

жигчен применявшемуся в [7]. Распределение осредненного значения продольной составляющей скорости в начальном сечении смесительной камеры взято из опытов. Начальное значение коэффициента турбулентной вязкости, связанное с пограничными слоями на разделительной кромке, определялось по измеренным значениям толщины вытеснения,  $v_{i \max}/U_1=0,045$  мм. Проводились расчеты, в которых учитывалось только начальное значение  $v_i$  в пограничных слоях (кривая 4 на фиг. 2), а также расчеты, в которых учитывался коэффициент турбулентной вязкости в смешивающихся потоках (кривая 5).

Сравнение результатов расчетов и экспериментальных данных (на фиг. 2 приведены данные о толщине слоя смешения при  $m=0,46$ ) показывает, что если турбулизация смешивающихся потоков характеризуется умеренной интенсивностью ( $\approx 6\%$ ) и большими масштабами, то при выполнении условия  $b/L_u < 1$  воздействие внешней турбулентности на осредненные параметры в слое смешения слабое. Формальный учет коэффициентов переноса, обусловленных внешней турбулентностью, в рамках гипотезы Буссинеска приводит к сильному расхождению расчета с экспериментом. В то же время для расчета до удалений от кромки, при которых  $b < L_u$ , допустимо использовать обычную однопараметрическую модель турбулентности [1], учитывая только начальное значение  $v_i$ , обусловленное пограничными слоями на входе. Такой расчет (кривая 4 на фиг. 2) удовлетворительно согласуется с опытными данными. С ростом отношения  $b/L_u$  начинается ускоренное нарастание толщины слоя, а ее значения, по-видимому, должны приближаться к зависимости, соответствующей кривой 5 на фиг. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.* Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомоделности // М.: Машиностроение. 1975. 94 с.
2. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.* Неавтомоделные турбулентные струи // Турбулентные течения. М.: Наука, 1977. С. 69–79.
3. *Гиневский А. С.* Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969. 397 с.
4. *Груздев В. Н., Виноградов Ю. В., Постнов В. Ф., Талантов А. В.* Влияние начальной турбулентности и соотношения скоростей на смешение спутных плоских изотермических струй в начальном участке // Теория и практика сжигания газа. Л.: Недра, 1975. Т. 6. С. 5–9.
5. *Белов И. В., Багаутдинов З. С.* Исследование влияния начальной турбулентности и отсоса пристенного пограничного слоя на ширину зоны смешения плоскопараллельных струй // Турбулентные струйные течения. Таллин: Изд-во АН СССР. Ч. 2. 1982. С. 14–21.
6. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Турбулентное смешение газовых струй. М.: Наука, 1974. 272 с.
7. *Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Расчет турбулентного диффузионного факела горения с учетом пульсаций концентрации и архимедовых сил // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 30–40.

Москва

Поступила в редакцию  
18.VIII.1986

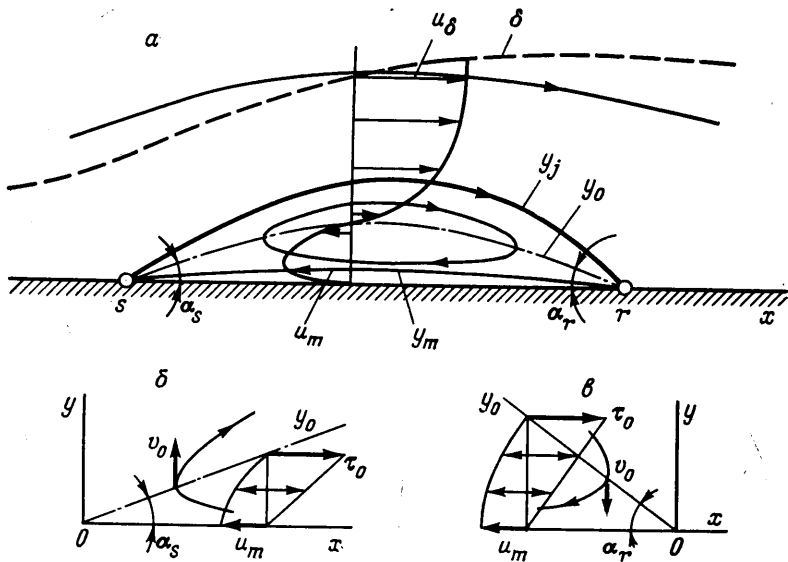
УДК 532.526

### АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ВОЗВРАТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ОБЛАСТИ ОТРЫВА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

ГОГИШ Л. В.

