

Фиг. 5

перед точкой присоединения линейны. В окрестности этих критических точек имеем

$$\frac{e}{b^2} = \frac{|x_* - x|}{\delta_0} \left(\frac{u_\infty}{u_m} \right)^2 \frac{1}{\gamma M_\infty^2 t} \frac{d(p/p_\infty)}{d(x/\delta_0)}$$

Здесь x_* — координата критической точки, $t = T_\infty/T_0$ — относительная температура. По шести точкам в области отрыва пограничного слоя $(e/b^2)_s = 4,52 \pm 0,79$. По двум точкам в области присоединения $(e/b^2)_r = 1,00 \pm 0,27$.

Таким образом, в областях отрыва и присоединения имеем $a_s = \operatorname{tg} \alpha_s = 0,10$, $(ae/b^2)_s = 0,46$, $a_r = \operatorname{tg} \alpha_r = 0,4$, $(ae/b^2)_r = 0,48$.

Установленный факт постоянства указанных величин во всех рассмотренных экспериментах подтверждает существование предположенной выше автомодельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогин Л. В. Плохо обтекаемые тела и их гидродинамические модели // Аннот. докл. 6-й Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Нац. ком-т СССР по теорет. и прикл. механике, 1986. С. 200.
2. Simpson R. L., Chew Y.-T., Shivaprasad B. G. The structure of a separating turbulent boundary layer. Pt 1. Mean flow and Reynolds stresses // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 23.
3. Etheridge D. W., Kemp P. H. Measurements of turbulent flow downstream of a rearward-facing step // J. Fluid Mech. 1978. V. 86. Pt 3. P. 545–566.
4. Good M. C., Joubert P. N. The form drag of two-dimensional bluff-plates immersed in turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. Pt 3. P. 547–582.
5. Sakamoto Hiroshi, Moriya Masaru, Arie Mikio. A study on the flow around bluff bodies immersed in turbulent boundary layers // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1976. V. 42. № 357. P. 1442–1450.
6. Settles G. S., Vas I. E., Bogdonoff S. M. Shock wave-turbulent boundary layer interaction at a high Reynolds number, including separation and flowfield measurements // AIAA Paper. 1976. № 164. 13 p.

Москва

Поступила в редакцию
17.XI.1986

УДК 533.6.011

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА ИЗ СОСУДА С ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

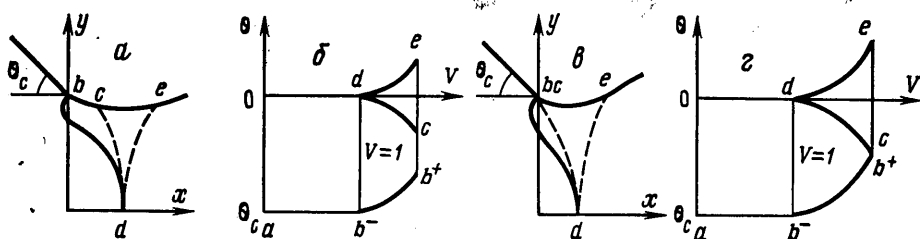
КОСОЛАПОВ Ю. С.

Рассмотрим классическую задачу о стационарном истечении идеального газа из бесконечного плоского сосуда с прямолинейной образующей стенки, составляющей с плоскостью симметрии потока угол θ_c . Задание θ_c , отношения давлений $\varepsilon_a = P_a/P_0$.

(P_0 — давление торможения газа в сосуде; P_a — давление в окружающем пространстве) и показателя адиабаты κ полностью определяет истечение газа из сосуда.

Основные результаты теоретического исследования истечения газа из плоского сосуда получены с помощью метода годографа скорости. В плоскости годографа различными режимам течения соответствуют следующие краевые задачи для уравнения Чаплыгина: задача Дирихле (D) — дозвуковому истечению ($\epsilon_a \geq \epsilon_*$, ϵ_* — критическое отношение давлений); обобщенная задача Трикоми (OT) — сверхзвуковому незапертому истечению ($\epsilon_* < \epsilon_a < \epsilon_*$), где ϵ_* — отношение давлений соответствующее запертию потока, и задача Трикоми (T) — для запертого ($\epsilon_a \leq \epsilon_*$) течения. Аналитическое решение задачи D получено в [1]. Задача OT решалась только численно [2, 3]. Для задачи T получены как аналитические [4–6], так и численные решения [2, 3] в широкой области θ_c .

