

3. *Benson R. S., Pool D. E.* The compressible flow discharge coefficients for a two-dimensional slit // Intern. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. № 5. P. 337–353.
4. *Франкль Ф. И.* Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 3. С. 381–384.
5. *Асланов С. К.* Сверхзвуковое истечение газа из несимметричного сосуда с плоскими наклонными стенками при максимальном расходе // Тр. Куйбышев. авиац. ин-та. 1961. Вып. 12. С. 237–241.
6. *Блюмкина И. А., Цигелов И. М.* Расчет истечения симметричной струи газа при максимальном расходе // Вестн. ЛГУ. 1978. № 13. Вып. 3. С. 79–85.
7. *Косолапов Ю. С., Салтанов Г. А., Сивобород В. А., Филиппов Г. А.* Численное решение задачи об истечении газа из плоских и осесимметричных сосудов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 174–176.
8. *Филиппов Г. А., Салтанов Г. А., Сивобород В. А., Косолапов Ю. С.* Истечение газов с различными показателями адиабаты // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1982. № 1. С. 121–126.
9. *Косолапов Ю. С., Сивобород В. А.* Расчетно-теоретическое исследование истечения газа из плоских щелей и осесимметричных отверстий // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 109–115.
10. *Крайко А. Н., Туляева Н. И., Щербаков С. А.* Метод расчета течений идеального газа в плоских и осесимметричных соплах с изломами контура // Журн. вычисл. математики и мат. физики 1986. Т. 26. № 11. С. 1679–1694.
11. *Тагиров Р. К.* Теоретическое исследование течения идеального газа в сужающихся соплах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 198–202.
12. *Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 6. С. 1020–1050.
13. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
14. *Fenain M., Dutouquet L., Salignac J.-L.* Calcul des performances d'une tuyere propulsive convergente: Comparaison avec l'expérience // J. Rech. Aéropat., 1974. № 5. P. 261–275.
15. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
16. *Камзолов В. И., Пирумов У. Г.* Расчетное исследование сверхзвуковой струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками // ПМТФ. 1967. № 2. С. 117–122.

Москва

Поступила в редакцию
12.XII.1986

УДК 533.6.011.72:537.84

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

ЗАХАРОВ В. Ю., ШИКИН И. С.

Изучаются быстрая и медленная простые волны в рамках анизотропной магнитной гидродинамики Чу, Голдбергера, Лоу [1]. В [2] были построены поля интегральных кривых для быстрой и медленной волн, в двух частных случаях доказано, что такие волны опрокидываются на участке сжатия. Возможность опрокидывания медленной волны на участке разрежения была отмечена в [3]. Однако, как показано в [2, 4], в [3] были неверно выписаны общие соотношения в простых волнах.

В настоящей работе определен характер изменения продольного и поперечного давлений плазмы, полностью решен вопрос об опрокидывании быстрой и медленной волн. Найдены условия, при которых медленная волна опрокидывается на участке разрежения. Быстрая волна всегда опрокидывается на участке сжатия.

1. Соотношения в быстрой и медленной простых волнах. Изучаются быстрая и медленная простые волны, распространяющиеся в анизотропной плазме, в рамках магнитной гидродинамики Чу, Голдбергера, Лоу [1–4]. Характеристическое уравнение для фазовых скоростей быстрой (a_+) и медленной (a_-) волн [2, 4] можно привести к виду

$$A_{+,-}G_{+,-} = Cp_{\perp}h_y^2 \quad (1.1)$$

$$A_{+,-} \rightarrow \rho a_{+,-}^2 - p_{\perp} h_y^2 - 3p_{\parallel} h_x^2, \quad G_{+,-} = \rho(a_{+,-}^2 - a_{A1}^2) + p_{\perp} h_y^2, \quad S = p_M - h_x^2(4p_{\parallel} - p_{\perp})$$

$$\rho a_{A1}^2 = \rho a_A^2 + h_y^2(p_M + p_{\perp}), \quad \rho a_A^2 = h_x^2(p_M - p_{\parallel}), \quad p_M = \frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp}, \quad h = \frac{B}{B}$$

Изменение величин B_y^2 , p_{\parallel} , p_{\perp} в простых волнах определяется соотношениями

$$\frac{dB_y^2}{d\rho} = \frac{2B^2}{\rho} \frac{p_{\perp} h_y^2}{G_{+,-}}, \quad \frac{dp_{\parallel}}{d\rho} = \frac{p_{\parallel}}{\rho} \frac{3G_{+,-} - 2p_{\perp} h_y^2}{G_{+,-}}, \quad \frac{dp_{\perp}}{d\rho} = \frac{p_{\perp}}{\rho} \frac{G_{+,-} + p_{\perp} h_y^2}{G_{+,-}} \quad (1.2)$$

Система координат x , y , z выбрана таким образом, что векторы \mathbf{v} и \mathbf{B} лежат в плоскости x , y ; $B_x = \text{const}$.