С использованием уравнения импульсов Кармана и простейших соображений о подобии профилей турбулентных касательных напряжений построено автомоделное возвратное течение несжимаемой жидкости, которое в зависимости от значений входящих в него эмпирических постоянных может реализоваться либо за точкой отрыва турбулентного пограничного слоя, либо перед точкой его присоединения. Для определения эмпирических постоянных использовано несколько независимых экспериментальных работ по турбулентным отрывным течениям жидкости и газа при до- и сверхзвуковых скоростях.

На фиг. 1, а показана условная схема осредненного отрывного течения в пограничном слое между критическими точками его отрыва  $s$  и присоединения  $r$ . Здесь  $\delta$  — граница пограничного слоя,  $y_j$  — линия потока постоянной массы,  $y_0$  — линия нулевых значений продольной скорости ( $u=0$ ),  $y_m$  — линия максимальных значений возвратной скорости  $u_m < 0$ . В турбулентном отрывном течении толщина возвратного пограничного слоя  $y_m$  и величина касательного напряжения на его внешней



Фиг. 1

границе  $\tau_m$  существенно меньше поперечного размера области возвратного течения:  $u_c$  и касательного напряжения на этой линии  $\tau_0$ , величина которого совместно с продольным градиентом давления  $\partial p/\partial x > 0$  определяет характерные параметры возвратного течения  $u_m$ ,  $y_0$  и  $v_0$ .

В связи с этим ниже рассматривается возвратное турбулентное течение в тонком слое смешения вдоль оси симметрии или стенки без трения, ограниченное линией нулевых продольных скоростей  $y_0(x)$ , на которой заданы продольный градиент давления  $\partial p/\partial x = p'(x) > 0$  и касательное напряжение  $\tau(x)$  (Фиг. 1, б, в) [1].

В начале координат  $x=0$  расположена критическая точка, где  $\tau_0=0$  и  $y_0=0$ . Течение при  $x > 0$  (Фиг. 1, б) соответствует отрыву пограничного слоя, где  $dy_0/dx > 0$ ,  $u_m < 0$ ,  $v_0 > 0$ ; течение при  $x < 0$  (Фиг. 1, в) соответствует присоединению пограничного слоя, где  $dy_0/dx < 0$ ,  $u_m < 0$ ,  $v_0 < 0$ .

Подчеркнем существенный характер принятого предположения о пренебрежении возвратным пограничным слоем в турбулентном отрывном течении, которому соответствует некоторая модель рейнольдсовых напряжений. В ламинарном отрывном течении это обстоятельство не имеет места и поэтому область применимости принятой схемы течения и полученных ниже результатов ограничена условиями развитого турбулентного отрыва.

Вследствие малости поперечного размера слоя  $y_0/\delta \ll 1$  и величины возвратной скорости  $|u_m|/u_\infty \ll 1$  плотность газа и давление поперек слоя можно считать постоянными:  $\rho = \text{const}$ ,  $\partial p/\partial y = 0$ . Касательное напряжение из соображений размерности выражается в виде  $\tau_0 = k\rho u_m^2$ ,  $k = \text{const}$ .

Из уравнений движения плоского турбулентного слоя смешения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

следуют интегральные уравнения расхода и импульса

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_0} \rho u \, dy = -\rho v_0, \quad \frac{d}{dx} \int_0^{y_0} \rho u^2 \, dy + y_0 \frac{dp}{dx} - \tau_0 = 0$$

которые в предположении подобия профиля касательных напряжений и соответственно профиля продольных скоростей приводятся к виду

$$J_1 \frac{d}{dx} (u_m y_0) + v_0 = 0 \quad (1)$$

$$J_2 \frac{d}{dx} (u_m^2 y_0) + \frac{y_0}{\rho} \frac{dp}{dx} - k u_m^2 = 0 \quad (2)$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\rho u}{\rho u_m} d\eta, \quad J_2 = \int_0^1 \frac{\rho u^2}{\rho u_m^2} d\eta$$

Для линейного профиля касательных напряжений  $\tau/\tau_0 = \eta$  и соответственно параболического профиля продольной скорости  $u/u_m = 1 - \eta^2$ ,  $\eta = y/y_0$  имеем  $J_1 = 2/3$  и  $J_2 = 8/15$ .

