

УДК 533.6.011.8

ВЫРОЖДЕНИЕ РЯДОВ ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА
ДЛЯ ПЕРЕНОСНЫХ СВОЙСТВ В СЛУЧАЕ МЕДЛЕННЫХ
СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СЛАБОРАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

ГАЛКИН В. С.

Рассматривается структура решения методом Чепмена — Энскага кинетического уравнения Больцмана, линеаризованного относительно абсолютного максвелловского равновесия. В предположении о единственности и существовании решения доказано, что в стационарном случае ряды, описывающие явления переноса, состоят из конечного числа членов, причем тепловые потоки и диффузионные скорости даются барнеттовым, а напряжения — супербарнеттовым приближениями, последующие слагаемые рядов равны нулю. При этом во всех приближениях по малому числу Кнудсена K газодинамические переменные удовлетворяют уравнениям сохранения в приближении Стокса; расчет сил и моментов, действующих на помещенные в смесь газов тела, рассчитываются по навье-стоксовым напряжениям без учета «переработки» последних в кнудсеновских слоях.

Дается постановка задачи для простого газа и анализ переносных свойств путем использования свойств инвариантности линеаризованного уравнения Больцмана и при помощи алгоритма метода Чепмена — Энскага, затем результаты обобщаются на смесь газов и рассматривается вопрос о силах и моментах.

1. Состояние газа предполагается настолько близким к покою, что задачу можно линеаризовать, пренебрегая произведениями возмущений. Функция распределения $f \approx f_0(1 + \varphi)$, где максвеллиан

$$f_0 = n_0 (m/2\pi kT_0)^{3/2} \exp(-w^2), \quad w = (m/2kT_0)^{1/2} \xi \quad (1.1)$$

возмущение φ удовлетворяет линеаризованному уравнению Больцмана

$$K \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = J(\varphi), \quad J(\varphi) = f_0^{-1} I(\varphi) \quad (1.2)$$

Из (1.2) следуют линеаризованные уравнения сохранения

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (p_0 p \delta + \Pi) &= 0 \\ \frac{3}{2} \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\mathbf{u} + \frac{\mathbf{q}}{p_0} \right) &= 0, & p &= n + T, & \rho_0 &= m n_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

В (1.1) — (1.3) индексом ноль снизу определяются постоянные равновесные значения; m , ξ — масса и скорость молекулы; $I(\varphi)$ — линеаризованный интеграл столкновений Больцмана; уравнение (1.2) записано в безразмерном виде (без изменения обозначений), число Кнудсена $K = l/L$, l — средняя длина свободного пробега молекул, L — характерная длина. Рассматриваемые течения — медленные, так как величина скорости газа $u \ll (2kT_0/m)^{1/2}$. Числовая плотность равна $n_0(1 + n(x, t))$, давление $p_0(1 + p(x, t))$, температура $T_0(1 + T(x, t))$.

В дальнейшем полагаем $K \ll 1$. Метод Чепмена — Энскага [1] дает решение уравнения (1.2) в виде внешнего разложения по K , по которому вычисляются соответствующие ряды для вязких напряжений Π_{ij} и тепло-

вых потоков q_i , замыкающие уравнения (1.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}^{(1)} + \sum_{r=2}^{\infty} \mathbf{P}^{(r)}, & \mathbf{q} &= \mathbf{q}^{(1)} + \sum_{r=2}^{\infty} \mathbf{q}^{(r)} \\ \mathbf{P}^{(1)} &= -2\mu_0 \mathbf{D} + \frac{2}{3}\mu_0 \delta \operatorname{div} \mathbf{u}, & \mathbf{q}^{(1)} &= -\lambda_0 T_0 \operatorname{grad} T \\ D_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i), & (\mathbf{P}^{(r)}, \mathbf{q}^{(r)}) &\sim K^r \end{aligned} \quad (1.4)$$

Величины $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{q}^{(1)}$ соответствуют приближению Навье – Стокса – Фурье, когда в стационарном случае (1.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \Delta T &= 0 \\ p_0 \operatorname{grad} p &= \mu_0 \Delta \mathbf{u} & (\Delta p &= 0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для краткости (1.5) будем называть уравнениями сохранения в приближении Стокса (или линеаризованными стационарными уравнениями Навье – Стокса), Δ – лапласиан, δ – единичный тензор.

