

УДК 533.695.5

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДОЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ДВУХ ПЛОСКИХ
ДВИЖУЩИХСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДРУГ ДРУГА РЕШЕТОК
ТОНКИХ СЛАБОНАГРУЖЕННЫХ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ПРОФИЛЕЙ**

БУТЕНКО К. К., ОСИПОВ А. А.

При исследовании флаттера турбомашин необходимо знать, какое влияние на нестационарные аэродинамические характеристики решетки колеблющихся профилей оказывает взаимодействие решеток в ступени турбомашин. Какие-либо значительные теоретические результаты, касающиеся данного вопроса, в литературе отсутствуют, что связано со сложностью аналитического описания колебаний потока в системе движущихся относительно друг друга решеток. В случае, когда профили решеток не колеблются, задача аэродинамического взаимодействия решеток в рамках линейной теории малых возмущений была решена в [1]. В настоящей работе метод, развитый в [1], обобщен на случай решеток колеблющихся профилей. Как и в [1], рассмотрены решетки тонких слабонагруженных профилей. С помощью метода дипольных особенностей [2] задача сведена к бесконечной системе сингулярных интегральных уравнений, приближенное решение которой для конечного числа учитываемых гармоник находится численно. Как показывают результаты проведенных расчетов, взаимодействие решеток может оказывать значительное влияние на нестационарные нагрузки, действующие на колеблющиеся профили.

1. Рассмотрим обтекание дозвуковым потоком идеального газа двух движущихся относительно друг друга плоских решеток тонких слабонагруженных профилей, совершающих колебания малой амплитуды около своего невозмущенного положения. Нестационарные возмущения потока газа, вызванные колебаниями профилей, в линейном приближении могут быть найдены без учета малой телесности и слабой нагруженности профилей, не связанной с их колебаниями. Таким образом, в данном приближении задача сводится к рассмотрению колеблющихся плоских решеток, профили которых представляют собой отрезки прямых линий, направленных вдоль линий тока однородного невозмущенного течения в системе координат, где эти профили неподвижны. Схема течения показана на фиг. 1 в системе координат, связанной с первой решеткой, расположенной выше по потоку. Через V обозначена скорость набегающего потока, а через W — скорость перемещения второй решетки относительно первой. Параметрам в системе координат, связанной с решетками 1 и 2, далее будем приписывать нижние индексы 1 и 2.

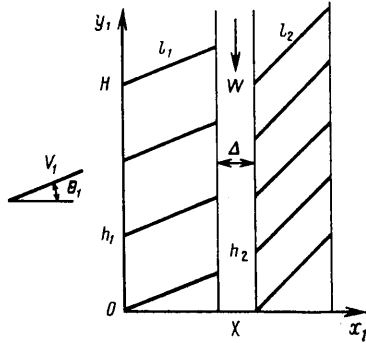
Пусть профили первой решетки совершают гармонические по времени t колебания частоты ω , одинаковой амплитуды и с постоянным сдвигом по фазе σ между соседними профилями, а профили второй решетки фиксированы. Заметим, что если колеблются профили обеих решеток, то в рамках линейного анализа полное решение задачи может быть представлено как суперпозиция двух решений, соответствующих колебаниям профилей только первой и второй решеток. В отличие от случая стационарной деформации профилей [1] рассматриваемое нестационарное течение характеризуется двумя различными масштабами времени: периодом колебаний профилей первой решетки $T=2\pi/\omega$ и периодом смещения второй решетки относительно первой (или первой решетки относительно второй) на один шаг h_2 (или h_1), равным $T_1=h_2/W$ (или $T_2=h_1/W$) в системе координат, связанной с первой (или второй) решеткой. Наличие двух, во-

обще говоря, не кратных друг другу масштабов времени не позволяет искать решение с помощью простого разложения в ряд Фурье по времени, так как течение в целом не периодическое. Однако с помощью простого преобразования переменных задачу можно свести к периодической.