Поскольку в рассматриваемом течении отсутствует характерный размер, то, полагая возвратное течение вблизи начала координат  $x=0$  автомодельным, примем в соответствии со схемой течения на фиг. 1, б, в при отрыве ( $x > 0$ )

$$y_0 = a_s x^\alpha, \quad u_m = -b_s x^\beta, \quad v_0 = c_s x^\gamma, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = e_s x^\varepsilon \quad (3)$$

и при присоединении ( $x < 0$ )

$$y_0 = a_r (-x)^\alpha, \quad u_m = -b_r (-x)^\beta, \quad v_0 = -c_r (-x)^\gamma, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = e_r (-x)^\varepsilon \quad (4)$$

Подставляя выражения (3) или (4) в (1) и (2), получим три уравнения для четырех показателей степени

$$\alpha + \beta - 1 = \gamma, \quad \alpha = 2\beta - 1 = \varepsilon + \alpha = 2\beta$$

из которых следует, что

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = (\varepsilon + 1)/2 \quad (5)$$

Таким образом, в автомодельном течении граница зоны обратных токов прямолинейна:  $y_0/x = \pm a = \text{const}$  (или угол раствора зоны обратных токов постоянен), а отношение скоростей  $v_0/u_m = \pm c/b$  и безразмерный градиент давлений  $(y_0/\rho u_m^2) dp/dx = \pm ae/b^2$  постоянны (равновесное течение).

Указанные три постоянные  $a$ ,  $c/b$  и  $ae/b^2$  связаны двумя соотношениями, которые следуют из (1) и (2)

$$c/b - J_1 a (\alpha + \beta) = 0 \quad (6)$$

$$\pm J_2 a (\alpha + 2\beta) + ae/b^2 - k = 0 \quad (7)$$

Верхний знак в (7) относится к отрыву, нижний — к присоединению. Из условия регулярности распределения давления вблизи критической точки принимается  $\varepsilon = 0$ , что соответствует наблюдаемому линейному росту давления за точкой отрыва и перед точкой присоединения. Тогда получим окончательно с учетом значений  $J_1$  и  $J_2$

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 1/2, \quad \varepsilon = 0 \quad (8)$$

$$c/b - a = 0 \quad (9)$$

$$\pm 8/15 a + ae/b^2 - k/2 = 0 \quad (10)$$

Численные значения коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $e$  различны для отрыва и присоединения, их приходится определять из экспериментов.

Ниже рассматриваются пять экспериментальных работ, содержащих наиболее полные результаты экспериментального исследования различных турбулентных отрывных течений, в том числе построенные по результатам измерений их авторов осредненные картины линий токов в области отрыва (они воспроизводятся ниже для наглядности).

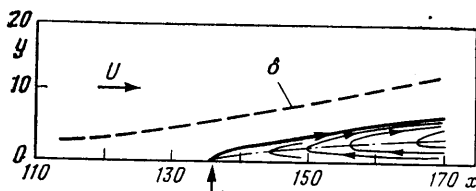
В [2] приведены результаты исследования отрыва плоского турбулентного пограничного слоя от гладкой поверхности при малых дозвуковых скоростях потока  $U_\infty = 15$  м/с,  $Re_{s^{**}} = 2 \cdot 10^4$ . Параметры возвратного течения за точкой отрыва измерены в четырех сечениях. Отметим, в частности, что приведенные в [2, (фиг. 9)] измерения профиля скорости возвратного течения в области между линиями нулевых и максимальных возвратных скоростей удовлетворительно описываются параболой. На фиг. 2 воспроизведена картина линий токов (по фиг. 8 из [2]), на которой добавлена лишь штрихпунктирная линия  $y_0$  нулевых скоростей. Средний угол ее наклона  $\theta_1$  составляет  $7.2^\circ \pm 1^\circ$ .

Определенный по графикам фиг. 3 из [2] средний угол  $\theta_2$  наклона линии  $y_m$  максимальных возвратных скоростей составляет  $1.0^\circ \pm 0.5^\circ$ . Следовательно,  $\alpha_s = \arctg(\theta_1 - \theta_2) = 6.1^\circ \pm 1.1^\circ$ . Соответствующее среднее значение

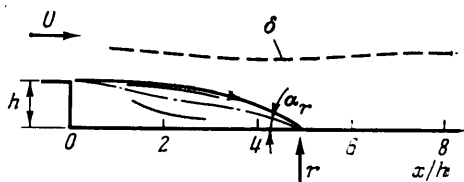
$$\left( \frac{e}{b^2} \right)_s = \frac{U_\infty^2}{2} \frac{dC_p}{dx} \frac{x - x_s}{u_m^2}$$

определенное из [2 (фиг. 3, табл. 2)] составляет  $4.6 \pm 1.1$ .