В общем случае как \mathbf{P} , \mathbf{q} , так и $\operatorname{div} \mathbf{P}$, $\operatorname{div} \mathbf{q}$ даются бесконечными рядами по K , члены которых выражаются через производные различных порядков от газодинамических переменных по координатам и произведения этих производных; при $r=2$ имеем приближение Барнетта, при $r=3$ – супербарнеттово приближение.

Однако в линеаризованном стационарном случае имеет место вырождение этих рядов, т. е. превращение их в ряды с конечным числом членов. Во всех приближениях по $K \ll 1$ газодинамические переменные удовлетворяют уравнениям (1.5), так как

$$\operatorname{div} \mathbf{P}^{(r)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{q}^{(r)} = 0 \quad (r \geq 2) \quad (1.6)$$

Целью данной работы является более сильное утверждение: ряды для \mathbf{P} , \mathbf{q} на решениях уравнений (1.5) превращаются в конечные отрезки со свойствами (1.6).

История доказательства (1.6) такова. В [2] было построено общее решение стационарного одномерного уравнения (1.2) и высказано убеждение, что его можно обобщить на трехмерный случай. Согласно этому решению, на расстоянии от поверхности тела, много большем длины пробега l , газодинамические переменные удовлетворяют уравнениям (1.5). Отсюда автор [2] сделал вывод, что «доказанный выше результат обосновывает успех метода Чепмена – Энскога на уровне уравнений Навье – Стокса и его несостоятельность на более высоких уровнях». Однако в [3] на основе результатов [4] доказано, что такой вывод неверен, справедливы равенства (1.6).

Результаты [4] основаны на использовании свойств инвариантности уравнения Больцмана. В общем (нелинейном) случае оно инвариантно к поворотам (изотропия) и неинвариантно к вращениям системы отсчета. С последним связан тот факт [5], что $\mathbf{P}^{(r)}$, $\mathbf{q}^{(r)}$ ($r \geq 2$) зависят не только от компонентов тензора скоростей деформации \mathbf{D} , но и тензора вращения газа $\mathbf{\Omega}$ (или $\operatorname{rot} \mathbf{u}$). Однако линеаризованное уравнение Больцмана инвариантно к стационарным вращениям. Действительно, при переходе от инерциальной системы отсчета во вращающуюся относительно нее с угловой скоростью ω систему отсчета Σ^* в уравнении Больцмана появляется [5] дополнительное слагаемое $\mathbf{a}^* \partial f^* / \partial \xi^*$, где \mathbf{a}^* – ускорение молекулы. Предполагая ω малой величиной, линеаризуем задачу, после чего в \mathbf{a}^* остается только кориолисово ускорение. Имеем

$$\mathbf{a}^* \frac{\partial f^*}{\partial \xi^*} \sim [\xi^* \times \omega]_i \frac{\partial f_0^*}{\partial \xi_i^*} \sim [\xi^* \times \omega]_i \xi_i^* f_0(\xi^{*2}) = 0$$

Следовательно, линеаризованное уравнение Больцмана не изменяется при переходе во вращающуюся Σ^* – систему, и в рассмотренном случае $\mathbf{P}^{(r)}$, $\mathbf{q}^{(r)}$ не должны зависеть от $\mathbf{\Omega}$. Более того, из анализа общего алгоритма метода Чепмена – Энскога [5] следует, что зависящие от $\mathbf{\Omega}$ слагаемые $\mathbf{P}^{(r)}$ и $\mathbf{q}^{(r)}$ нелинейны.