Выберем в качестве начального момента времени момент, когда совпадают ординаты передних кромок каких-либо профилей первой и второй решеток. Обозначим указанные профили номером $m=0$. Пусть колебания данного профиля первой решетки описываются смещением точек его поверхности по нормали к ней согласно формуле

$$Y_{10}'(\xi_1, t) = Y_1(\xi_1) \exp[i(\varphi_0 - \omega t)]$$

Здесь Y_1 — амплитуда смещения, φ_0 — начальная фаза колебаний, а ξ_1 — координата вдоль линии невозмущенного положения профиля; нижний



Фиг. 1

индекс 1 означает параметры первой решетки, а 0 — параметры профиля с $m=0$.

Определим функцию $Y_1'(\xi_1, y_1, t)$ во всем поле течения так, чтобы на линиях $y_1 = x_1 \operatorname{tg} \theta_1 + mh_1$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, она описывала смещение m -го профиля. Тогда

$$Y_1'(\xi_1, y_1, t) = Y_1(\xi_1) \exp \left\{ i \left[\frac{\sigma}{h_1} (y_1 - \xi_1 \sin \theta_1) - \omega t + \varphi_0 \right] \right\}$$

Здесь x_1, y_1 — координаты соответственно по нормали к фронту решетки и вдоль фронта в системе координат, связанной с первой решеткой, а θ_1 — угол между вектором скорости невозмущенного потока газа и осью x_1 в этой системе координат.

Нормальная к линии невозмущенного положения профиля компонента скорости газа, индуцируемая таким смещением профиля на этой линии, в линейном приближении определяется равенством

$$w_1' = \frac{\partial Y_1'}{\partial t} + V_1 \left(\frac{\partial Y_1'}{\partial \xi_1} \right)_{\eta_1} = w_1 \exp \left[i \left(\frac{\sigma}{h_1} y_1 - \omega t + \varphi_0 \right) \right] \quad (1.1)$$

$$w_1 = \left(-i\omega Y_1 + V_1 \frac{dY_1}{d\xi_1} \right) \exp \left(-i \frac{\sigma}{h_1} \xi_1 \sin \theta_1 \right)$$

Здесь $(\partial Y_1' / \partial \xi_1)_{\eta_1}$ означает частную производную вдоль невозмущенной поверхности профиля, что отвечает фиксированному значению координаты η_1 , нормальной к указанной поверхности.

Представим теперь возмущения всех параметров течения, в частности

давления, в виде

$$p'_v(x_v, y_v, t) = p_v(x_v, y_v, t) \exp \left[i \left(\frac{\sigma}{h_1} y_1 - \omega t + \varphi_0 \right) \right] \quad (v=1, 2) \quad (1.2)$$

Тогда граничные условия непротекания на профилях, необходимые для формулировки краевой задачи для $p_v(x_v, y_v, t)$, сводятся к соотношениям

$$w_1(\xi_1, y_{1m}, t) = \left(-i\omega Y_1 + V_1 \frac{dY_1}{d\xi_1} \right) \exp \left(-i \frac{\sigma}{h_1} \xi_1 \sin \theta_1 \right) \quad (1.3)$$

$$w_2(\xi_2, y_{2m}, t) = 0, \quad y_{vm} = x_v \operatorname{tg} \theta_v + mh_v$$

После выделения в искомом решении задачи экспоненциального множителя в виде (1.2) зависимость функции $p_v(x_v, y_v, t)$ от времени связана лишь с перемещением решеток относительно друг друга и, следовательно, является периодической с периодом T_v . Таким образом, краевая задача для периодической функции $p_v(x_v, y_v, t)$ формулируется как задача о стационарном возмущении на профилях нормальной компоненты скорости газа, не зависящем от номера профиля и определяемом соотношениями (1.3). Так как такой случай уже был рассмотрен в [1], то для p_v можно записать разложение

$$p_v = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{vjn} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{H} [(nN_{1,2} \pm jN_{2,1}) y_v - jN_{2,1} W t] \right\} \quad (1.4)$$