В [2] выяснен характер изменения B_y^2 в быстрой и медленной волнах. Показано, что $dB_{y+}^2/d\rho > 0$, $dB_{y-}^2/d\rho < 0$ при $G_- < 0$, $dB_{y-}^2/d\rho > 0$ при $G_- > 0$.

Используя неравенства [2, 4, 5], получим для G_+ , G_-

$$a_+^2 \geq \max(a_0^2, a_{A1}^2), \quad a_-^2 \leq \min(a_0^2, a_{A1}^2), \quad \rho a_0^2 = 3p_{\parallel} h_x^2 \quad (1.3)$$

$$G_+ \geq p_{\perp} h_y^2, \quad G_- \leq p_{\perp} h_y^2. \quad (1.4)$$

Тогда в быстрой волне имеем $dp_{\parallel+}/d\rho > 0$, $dp_{\perp+}/d\rho > 0$.

Рассмотрим изменение p_{\parallel} , p_{\perp} в медленной волне. На фиг. 1 на плоскости ρ , B_y^2 изображено поле интегральных кривых для медленной волны [2, 4]. Интегральные кривые ограничены линиями I и II. Правее I имеем $p_{\parallel} > p_M$, что соответствует условию возникновения планговой неустойчивости [6], левее II имеем $p_{\parallel} < p_M = = p_{\perp}^2 (6p_{\perp} + 3/4\pi^{-1} B^2)^{-1}$, что соответствует критерию возникновения зеркальной неустойчивости.

Выделим области постоянного знака $dp_{\parallel-}/d\rho$, $dp_{\perp-}/d\rho$. Кривая I ($G_- = 0$) разделяет нормальную ($dB_{y-}^2/d\rho < 0$) и аномальную ($dB_{y-}^2/d\rho > 0$) области [7]. Слева от линии 2 ($a_-^2 = a_{A2}^2$) расположена область псевдо-МГД ($a_-^2 \leq a_{A2}^2$, РМНД), справа — область реверс-МГД ($a_-^2 > a_{A2}^2$, РМНД) [8]. На кривых 3 и 4 имеем $dp_{\perp-}/d\rho = 0$, $dp_{\parallel-}/d\rho = 0$ соответственно. Область реверс-МГД разбивается кривыми 1, 3, 4 на четыре подобласти, в каждой из которых имеем фиксированный знак производных p_{\parallel}' , p_{\perp}' (штрих означает дифференцирование по ρ)

$$R_1, R_4: p_{\perp}' > 0, p_{\parallel}' > 0; \quad R_2: p_{\perp}' < 0, p_{\parallel}' > 0; \quad R_3: p_{\perp}' > 0, p_{\parallel}' < 0$$

В области псевдо-МГД знак производных аналогичен их знаку в области R_1 .

Таким образом, давления p_{\parallel} , p_{\perp} растут в медленной волне сжатия только в областях псевдо-МГД, R_1 , R_4 . В областях R_2 , R_3 одно из давлений уменьшается при увеличении ρ .

2. **Опрокидывание простых волн.** Дифференцируя по ρ уравнение (1.1) и используя соотношения (1.2), после громоздких преобразований приходим к выражению ($\lambda_{+,-} = \rho a_{+,-}$)

$$\frac{d\lambda_{+,-}}{d\rho} = \frac{3F_{1+,-}}{F_{2+,-} G_{+,-}} \quad (2.1)$$

$$F_{1+,-} = \rho (p_{\parallel} h_x^2 + \rho a_{+,-}^2) (a_{+,-}^2 - a_{A1}^2)^2 + p_{\perp} \rho (a_{+,-}^2 - a_0^2) (a_{+,-}^2 - a_{A2}^2) + \frac{p_{\perp}^3}{\rho} h_x^2 h_y^4 \quad (2.2)$$

$$F_{2+,-} = a_{+,-}^2 - a_0^2 + a_{+,-}^2 - a_{A1}^2$$

которое при соответствующих преобразованиях переходит в полученное в [2].

Из (1.3), (2.2) следует, что $F_{1+} > 0$, $F_{2+} > 0$. Тогда с учетом (1.4) получим, что $d\lambda_{+}/d\rho > 0$, т. е. профиль быстрой волны опрокидывается на участке сжатия (как в изотропной МГД [9]).

Из (1.3) следует, что $F_{2-} < 0$. В области псевдо-МГД имеем $G_- < 0$, $a_-^2 < a_{A2}^2$. Тогда из (1.3), (2.2) получим, что $F_{1-} > 0$, т. е. в псевдо-МГД профиль медленной волны опрокидывается на участке сжатия.