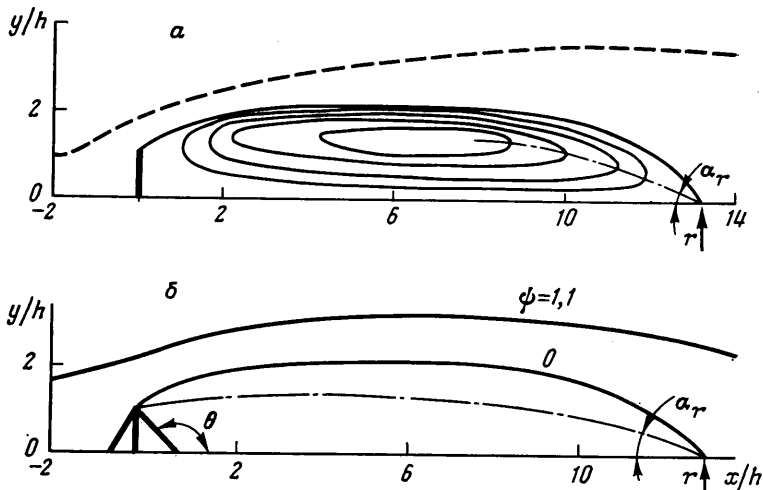
В [3] приведены результаты экспериментального исследования турбулентного отрывного течения за плоским уступом в гидротрубе. Параметры возвратного течения вблизи точки присоединения измерены в двух сечениях.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 воспроизведена по фиг. 12 из [3] картина линий тока. Судя по рисунку, угол наклона линии нулевых скоростей в точке присоединения  $\alpha_r$  составляет  $22^\circ$ . По двум рассчитанным нами значениям  $(e/b^2)_r = 1,38 \pm 0,06$ .

Работа [4] содержит результаты экспериментального исследования турбулентного отрывного течения за пластинкой, расположенной на стенке нормально к потоку при малых дозвуковых скоростях.

На фиг. 4, а воспроизведена по [4, (фиг. 16)] картина линий тока. Судя по ней, угол наклона  $\alpha_r$  проведенной нами линии нулевых скоростей в точке присоединения составляет  $22,5^\circ$ . Параметры возвратного течения вблизи точки присоединения измерены в двух сечениях. Соответствующая величина  $(e/b^2)_r = 1,21 \pm 0,05$ .

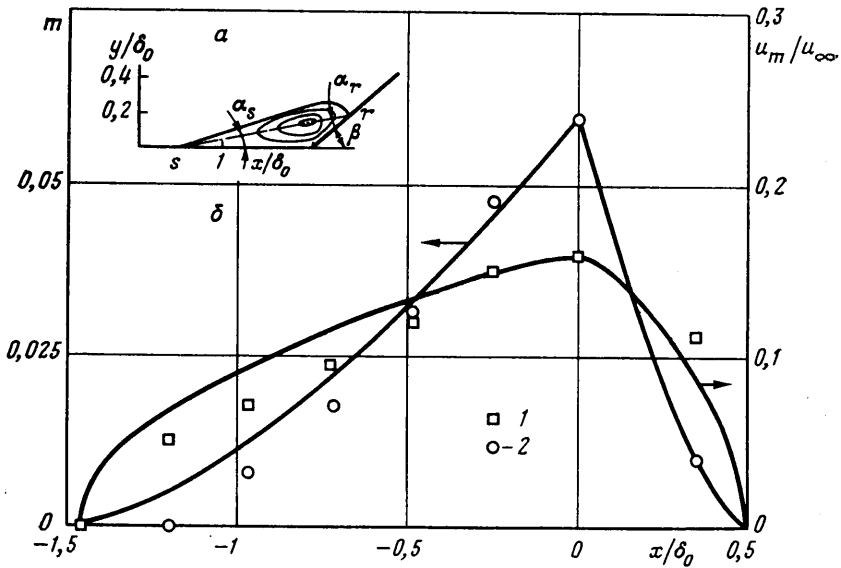
В [5] кратко изложены результаты экспериментального исследования турбулентного отрывного течения за пластинкой, расположенной на стенке под различными углами наклона  $\theta = 60-135^\circ$  при малых дозвуковых скоростях потока.