После того как найдено представление (1.4) для p_v , можно перейти к полной величине возмущения давления p'_v , для которой получим выражение

$$p'_v = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{vjn} \exp [i (\beta'_{vjn} y_v - \omega'_{vj} t + \varphi_0)] \quad (1.5)$$

$$\beta'_{vjn} = \beta_{vjn} + \frac{\sigma}{h_1}, \quad \beta_{vjn} = \frac{2\pi}{H} (nN_{1,2} \pm jN_{2,1})$$

$$\omega'_{1j} = \omega_{1j} + \omega, \quad \omega'_{2j} = \omega_{2j} - \frac{\sigma}{h_1} W + \omega$$

$$\omega_{vj} = \frac{2\pi}{H} j W N_{2,1}$$

В формулах (1.4), (1.5) $N_{1,2}$ — число профилей первой или второй решетки, соответствующее общему периоду H колебаний вдоль координаты y . Знак плюс (минус) и первое (второе) значение индекса у N соответствуют $v=1$ ($v=2$). Здесь и далее все параметры размерности длины отнесены к длине l_1 профиля первой решетки, скорости — к скорости невозмущенного потока V_1 относительно первой решетки, времени — к l_1/V_1 .

Выражение (1.5) по форме совпадает с соответствующим выражением, полученным в [1]. Отличие состоит лишь в том, что величины β_{vjn} и ω_{vj} в [1] заменены в (1.5) на β'_{vjn} и ω'_{vj} , содержащие дополнительные слагаемые с σ и ω . Соответствующий сдвиг в частотах ω'_{vj} приводит к тому, что нарушается кратность частот с различными значениями индекса j и зависимость возмущений параметров течения от времени перестает быть периодической. Заметим, что рассмотренный в [1] случай фиксированных тонких слабонагруженных профилей является частным случаем ($\sigma=0$, $\omega=0$) рассматриваемой задачи.

Следуя методу дипольных особенностей (см. [1, 2]), воздействие каждого элементарного участка пластины на поток можно представить как

суперпозицию диполей, интенсивности которых колеблются с различными частотами ω_{vj} и неизвестными амплитудами Γ_{vj} , где $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Суммируя вклад от всех диполей, распределенных вдоль профилей той и другой решетки, так же как и в [1], можно получить выражения для скоростей, индуцируемых в любой точке потока и, в частности, на самих профилях решеток. Интегральные уравнения для определения неизвестных распределений интенсивностей диполей $\Gamma_{vj}(\xi_v)$ получаются затем из условия непротекания на профилях каждой из решеток. Условия непротекания дают два интегральных уравнения, каждое из которых распадается на бесконечную систему интегральных уравнений, соответствующих различным j -м гармоникам индуцированной на профилях скорости. В итоге получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\int_0^1 K_{1j}(\xi - \xi_0) \Gamma_{1j}(\xi_0) d\xi_0 + \int_0^{l_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{2nj}(\xi, \xi_0) \Gamma_{2n}(\xi_0) d\xi_0 = \\ = \delta_{j0} \left(-i\omega Y_1 + \frac{dY_1}{d\xi} \right) \quad (1.6)$$

$$\int_0^{l_2} K_{2j}(\xi - \xi_0) \Gamma_{2j}(\xi_0) d\xi_0 + \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{1n-j}(\xi, \xi_0) \Gamma_{1n}(\xi_0) d\xi_0 = 0, \\ j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь δ_{j0} — символ Кронекера. Ядра K_{vj} и Q_{vjn} совпадают с ядрами соответствующих уравнений в [1], если в последних величины ω_{vj} и β_{vjn} заменить на ω'_{vj} и β'_{vjn} . Как и в [1], ядра K_{vj} содержат особенность Коши и логарифмическую особенность. Остаются в силе и обсуждавшиеся в [1] особенности решения, связанные с воздействием на вторую решетку нестационарных вихревых следов, сходящихся с задних кромок передней решетки, а также с влиянием сингулярного поведения возмущений вблизи передних кромок задней решетки на условия обтекания задних кромок передней решетки.