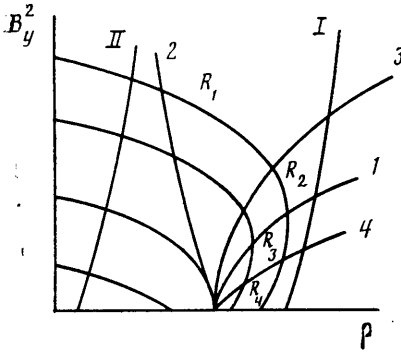
Уравнение $F_{1-} = 0$ определяет на плоскости ρ , B_y^2 некоторую кривую в области реверс-МГД. Покажем, что качественный вид этой кривой аналогичен кривой 5 на фиг. 2 (кривые 1, 2, I те же, что и на фиг. 1).

Подставляя выражение для a_-^2 из условия $G_- = 0$ в формулу для F_{1-} , получим

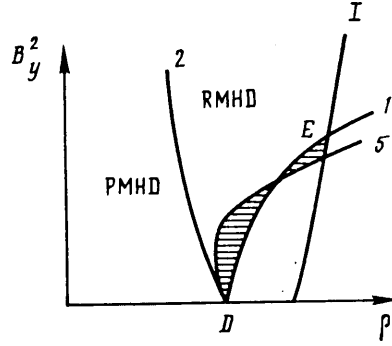
$$F_{1-} = \frac{p_{\perp}^2}{\rho} h_y^2 (p_{\perp} h_x^2 h_y^2 + p_M (h_y^2 - h_x^2)) \quad (2.3)$$

Из (1.4) следует, что условие $G_- = 0$ эквивалентно условию $C = 0$. Используя его, перепишем (2.3) в виде

$$F_{1-} = \frac{p_{\perp}^2}{\rho} h_x^2 h_y^2 (4p_{\parallel} h_y^2 - p_M)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

откуда следует, что кривые $F_{1-}=0$ и $G_{-}=0$ пересекаются в двух точках с абсциссами $h_y^2=0$ и $h_y^2=p_M/(4p_{||})$ (случай $h_x=0$ ввиду простоты не рассматривается). Покажем, что точка с абсциссой $h_y^2=p_M/(4p_{||})$ лежит в области устойчивости, т. е. слева от линии I. Подставляя $h_x^2=1-p_M/(4p_{||})$ в $C=0$, получим

$$C(p_{||}) = -16p_{||}^2 + 4p_{||}(2p_M + p_{\perp}) - p_{\perp}p_M = 0$$

Вдоль участка DE кривой 1 (фиг. 2) давление $p_{||}$ меняется от $p_{||1}=1/4(p_M+p_{\perp})$ до $p_{||2}=p_M$ ($p_{||1}$, $p_{||2}$ — значения $p_{||}$ в точках D и E соответственно). Нетрудно видеть, что $C(p_{||1}) > 0$, $C(p_{||2}) < 0$, откуда следует, что точка с абсциссой $h_y^2=p_M/(4p_{||})$ находится в области устойчивости.

Из соотношения

$$F_{1-}|_{a_{-}=a_A} = \frac{1}{\rho} h_x^2 h_y^4 (p_M (p_M + p_{\perp})^2 + p_{\perp}^3)$$

следует, что при $h_y^2 \rightarrow 0$ кривая $F_{1-}=0$ входит в точку D, касаясь кривой 2.

На фиг. 2 заштрихована область, в которой $d\lambda/d\rho < 0$.

Таким образом, в отличие от изотропной МГД [9] в реверс-МГД существует область, в которой профиль медленной волны опрокидывается на участке разрежения, что может приводить к возникновению скачка разрежения. Анализ сильных разрезов показывает, что в случае, когда параметры начального состояния лежат в заштрихованной области, возможны слабые скачки разрежения, удовлетворяющие как условиям эволюционности [10], так и условию возрастания энтропии [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Чу Г., Гольдбергер М., Лоу Ф. Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений // Пробл. современ. физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. № 7. С. 139–145.
2. Баранов В. Б. Исследование простых волн в плазме с анизотропным давлением // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 2. С. 6–13.
3. Агизер И. А., Половин Р. В., Цинцадзе Н. Л. Простые волны в приближении Чу, Гольдбергера и Лоу // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. Вып. 3. С. 756–759.
4. Kato Y., Tajiri M., Taniuti T. Propagation of hydromagnetic waves in collisionless plasma I // J. Phys. Soc. Japan. 1966. V. 21. № 4. P. 765–777.
5. Баранов В. Б., Краснобаев К. В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 336 с.
6. Сагдеев Р. Э. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20–80.
7. Шикин И. С. К теории волн в релятивистской магнитной гидродинамике Чу-Гольдбергера — Лоу // Физика плазмы. 1976. Т. 2. Вып. 1. С. 24–33.
8. Abraham Shr. Propagation of hydromagnetic waves through in anisotropic plasma // J. Plasma Phys. 1967. V. 1. Pt 3. P. 361–378.
9. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 247 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.IX.1987