Задачи о стационарных сверхзвуковых незапертых и запертых истечениях газа из плоских щелей и осесимметричных отверстий решались численно и непосредственно в физической плоскости [7–11]. В этом случае краевые задачи формули-



Фиг. 1

ровались для системы нестационарных уравнений Эйлера, а стационарные решения находились в процессе установления по времени методами Годунова [12] и Годунова — Колгана [13].

Влияние ϵ_a и κ на локальные и интегральные характеристики потоков при истечении газа из плоских щелей и осесимметричных отверстий с $\theta_c = 90^\circ$ изучалось в [8, 9]. (Заметим, что в [9] допущена неточность: зависимость (1.3) в действительности имеет вид $\mu(\kappa, \epsilon_a, \nu) = k(\epsilon_a)\kappa + b(\epsilon_a) + \nu b_1(\epsilon_a)$, а коэффициент $M_2 = -0,007$.)

Несмотря на сравнительно большое число полученных решений, систематическое исследование влияния θ_c на локальные и интегральные характеристики потоков при сверхзвуковом незапертом истечении газа из плоского сосуда не проводилось.

В настоящей работе получены численные решения задач о стационарном сверхзвуковом истечении газа из плоских сосудов с различными θ_c . Задачи ставились в плоскости годографа скорости и решались методом [14]. Проведено сравнение с результатами других авторов. Исследовано влияние θ_c и ϵ_a на локальные и интегральные характеристики потоков при $0 < \theta_c \leq 90^\circ$ и $\epsilon_* \leq \epsilon_a < \epsilon_*$.

1. Рассмотрим постановки задач о стационарном сверхзвуковом истечении идеального газа из плоского сосуда с прямолинейной образующей контура. На фиг. 1, а в физической плоскости (x, y — прямоугольные декартовы координаты) приведена схема сверхзвукового незапертого истечения газа. Здесь ось x совпадает с линией симметрии течения; b — выходная кромка сосуда; bd — звуковая линия; cd — предельная характеристика, отделяющая трансзвуковую область влияния bcd от течения правее cd , малые возмущения которого не оказывают влияния вверх по потоку; de — характеристика второго семейства, исходящая из точки d . Заданными величинами являются θ_c, ϵ_a и κ .

Отображение данной области на плоскость годографа (V, θ) ($V = |\mathbf{V}|/a_*$, где $|\mathbf{V}|$ — модуль вектора скорости — \mathbf{V} ; a_* — критическая скорость звука; θ — угол наклона вектора скорости к оси x) представлено на фиг. 1, б. Здесь b^-b^+ обозначена волна разрежения, соответствующая течению Прандтля — Майера в точке b физической плоскости. Остальные обозначения идентичны.

Схема сверхзвукового запертого течения приведена на фиг. 1, в, где обозначения аналогичны принятым на фиг. 1, а. Но здесь участок границы струи bc , возмущения с которого могли бы прийти на звуковую линию и оказать влияние вверх по потоку, вырождается в точку, совпадающую с кромкой сосуда b . Поэтому дальнейшее уменьшение ϵ_a (при $\epsilon_a \leq \epsilon_*$) не оказывает влияния вверх по течению от cd и поток оказывается заперт.

Отображение схемы течения 1, в на плоскость годографа представлено на фиг. 1, г.

Рассмотрим в плоскости годографа скорости математическую формулировку соответствующих задач. Уравнение, описывающее стационарное плоское безвихревое

течение идеального газа в переменных годографа, имеет вид

$$(1-M^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + V^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial V^2} + (1+M^2) V \frac{\partial \Psi}{\partial V} = 0 \quad (1.1)$$

где $M=|V|/a$ (a — местная скорость звука) — число Маха; Ψ — функция тока, определяемая соотношением

$$d\Psi = -\rho V \sin \theta dx + \rho V \cos \theta dy$$

ρ — плотность, отнесенная к критической плотности.