Используя сказанное, распространим методику [4] на анализ \mathbf{P} , \mathbf{q} . При $K \ll 1$ линеаризованные величины \mathbf{P} , \mathbf{q} являются изотропными ли-

нейными функциями тензоров

$$\nabla^r Z_m, \quad \nabla^{r-1} D, \quad \nabla^{r-1} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (r \geq 1) \quad (1.7)$$

$$m=1, 2; \quad Z_1=T_1, \quad Z_2=p; \quad \nabla^r = \{\partial^r / \partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2} \dots \partial x_{\alpha_r}\}$$

Чтобы образовать из (1.7) вектор \mathbf{q} и симметричный тензор второго ранга Π , нужно [4] провести последовательные свертки по индексам, умножая скалярные составляющие Π на δ . Повторяя [4], найдем

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \sum_{r=2}^{\infty} \Delta^{r-2} (\nabla^2 + \delta) Z_m + \sum_{r=2}^{\infty} \Delta^{r-1} (D + \delta \operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (1.8)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(1)} + \sum_{r=2}^{\infty} \Delta^{r-1} \nabla Z_m + \sum_{r=2}^{\infty} \Delta^{r-2} \nabla (D + \delta \operatorname{div} \mathbf{u})$$

Здесь дана лишь формальная структура рядов для Π , \mathbf{q} без постоянных коэффициентов, часть из которых просто равна нулю; $\Delta^0 Z = Z$, $\Delta^r = \underbrace{\Delta \dots \Delta}_r$;

$$\nabla^2 \neq \Delta, \quad \nabla^1 = \nabla.$$

На решениях уравнений (1.5) в (1.8) отличны от нуля только следующие слагаемые:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \Pi_{ij}^{(1)} + \frac{\mu_0^2}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (K_1 T + K_2 p) + \frac{\mu_0^3 \omega}{\rho_0 \rho_0} \Delta D_{ij} \\ q_i &= q_i^{(1)} + K_3 \frac{\mu_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Члены с постоянными коэффициентами K_i соответствуют приближению Барнетта [1], для максвелловских молекул, когда $\mu_0 \sim T_0$, $K_1 = K_3 = 3$, $K_2 = 2$. Слагаемое с коэффициентом ω дается супербарнеттовым приближением [6, 7]. Последние слагаемые в Π_{ij} , q_i выражаются через производные от p : используя (1.5), имеем

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij} = \frac{1}{2} p_0 \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \mu_0 \Delta D_{ij} = p_0 \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.10)$$

С учетом (1.4), (1.10) выражения (1.9) принимают вид

$$\Pi_{ij} = -2\mu_0 D_{ij} + \frac{\mu_0^2}{\rho_0} K_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\mu_0^2}{\rho_0} (K_2 + \omega) \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.11)$$

$$q_i = -\lambda_0 T_0 \frac{\partial T}{\partial x_i} + K_3 \frac{\mu_0 p_0}{2\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Ряды для переносных свойств обрываются на супербарнеттовом (Π) и барнеттовом (\mathbf{q}) приближениях, из (1.11) следует (1.6).

2. Высшие ($r \geq 2$) приближения метода Чепмена — Энскога подвергаются до сих пор критике. Поэтому дадим теперь прямое доказательство формул (1.11) при помощи общего алгоритма этого метода. Ищем реше-

ние уравнения (1.2) в виде $\varphi = \sum_{r=0}^{\infty} \varphi^{(r)}$, $\varphi^{(r)} \sim K^r$. В нулевом приближении

$I(\varphi) = 0$, откуда

$$\varphi^{(0)} = n + (\omega^2 - 3/2) T + (m/kT_0) \xi \mathbf{u}$$

Функция $\varphi^{(0)}$ получается линеаризацией локально-максвелловской функции $f^{(0)}$ — нулевого приближения для нелинейного случая [1]. По

