. 2 представлены профили нормальной скорости на свободной поверхности, отнесенные к средней скорости в сливном отверстии, в различные моменты времени. Профиль 1 соответствует свободной поверхности 2 на фиг. 1, профиль 2 — поверхности 3 (сплошные линии). В области пленки скорость течения резко падает. С течением времени профиль нормальной скорости из однородного перестраивается в профиль 2, характерный для образования воронки.

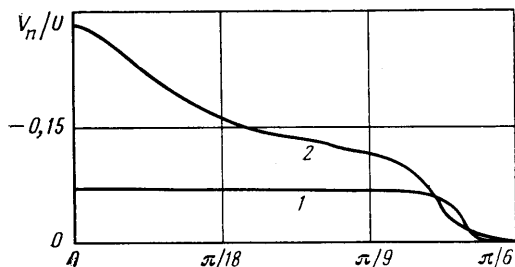
При рассмотрении истечения жидкости из емкости важной характеристикой является остаток массы жидкости в момент достижения свободной поверхности сливного отверстия. В работе [5] в приближении пленочного течения было получено выражение для остатка массы жидкости при истечении из конической емкости. Согласно этому выражению, остаток массы, отнесенный к массе жидкости в начальный момент времени, находится по формуле

$$\Gamma = \frac{2 \operatorname{tg} \Theta_0 H_0^{3/2} [2 + H_0 \operatorname{tg} \Theta_0]}{\cos^2 \Theta_0 [(1 + H_0 \operatorname{tg} \Theta_0)^2 - 1]} W^{-1/2} \tau_0^{-1/2} \cdot 100, \% \quad (4.1)$$

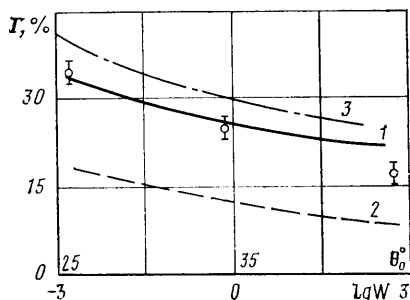
Здесь τ_0 — время опорожнения, отнесенное к величине R/U . На фиг. 3 изображена зависимость остатка массы жидкости в конической емкости (в процентах к массе жидкости в начальный момент времени) от $\lg W$, $\Theta_0 = 30^\circ$, $H_0 = 8$. Кривая 1 — результаты расчетов, точками показаны результаты экспери-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

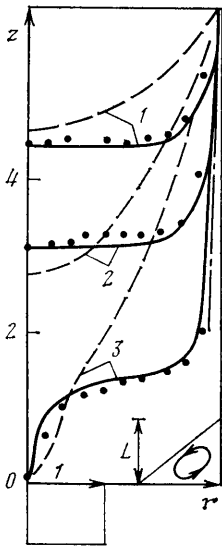
ментов, кривая 2 — зависимость (4.1). Здесь же кривой 3 показана зависимость остатка массы от угла раствора конуса Θ_0 при $W=0,536$, $H_0=8$.

На фиг. 4 изображены формы свободной поверхности, изменяющиеся с течением времени при истечении жидкости из цилиндрической емкости при $\beta=2,5$, $H_0=6,25$. Сплошными линиями изображены формы при $W=4,85$, штриховыми — при $W=0,2$. Для $W=4,85$ поверхности 1, 2, 3 соответствуют временам $\tau=8,9$; 15,6; 26,0; для $W=0,2$ — временам 5,3; 10,7; 15,3. Точками изображены экспериментальные формы свободной поверхности при $W=4,85$ в моменты времени, совпадающие с расчетными. Так же как и в случае конических емкостей, отчетливо наблюдаются два режима истечения: с быстрым образованием воронки и с формированием пленки на твердой стенке.