Незапертому сверхзвуковому течению соответствует задача OT для уравнения (1.1). В этом случае граничные условия следующие

$$od: \Psi=0; oa: \Psi=\theta/\theta_c; ab-b+: \Psi=1; b+c: \Psi=1$$

Здесь и далее Ψ отнесена к расходу.

Запертому сверхзвуковому течению соответствует задача T для уравнения (1.1). Граничные условия в задаче T имеют вид

$$od: \Psi=0; oa: \Psi=\theta/\theta_c; ab-b+: \Psi=1$$

По найденным в плоскости годографа решениям задач (т. е. по известной $\Psi(V, \theta)$) осуществляется возврат в физическую плоскость по формулам

$$x = \frac{1}{\rho V} \int_{-\theta_c}^{\theta} \left(V \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial V} - \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) d\theta$$

$$y = \frac{1}{\rho V} \int_{-\theta_c}^{\theta} \left(V \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial V} + \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) d\theta$$

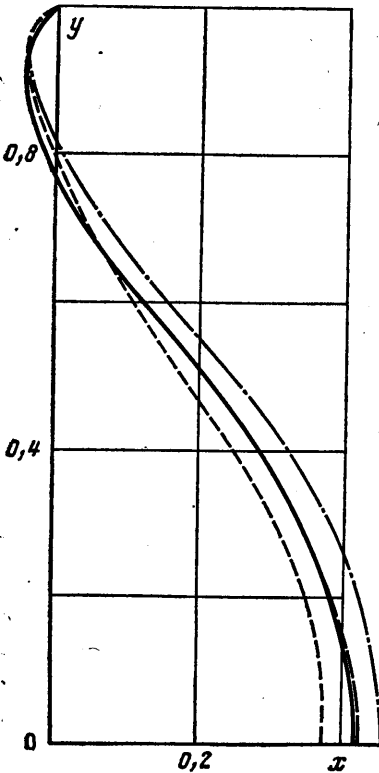
Здесь интегрирование проводится вдоль линий $V=\text{const}$.

Задачи OT и T решались численно методом [14]. В методе [14] решения задач ищутся с помощью трех различных разностных схем расчета Ψ в до-, транс- и сверх-

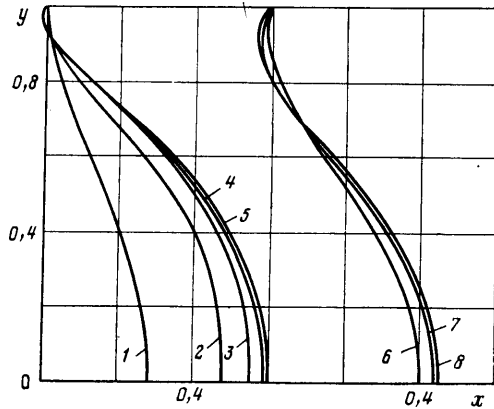
звуковых областях соответственно. Связь между решениями в до- и сверхзвуковой областях осуществляется посредством трансзвуковой схемы — схемы расчета Ψ на звуковой линии.

Система алгебраических уравнений, получающаяся в результате конечно-разностной аппроксимации уравнения (1.1), решалась методом последовательной верхней релаксации [15]. Подробности организации вычислительного процесса можно найти в [14].

В настоящей работе была проведена модификация метода [14], касающаяся вычисления Ψ на звуковой линии и в первых слоях ячеек сверхзвуковой области, которая



Фиг. 2



Фиг. 3

Таблица 1

| источник | $\theta_c^0=2$ | 4 | 6 | 15 | 30 | 45 | 60 | 90 |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| [6] | 0,998 0,998 | 0,995 0,995 | 0,992 0,992 | 0,976 0,976 | 0,947 0,947 | 0,920 0,919 | 0,897 0,894 | 0,857 0,8497 |