На фиг. 4, б приведена совмещенная картина обтекания, содержащая линию тока постоянной массы и линию нулевых скоростей, построенная по трем картинам линий тока для каждого угла наклона пластинки путем совмещения их относительно кромки пластинки. Длина зоны отрыва и конфигурация характерных линий течения вблизи точки присоединения в этом случае практически совпадают. Угол наклона линии нулевых скоростей в точке присоединения  $\alpha_r = 22,5^\circ$ .

В заключение рассмотрим экспериментальные данные [6], относящиеся к сверхзвуковому турбулентному отрывному обтеканию угла сжатия  $\beta = 24^\circ$  при числах  $M_\infty = 2,85$  и  $Re_{\delta_0} = 1,33 \cdot 10^6$ . На схеме фиг. 5, а воспроизведена картина линий тока, приведенная на фиг. 15 в [6]. Измеренные значения углов линии нулевых скоростей в точке отрыва  $\alpha_s = 5,5^\circ$  и в точке присоединения  $\alpha_r = 21^\circ$ . На графике фиг. 5, б показано сравнение экспериментальных значений максимальной возвратной скорости  $u_m/u_\infty$  в области отрыва 1 и расхода возвратного течения 2

$$m = \int_0^{y_0} \rho u \, dy$$

заимствованных из [6 (фиг. 14)], со степенными зависимостями соответственно  $(x/\delta_0)^{1/2}$  и  $(x/\delta_0)^{3/2}$ , проведенными через экспериментальные точки, расположенные в вершине угла сжатия  $x/\delta_0 = 0$ . Несмотря на то, что влиянием сжимаемости газа на возвратное течение пренебрегается, имеет место удовлетворительное совпадение с экспериментом. Судя по фиг. 4 из [6], распределения давления за точкой отрыва и



Фиг. 5

перед точкой присоединения линейны. В окрестности этих критических точек имеем

$$\frac{e}{b^2} = \frac{|x_* - x|}{\delta_0} \left( \frac{u_\infty}{u_m} \right)^2 \frac{1}{\gamma M_\infty^2 t} \frac{d(p/p_\infty)}{d(x/\delta_0)}$$

Здесь  $x_*$  — координата критической точки,  $t = T_\infty/T_0$  — относительная температура. По шести точкам в области отрыва пограничного слоя  $(e/b^2)_s = 4,52 \pm 0,79$ . По двум точкам в области присоединения  $(e/b^2)_r = 1,00 \pm 0,27$ .

Таким образом, в областях отрыва и присоединения имеем  $a_s = \operatorname{tg} \alpha_s = 0,10$ ,  $(ae/b^2)_s = 0,46$ ,  $a_r = \operatorname{tg} \alpha_r = 0,4$ ,  $(ae/b^2)_r = 0,48$ .

Установленный факт постоянства указанных величин во всех рассмотренных экспериментах подтверждает существование предположенной выше автомодельности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гогош Л. В. Плохо обтекаемые тела и их гидродинамические модели // Аннот. докл. 6-й Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Нац. ком-т СССР по теорет. и прикл. механике, 1986. С. 200.
2. Simpson R. L., Chew Y.-T., Shivaprasad B. G. The structure of a separating turbulent boundary layer. Pt 1. Mean flow and Reynolds stresses // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 23.
3. Etheridge D. W., Kemp P. H. Measurements of turbulent flow downstream of a rearward-facing step // J. Fluid Mech. 1978. V. 86. Pt 3. P. 545–566.
4. Good M. C., Joubert P. N. The form drag of two-dimensional bluff-plates immersed in turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. Pt 3. P. 547–582.
5. Sakamoto Hiroshi, Moriya Masaru, Arie Mikio. A study on the flow around bluff bodies immersed in turbulent boundary layers // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1976. V. 42. № 357. P. 1442–1450.
6. Settles G. S., Vas I. E., Bogdonoff S. M. Shock wave-turbulent boundary layer interaction at a high Reynolds number, including separation and flowfield measurements // AIAA Paper. 1976. № 164. 13 p.

Москва

Поступила в редакцию  
17.XI.1986

УДК 533.6.011

#### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА ИЗ СОСУДА С ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

КОСОЛАПОВ Ю. С.

Рассмотрим классическую задачу о стационарном истечении идеального газа из бесконечного плоского сосуда с прямолинейной образующей стенки, составляющей с плоскостью симметрии потока угол  $\theta_c$ . Задание  $\theta_c$ , отношения давлений  $\varepsilon_a = P_a/P_0$ .