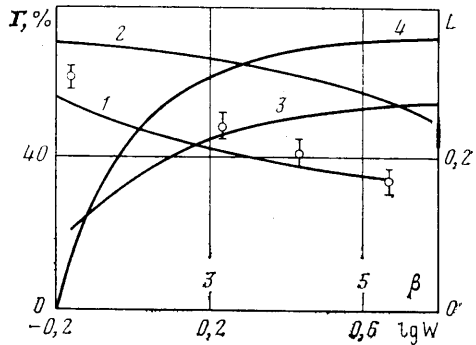
В [5] было получено выражение для толщины пленки, стекающей по вертикальной стенке, которое в безразмерной форме имеет вид

$$h = W^{-1/2} \tau^{-1/2} (H_0 - z)^{1/2} \quad (4.2)$$

Здесь z — безразмерная координата цилиндрической системы координат, отсчитываемая вдоль оси цилиндра от сливного отверстия; τ — безразмерное время. Следует отметить, что толщина пленки на твердой стенке, полученная в результате расчетов, достаточно хорошо согласуется с приближенным выражением (4.2) для толщины пленки. На фиг. 4 штрихпунктиром изображена пленка, полученная из (4.2) для $W=4,85$.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 5 представлены зависимости остатка массы жидкости в цилиндрической емкости от $\lg W$ ($\beta=2,5$, кривые 1, 2 — $H_0=6,2$; 3). Точками показаны результаты эксперимента при $H_0=6,2$. Кривая 3 на фиг. 5 иллюстрирует зависимость остатка массы от коэффициента сужения β при $W\beta^4=500$ и $H_0/\beta=1,2$. Из представленной зависимости следует, что с уменьшением радиуса сливного отверстия при прочих равных условиях остаток массы увеличивается и, начиная с определенного значения, остается постоянным. Для рассматриваемого случая $\beta=5$.

В процессе слива жидкости из цилиндрического бака образуется вихревая зона, схематично показанная на фиг. 4. Следует отметить, что при $Re \ll 1$ вихревая зона является практически застойной зоной. Зависимость вертикального размера вихревой зоны от β представлена кривой 4 на фиг. 5 (L — вертикальный размер вихревой зоны, отнесенный к радиусу цилиндрического бака). Для ползущего течения при $H_0 > L$ данная зависимость является универсальной для канала с внезапным сужением, так как на нее не влияют W и H_0 . Характер поведения остатка массы и размера вихревой зоны в зависимости от β совпадает, начиная с $\beta=5$ вертикальный размер вихревой зоны не меняется. Анализ результатов расчета показывает, что профилирование дна цилиндрического бака вдоль линии, отделяющей вихревую зону от основного течения, позволит снизить остаток массы жидкости при сливе.

Авторы выражают благодарность А. Ф. Олицкому за определение вязкостных характеристик жидкости, используемой в экспериментах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubin B. T., Springer G. S. The formation of a dip on the surface of a liquid draining from a tank // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. № 2. P. 385–390.
2. Иселев И. И. Воронкообразование при истечении жидкости из сферического сосуда // Вопросы гидродинамики и теплообмена в криогенных системах: Тр. ФТИНТ. Харьков, 1970. Вып. 1. С. 146–156.
3. Easton C. R., Catton I. Nonlinear free surface effects in tank draining of low gravity // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 12. P. 2195–2199.
4. Kubic J., Oates H. S. Aspects of outflow from large vessels // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1980. V. 102. № 3. P. 324–329.
5. Шульман З. П., Байков В. И. Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях. Минск: Наука и техника, 1979. 294 с.

6. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 623 с.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз. 1963. Т. 2. 727 с.
8. Васенин И. М., Нефедов А. П., Шрагер Г. Р. Метод расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1985. Т. 16. № 6. С. 28-43.
9. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 488 с.
10. Васенин И. М., Сидонский О. Б., Шрагер Г. Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // ДАН СССР. 1974. Т. 217. № 2. С. 295-298.
11. Прагт У. Неявный метод расчета ползущего движения с приложением к задаче о континентальном дрейфе // Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 174-182.
12. Олицкий А. Ф., Ищенко В. П., Шифанов А. В. Ротационный вискозиметр. А. с. № 868471 (СССР) // Открытия, изобретения, пром. образцы, товар. знаки. 1981. № 36. С. 176.

Томск

Поступила в редакцию
22.IX.1986