Таблица 2

| θ_c , град. | $\epsilon_a = 0,3827$ | 0,2991 | 0,2336 | 0,1808 | 0,1381 | 0,1037 | 0,0764 | 0,0552 | 0,0389 |
|--------------------|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 90 | 0,7993 | 0,8198 | 0,8317 | 0,8389 | 0,8437 | 0,8470 | 0,8488 | 0,8496 | 0,8497 |
| 80 | 0,8186 | 0,8379 | 0,8487 | 0,8551 | 0,8595 | 0,8620 | 0,8631 | 0,8633 | |
| 70 | 0,8397 | 0,8573 | 0,8670 | 0,8727 | 0,8762 | 0,8777 | 0,8779 | | |
| 60 | 0,8625 | 0,8783 | 0,8864 | 0,8913 | 0,8933 | 0,8937 | | | |
| 50 | 0,8869 | 0,9003 | 0,9070 | 0,9100 | 0,9105 | | | | |
| 40 | 0,9124 | 0,9230 | 0,9276 | 0,9284 | | | | | |
| 30 | 0,9385 | 0,9458 | 0,9472 | | | | | | |
| 20 | 0,9638 | 0,9666 | | | | | | | |
| 10 | 0,9856 | | | | | | | | |

позволяет получать численные решения со вторым порядком точности. Сходимость итерационного процесса контролировалась по невязке разностных уравнений. Так, при решении задачи Т для сосуда с $\theta_c=90^\circ$ на сетке, содержащей 1500 ячеек, до невязки 10^{-6} потребовалось 68 итераций. Соответствующее время счета на ЭВМ БЭСМ-6 составило 30 с.

2. Сравним результаты решения задачи Т, полученные в настоящей работе, с известными решениями [2, 4, 6, 10, 16]. (Здесь и в дальнейшем рассматривается газ с $\kappa=1,4$.) На фиг. 2 приведены звуковые линии, соответствующие запертому истечению газа из сосуда с $\theta_c=90^\circ$, полученные в настоящей работе на сетке 60×100 (сплошная линия), в [4, 16] (пунктирная линия), в [6] (штрихпунктирная линия) и в [10] (штриховая линия). (Здесь и на фиг. 3, 4 x и y отнесены к полуширине щели.) Звуковые линии, полученные в настоящей работе и в [10] (где решение находилось непосредственно в физической плоскости с помощью схемы Годунова — Колгана), практически совпадают. Вместе с тем звуковые линии из [4, 6] (где решения строились с помощью численного суммирования рядов, представляющих аналитическое решение задачи) заметно отличаются как друг от друга, так и от результатов [10] и настоящей работы. Коэффициент расхода μ , найденный в настоящей работе квадратичной экстраполяцией на нулевой размер ячейки (по результатам расчетов μ на разных сетках), оказался равным 0,8497. Соответствующие величины коэффициентов расхода, полученные в других работах равны: 0,85 [4]; 0,857 [6]; 0,853 [2]; 0,85 [9]; 0,8513 [10]. Коэффициенты расхода, полученные в [6] для запертых истечений газа из сосудов с различными θ_c и в настоящей работе, приведены в табл. 1. Соответствие результатов в целом хорошее, хотя с ростом θ_c наблюдается незначительное систематическое увеличение μ , полученных в [6], по сравнению с μ , вычисленными в настоящей работе.

3. Рассмотрим влияние угла наклона стенки сосуда на локальные и интегральные характеристики потоков при изменении θ_c и ϵ_a в диапазонах $0 < \theta_c \leq 90^\circ$ и $\epsilon_a \leq \epsilon_a < \epsilon_a$. Расчеты, выполненные в настоящей работе, показали, что при малых углах наклона стенки сосуда наблюдается сильное влияние θ_c на положение звуковых линий, которое с ростом θ_c ослабевает и при $\theta_c > 50^\circ$ становится незначительным. Некоторые из звуковых линий, полученные для различных θ_c и ϵ_a , приведены на фиг. 3, где кривыми 1—5 представлены звуковые линии, полученные в расчетах истечения газа из сосудов с $\theta_c=10, 30, 50, 70, 90^\circ$ при $\epsilon_a=0,3827$, а кривыми 6—8 — аналогичные результаты для сосудов с $\theta_c=50, 70, 90^\circ$ при $\epsilon_a=0,1381$. Коэффициенты расхода, вычисленные для разных θ_c и ϵ_a , сведены в табл. 2, из которой видно, что с увеличением ϵ_a влияние θ_c на μ возрастает. Это в целом незначительное влияние при малых θ_c оказывается несколько большим.

Автор благодарит А. Н. Крайко за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях // Полн. собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 2. С. 19—137.
2. Benson R. S., Pool D. E. Compressible flow through a two-dimensional slit // Intern. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. № 5. P. 315—336.