Нестационарная аэродинамическая нагрузка $\Delta p_v(\xi, t)$ на профилях с $m=0$ определяется по формуле

$$\Delta p_v(\xi, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma_{vj}(\xi) \exp[i(\varphi_0 - \omega_{vj}'t)]$$

Физическая величина нагрузки описывается выражением

$$\text{Re}(\Delta p_v) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\text{Re}(\Gamma_{vj}) \cos(\omega_{vj}'t - \varphi_0) + \text{Im}(\Gamma_{vj}) \sin(\omega_{vj}'t - \varphi_0)]$$

Поскольку частоты ω_{vj}' не кратны по индексу j , то как уже отмечалось, зависимость $\Delta p_v(t)$ не периодическая. Кроме того, на эту зависимость существенно влияет значение начальной фазы колебаний φ_0 . В отличие от случая одиночной решетки колеблющихся профилей, когда в спектре колебаний имеется одна компонента на частоте вынуждающего воздействия, при наличии второй решетки, движущейся относительно первой, происходит рассеяние энергии колебаний по всему спектру собственных частот $\omega_{1j} = 2\pi jW/h_2$ и $\omega_{2j} = 2\pi jW/h_1$, сдвинутых соответственно на величины ω и $\omega - \sigma W/h_1$. Указанное обстоятельство может оказаться существенным при определении границ флаттера решеток в ступени турбомашин. В этом случае работа, совершаемая элементом профиля колеблющейся

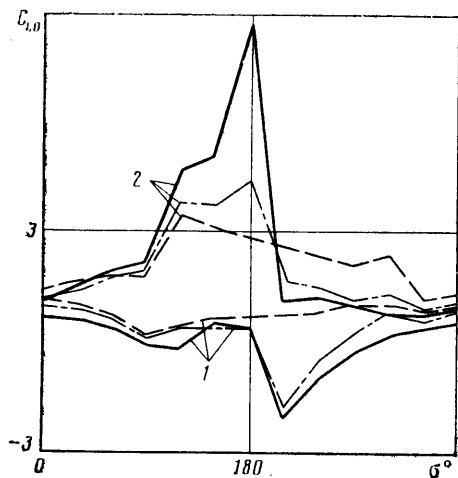
первой решетки, вычисляется по формуле (Y_1 — действительная величина)

$$\begin{aligned}
 E &= -\omega Y_1 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^t [\operatorname{Re}(\Gamma_{ij}) \cos(\omega_{ij}'t - \varphi_0) + \\
 &\quad + \operatorname{Im}(\Gamma_{ij}) \sin(\omega_{ij}'t - \varphi_0)] \sin(\omega t - \varphi_0) dt = \\
 &= -\frac{1}{2} \omega Y_1 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^t \{ \operatorname{Im}(\Gamma_{ij}) [\cos(\omega_{ij}t) - \cos((\omega_{ij} + 2\omega)t - 2\varphi_0)] + \\
 &\quad + \operatorname{Re}(\Gamma_{ij}) [-\sin(\omega_{ij}t) + \sin((\omega_{ij} + 2\omega)t - 2\varphi_0)] \} dt
 \end{aligned}$$

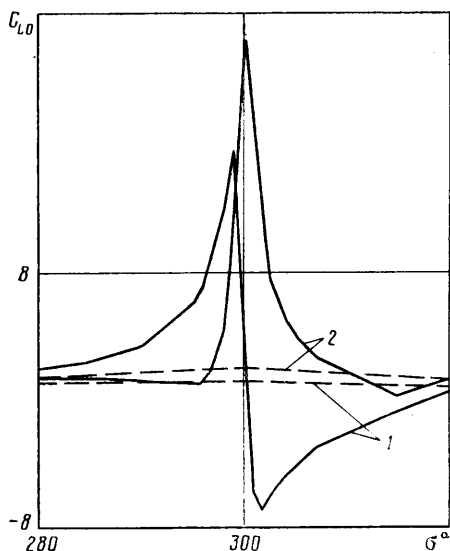
Видно, что все слагаемые в фигурных скобках, кроме первого, не дают вклада в нарастающую по времени часть E . Вклад же первого слагаемого существует только при $j=0$. В специальном случае, когда для некоторого значения j имеет место равенство $\omega = -\omega_{ij}/2 = -\pi j W/h_2$, становится существенным и второе слагаемое в множителе при $\operatorname{Im}(\Gamma_{ij})$. Таким образом, как и в случае одиночной решетки, при наличии второй решетки границы флаттера определяются прежде всего значением мнимой части амплитуды той гармоники колебаний нагрузки, которая отвечает частоте вынужденных колебаний, т. е. величиной $\operatorname{Im}(\Gamma_{10})$. Следует, однако, иметь в виду, что при наличии второй решетки значение $\operatorname{Im}(\Gamma_{10})$ оказывается не таким, как в случае одиночной решетки. Если частота вынуждающих колебаний оказывается близкой к величине $\omega_{ij}/2$ для какого-либо значения j , то соответствующее значение $\operatorname{Im}(\Gamma_{ij})$ также влияет на границы устойчивой работы решетки.