$\varphi^{(0)}$ определяются «полные» значения n, T, \mathbf{u} , т. е. $\varphi^{(r)}$ для $r \geq 1$ не дают вклада в эти газодинамические переменные. Следующие члены разложения вычисляются по формулам

$$\frac{\partial_0 \varphi^{(r-1)}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial_{r-1} \varphi^{(0)}}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial \varphi^{(r-1)}}{\partial x_i} = J(\varphi^{(r)}) \quad (2.1)$$

Возмущения $\varphi^{(k)}$ есть функционалы от n, T, \mathbf{u} , причем в силу (1.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial_0 n}{\partial t} &= -\nabla \mathbf{u}, & \frac{\partial_{k>1} n}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial_0 \mathbf{u}}{\partial t} &= -\frac{p_0}{\rho_0} \nabla p \\ \frac{\partial_{k>1} \mathbf{u}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla \Pi^{(k)}, & \frac{\partial_0 T}{\partial t} &= -\frac{2}{3} \nabla \mathbf{u} \\ \frac{\partial_{k>1} T}{\partial t} &= -\frac{2}{3p_0} \nabla \mathbf{q}^{(k)}, & \frac{\partial_k p}{\partial t} &= \frac{\partial_k T}{\partial t} + \frac{\partial_k n}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем далее рассматривать только стационарный случай, предполагая справедливыми (1.5). Тогда в (2.2) отличны от нуля только операторы

$$\frac{\partial_0 \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{p_0}{\rho_0} \nabla p, \quad \frac{\partial_1 \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho_0} \nabla p. \quad (2.3)$$

Введем обозначения [4]

$$\xi^r = \{\xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_r}\}, \quad \xi^r \nabla^r = \xi_{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \dots \xi_{\alpha_r} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_r}} = \quad (2.4)$$

$$= \sum_{n,p,q=0}^r \frac{r!}{n!p!q!} \xi_1^n \xi_2^p \xi_3^q \frac{\partial^r}{\partial x_1^n \partial x_2^p \partial x_3^q}, \quad n+p+q=r$$

Здесь просуммированы слагаемые, различающиеся перестановкой множителей

Как известно [1], $\varphi^{(1)}$ — сумма из $\xi \nabla T, \xi^2 \nabla \mathbf{u}$. Покажем, что для $r \geq 2$ структура решения такова

$$\varphi^{(r)} = \kappa_{1m}^{(r)} \xi^r \nabla^r Z_m + \kappa_2^{(r)} \xi^{r+1} \nabla^r \mathbf{u} + \kappa_3^{(r)} \xi^{r-1} \nabla^{r-1} p \quad (2.5)$$

Коэффициенты κ зависят от w^2, n_0, T_0 , масс и параметров взаимодействия молекул и не зависят от x . Знание конкретных значений этих коэффициентов в дальнейшем не понадобится. Форма (2.5) записи $\varphi^{(r)}$ удобна для смеси газов: в одноатомном газе $\kappa_{12}^{(1)} = 0$; Z_m определены в (1.7), использованы обозначения (2.4).

Так как операторы (2.3) действуют только на \mathbf{u} , то уравнение для $\varphi^{(r+1)}$ имеет вид

$$\kappa_3^{(r+1)} \xi^{r+1} \nabla^{r+1} p + \kappa_4^{(r+1)} \xi^r \nabla^r p + \xi_i \frac{\partial \varphi^{(r)}}{\partial x_i} = J(\varphi^{(r+1)}) \quad (2.6)$$

В силу линейности (2.6) и скалярности φ его решение должно быть [4] суммой произведений $\nabla^{r+1} Z_m, \nabla^r p, \nabla^{r+1} \mathbf{u}$ на тензоры [4]

$$\xi^k, \xi^{k-2} \delta^2, \xi^{k-4} \delta^4, \dots \quad (2.7)$$

порядка $k=r+1, r, r+2$ соответственно, где $\delta^2 = \delta$ (оператор $J(\varphi)$ переводит неприводимые тензоры в неприводимые). Однако из произведений тензоров (2.7) на производные от Z_m отличны от нуля только те, в которые входят ξ^k , так как свертки по индексам обращают остальные произведения в нуль в силу $\Delta Z_m = 0$. Слагаемые решения, содержащие $\nabla^k \mathbf{u}$,