3. *Benson R. S., Pool D. E.* The compressible flow discharge coefficients for a two-dimensional slit // Intern. J. Mech. Sci. 1965. V. 7. № 5. P. 337–353.
4. *Франкль Ф. И.* Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 3. С. 381–384.
5. *Асланов С. К.* Сверхзвуковое истечение газа из несимметричного сосуда с плоскими наклонными стенками при максимальном расходе // Тр. Куйбышев. авиац. ин-та. 1961. Вып. 12. С. 237–241.
6. *Блюмкина И. А., Цигелов И. М.* Расчет истечения симметричной струи газа при максимальном расходе // Вестн. ЛГУ. 1978. № 13. Вып. 3. С. 79–85.
7. *Косолапов Ю. С., Салтанов Г. А., Сивобород В. А., Филиппов Г. А.* Численное решение задачи об истечении газа из плоских и осесимметричных сосудов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 174–176.
8. *Филиппов Г. А., Салтанов Г. А., Сивобород В. А., Косолапов Ю. С.* Истечение газов с различными показателями адиабаты // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1982. № 1. С. 121–126.
9. *Косолапов Ю. С., Сивобород В. А.* Расчетно-теоретическое исследование истечения газа из плоских щелей и осесимметричных отверстий // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 109–115.
10. *Крайко А. Н., Туляева Н. И., Щербаков С. А.* Метод расчета течений идеального газа в плоских и осесимметричных соплах с изломами контура // Журн. вычисл. математики и мат. физики 1986. Т. 26. № 11. С. 1679–1694.
11. *Тагиров Р. К.* Теоретическое исследование течения идеального газа в сужающихся соплах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 198–202.
12. *Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 6. С. 1020–1050.
13. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
14. *Fenain M., Dutouquet L., Salignac J.-L.* Calcul des performances d'une tuyere propulsive convergente: Comparaison avec l'expérience // J. Rech. Aéropat., 1974. № 5. P. 261–275.
15. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
16. *Камзолов В. И., Пирумов У. Г.* Расчетное исследование сверхзвуковой струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками // ПМТФ. 1967. № 2. С. 117–122.

Москва

Поступила в редакцию
12.XII.1986

УДК 533.6.011.72:537.84

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

ЗАХАРОВ В. Ю., ШИКИН И. С.

Изучаются быстрая и медленная простые волны в рамках анизотропной магнитной гидродинамики Чу, Голдбергера, Лоу [1]. В [2] были построены поля интегральных кривых для быстрой и медленной волн, в двух частных случаях доказано, что такие волны опрокидываются на участке сжатия. Возможность опрокидывания медленной волны на участке разрежения была отмечена в [3]. Однако, как показано в [2, 4], в [3] были неверно выписаны общие соотношения в простых волнах.

В настоящей работе определен характер изменения продольного и поперечного давлений плазмы, полностью решен вопрос об опрокидывании быстрой и медленной волн. Найдены условия, при которых медленная волна опрокидывается на участке разрежения. Быстрая волна всегда опрокидывается на участке сжатия.

1. Соотношения в быстрой и медленной простых волнах. Изучаются быстрая и медленная простые волны, распространяющиеся в анизотропной плазме, в рамках магнитной гидродинамики Чу, Голдбергера, Лоу [1–4]. Характеристическое уравнение для фазовых скоростей быстрой (a_+) и медленной (a_-) волн [2, 4] можно привести к виду

$$A_{+,-}G_{+,-} = Cp_{\perp}h_y^2 \quad (1.1)$$

$$A_{+,-} \rightarrow \rho a_{+,-}^2 - p_{\perp} h_y^2 - 3p_{\parallel} h_x^2, \quad G_{+,-} = \rho(a_{+,-}^2 - a_{A1}^2) + p_{\perp} h_y^2, \quad S = p_M - h_x^2(4p_{\parallel} - p_{\perp})$$

$$\rho a_{A1}^2 = \rho a_A^2 + h_y^2(p_M + p_{\perp}), \quad \rho a_A^2 = h_x^2(p_M - p_{\parallel}), \quad p_M = \frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp}, \quad h = \frac{B}{B}$$