2. При численном решении системы (1.6) ограничимся конечным числом $2(2L+1)$ уравнений и неизвестных, что соответствует сохранению $2L+1$ слагаемых в каждой из бесконечных сумм в левых частях уравнений. Конечная система сингулярных интегральных уравнений после регуляризации [1] приводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, удобной для численного интегрирования. Дискретизация неизвестной нагрузки $\Gamma_{vj}(\xi)$ в N точках ξ_i профилей приводит к конечной линейной алгебраической системе относительно $\Gamma_{vj}(\xi_i)$, где $i=1, 2, \dots, N$, которая решалась методом исключения Гаусса. Отличие указанной системы от аналогичной системы в [1] состоит в том, что искомые гармонические компоненты Γ_{vj} и Γ_{v-j} в данном случае не являются комплексно-сопряженными относительно друг друга и требуется решать полную систему порядка $2N(2L+1)$ вместо системы порядка $2N(L+1)$, решаемой в [1]. Проведенные методические расчеты показали хорошую сходимость результатов при увеличении параметров L и N . В представленных ниже результатах, полученных при $L=4$, $N=5$, погрешность расчета коэффициента подъемной силы на профилях решеток C_L не превышает нескольких процентов.

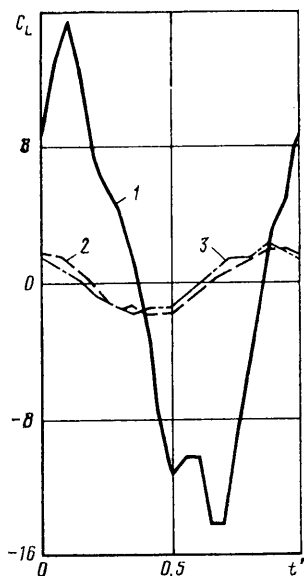
Рассмотрим нестационарное обтекание решеток, отвечающее изгибным колебаниям лопаток первой решетки ($Y_1 = \text{const}$) в потоке с $M_1=0,5$ и $\theta_1 = 45^\circ$. Скорость движения второй решетки относительно первой будем определять значением $M_w = W/a$, где a — скорость звука в невозмущенном потоке. Геометрию решеток зададим значениями параметров $h_1 = h_2 = l_2 = 1$, $\Delta = 0,05$, где Δ — величина осевого зазора между решетками. Как показывают расчеты, при низких частотах колебаний ω и небольших скоростях относительного движения решеток их взаимодействие невелико. Так, при $\omega=0,5$ и $M_w = -0,05$ зависимость коэффициента подъемной силы C_L от времени t на профилях первой решетки практически такая же, как при отсутствии второй решетки. При этом нагрузки на второй решетке оказываются на порядок ниже, чем на первой решетке. Увеличение скорости относительного движения решеток до $M_w = -0,5$ приводит к небольшому возрастанию взаимодействия решеток и увеличению вдвое нагрузок на



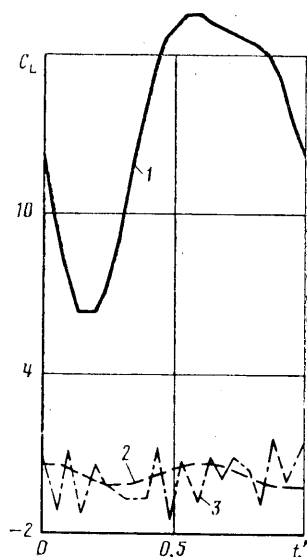
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