с учетом (1.5) записываются в виде

$$\kappa_5^{(r+1)} \xi^{r+2} \nabla^{r+1} \mathbf{u} + \kappa_6^{(r+1)} \xi^r \delta^2 \nabla^{r+1} \mathbf{u} = \kappa_5^{(r+1)} \xi^{r+2} \nabla^{r+1} \mathbf{u} + \kappa_7^{(r+1)} \xi^r \nabla^r p$$

В итоге $\varphi^{(r+1)}$ действительно имеет вид (2.5) при замене r на $r+1$.

По (2.5) найдем структуру $\Pi^{(r)}$, $q^{(r)}$ для $r \geq 2$. В данном линейном случае

$$\Pi_{ij}^{(r)} = m \int f_0 \varphi^{(r)} \left(\xi_i \xi_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \xi^2 \right) d\xi, \quad q_i^{(r)} = \frac{m}{2} \int f_0 \varphi^{(r)} \xi_i \xi^2 d\xi$$

Ограничимся более сложным расчетом $\Pi^{(r)}$. Из слагаемых $\varphi^{(r)}$ сначала отбираются те, которые не обращаются в нуль при интегрировании, в интегралах по ξ осуществляется переход в сферическую систему координат и проводится интегрирование по углам. В рассматриваемых ситуациях имеем

$$\begin{aligned} & \int f_0 \kappa^{(r)} \xi_1^A \xi_2^B \xi_3^C d\xi = \\ & = F^{(r)} A! B! C! \left(\frac{A+B+C}{2} \right)! \left[\left(\frac{A}{2} \right)! \left(\frac{B}{2} \right)! \left(\frac{C}{2} \right)! (A+B+C+1)! \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$F^{(r)} = 4\pi \int_0^\infty f_0 \kappa^{(r)} (w^2) \xi^{A+B+C+2} d\xi$$

Здесь A, B, C — четные числа, значения интегралов $F^{(r)}$ в дальнейшем не понадобятся.

Рассмотрим $\Pi_{12}^{(r)}$. Вклад от слагаемого $\kappa_{1m}^{(r)} \xi^r \nabla^r Z_m$ пропорционален (с учетом (2.4))

$$\int f_0 \kappa_{1m}^{(r)} \sum_{n,p,q=0}^r \frac{r!}{n! p! q!} \xi_1^{n+1} \xi_2^{p+1} \xi_3^q \frac{\partial^r Z_m}{\partial x_1^n \partial x_2^p \partial x_3^q} d\xi \quad (2.9)$$

Так как степени ξ_i должны быть четными, отбираем ненулевые интегралы по ξ , положив $n=2\alpha+1$, $p=2\beta+1$, $q=2\gamma$, $r=2\sigma$, $\alpha+\beta+\gamma=\sigma-1$ (α, β, γ — целые числа). Используя (2.8), приводим (2.9) к виду

$$\frac{2F^{(r)} \sigma}{(2\sigma+1)(2\sigma+3)} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{\sigma-1} \frac{(\sigma-1)!}{\alpha! \beta! \gamma!} \frac{\partial^{2\sigma} Z_m}{\partial x_1^{2\alpha+1} \partial x_2^{2\beta+1} \partial x_3^{2\gamma}} \sim \frac{\partial^2 \Phi(\sigma-1, Z_m)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.10)$$

$$\Phi(\sigma-1, Z_m) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{\sigma-1} \frac{(\sigma-1)!}{\alpha! \beta! \gamma!} \frac{\partial^{2(\sigma-1)} Z_m}{\partial x_1^{2\alpha} \partial x_2^{2\beta} \partial x_3^{2\gamma}} = \Delta^{\sigma-1} Z_m = \begin{cases} Z_m & (\sigma=1) \\ 0 & (\sigma \geq 2) \end{cases}$$

Таким образом, $\Phi(\sigma-1, Z_m) \neq 0$ только при $r=2(\sigma=1)$, т. е. в приближении Барнетта. Рассматриваемый вклад в Π пропорционален $\nabla^2 Z_m$.