второй решетке. Заметим, что изменение M_w при фиксированных M_1 и θ_1 приводит к соответствующему изменению угла установки θ_2 профилей второй решетки. Более значительное усиление взаимодействия решеток происходит при увеличении частоты до $\omega=2$ и исходном значении $M_w = -0,05$. При этом зависимость коэффициента подъемной силы на первой решетке от времени существенно отличается от гармонической, а амплитуда колебаний его величины на второй решетке оказывается сравнимой с амплитудой колебаний на первой решетке.

На фиг. 2 представлены расчетные данные, показывающие, как аэродинамическое взаимодействие решеток зависит от σ при различном соотношении чисел лопаток N_1 и N_2 на их общем периоде H . Рассчитаны значения комплексной амплитуды основной гармоники C_{L0} (на частоте ω) колебаний коэффициента подъемной силы C_L , нормированного по V_1 и ρ_1 ,

на профилях первой решетки при различных значениях σ в диапазоне от 0 до 360° с интервалом 30° : 1 — $\text{Re}(C_{L0})$, 2 — $\text{Im}(C_{L0})$. Рассмотрен случай $\omega=2$, $M_w=-0,5$, $h_1=1$. Штриховые кривые соответствуют одиночной решетке, сплошные — $N_1/N_2=1/2$, штрихпунктирные — $N_1/N_2=2$. Сильное влияние взаимодействия решеток на величину $\text{Im}(C_{L0})$ указывает на важность его учета при определении границ флаттера.

Аналогичные кривые для случая $\omega=2$, $M_w=0,42$, $N_1/N_2=1$ приведены на фиг. 3. Здесь штриховые линии соответствуют одиночной решетке, а сплошные — случаю взаимодействующих решеток. Расчетные данные получены для значений σ с интервалом 1° . Вблизи значения $\sigma=300^\circ$ наблюдается многократное возрастание аэродинамической нагрузки, по-видимому, вследствие резонансного характера взаимодействия решеток. Осциллограммы $C_L(t')$, где $t'=2\pi t/\omega$, для первой и второй решеток, полученные в этом случае при $\varphi_0=0$, приведены соответственно на фиг. 4 и 5. Кривые 1 отвечают $\sigma=300^\circ$, 2 — $\sigma=330^\circ$, 3 — $\sigma=0$. Исследование зависимости резонансных нагрузок от величины зазора Δ между решетками показало, что при изменении Δ от 0,01 до 0,1 модуль C_{L0} изменяется слабо, в то время как соотношение между $\text{Re}(C_{L0})$ и $\text{Im}(C_{L0})$ изменяется значительно.

Расчетные данные, представленные на фиг. 3–5, иллюстрируют значительное влияние, которое может оказывать взаимодействие решеток на их нестационарные аэродинамические характеристики. Значения параметров, определяющих конфигурацию решеток и режим их обтекания в рассмотренных примерах в частности значения безразмерной частоты ω , близки к тем значениям, которые представляют интерес в связи с практическими приложениями в области устойчивости решеток турбомашин. Поэтому полученные результаты позволяют сделать качественный вывод о важности учета аэродинамического взаимодействия решеток в указанных приложениях. Высокое быстродействие расчетной программы (около 10 мин на ЭВМ БЭСМ-6), созданной на основе разработанного метода, позволяет проводить широкие параметрические исследования с целью оценки границ флаттера дозвуковых ступеней турбомашин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугенко К. К., Осипов А. А. Аэродинамическое взаимодействие двух плоских решеток тонких слабонагруженных профилей при их относительном движении в дозвуковом потоке газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 168–175.
2. Ни Р. Анализ периодических возмущений потока в сверхзвуковой плоской решетке // Энерг. машины и установки. 1979. Т. 101. № 3. С. 140–151.

Москва

Поступила в редакцию
26.III.1987