Аналогично слагаемое $\kappa_3^{(r)} \xi^{r-1} \nabla^{r-1} p$ может дать вклад только в супербарнеттово приближение. Рассмотрим теперь вклад в Π_{12} слагаемого

$$\kappa_2^{(r)} \xi^{r+1} \nabla^r \mathbf{u} = \kappa_2^{(r)} \xi^r \nabla^r \xi_i u_i$$

Здесь ненулевыми будут слагаемые с $r=2\sigma+1$. Имеем интеграл вида (2.9), в котором степени ξ_1, ξ_2, ξ_3 нужно заменить на $n+2, p+1, q$, а Z_m — на $u_i \xi_i$. Для u_i , равных соответственно $u_1; u_2; u_3$, полагаем $n, p, q=2\alpha, 2\beta+1, 2\gamma; 2\alpha+1, 2\beta, 2\gamma; 2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma+1$ ($\alpha+\beta+\gamma=\sigma$). Применяя (2.8) и объединяя результаты, с учетом $\nabla \mathbf{u}=0$ найдем, что рассматриваемый вклад пропорционален

$$\Phi(\sigma, D_{12}) = \Delta^\sigma D_{12} \quad (2.11)$$

Здесь Φ определена формулой (2.10). При $\sigma=0$ ($r=1$) получаем навье-стоксово слагаемое $\Pi^{(1)} \sim D$, при $\sigma=1$ ($r=3$) с учетом (1.5) имеем $\Pi^{(3)} \sim \nabla^2 p$, при $\sigma \geq 2$ ($r \geq 5$) выражение (2.11) равно нулю.

Совершенно так же вычисляются остальные переносные свойства. Результатом вычислений являются формулы (1.11), что и требовалось доказать.

Полученные результаты легко обобщаются на смесь простых газов. Для возмущений функций распределения φ_N вместо (1.2) будем иметь систему линеаризованных уравнений Больцмана (индексами снизу N, M обозначаются компоненты смеси; $N, M=1, 2, \dots, Q$, Q — число компонентов смеси). К газодинамическим переменным добавляются парциальные плотности $n_{N0}(1+n_N)$. В (1.4) изменяются коэффициенты переноса; $q^{(1)}$ и диффузионные скорости $V_N^{(1)}$ являются линейными функциями [1] ∇Z_m , где $m=1, 2, 3$; $Z_1=T$, $Z_2=p$, Z_3 — сумма из n_M с постоянными коэффициентами. К уравнениям (1.5) добавляются уравнения

$$\Delta n_N = 0 \quad (N=1, 2, \dots, Q-1) \quad (2.12)$$

т. е. снова $\Delta Z_m = 0$. Всюду нужно заменить φ, ξ на φ_N, ξ_N , в $\varphi_N^{(0)}$ вместо n будет входить n_N , в $\varphi_N^{(1)}$ вместо $\xi \nabla T$ — сумма из $\xi_N \nabla Z_m$. Остается в силе (2.3).

Дальнейший анализ проводится, как и выше. Принципиальное различие от случая простого газа состоит в том, что в Π добавляется сумма из барнеттовых слагаемых, пропорциональных вторым производным от n_M по координатам ($\nabla^2 n_M$). Поправки к $q^{(1)}$, $V_N^{(1)}$ пропорциональны ∇p , как и в (1.11).

Подробные выражения для соответствующих коэффициентов (вместе с общими выражениями для переносных свойств в барнеттовом и супербарнеттовом приближениях) получены в [6] (см. также [7, 8]).

При учете многоатомности молекул в рамках кинетических уравнений Ван Чан — Уленбека [1] структура переносных свойств не изменится, если обмен внутренней энергией молекул не затруднен; объемная вязкость и остальные скалярные составляющие тензора напряжений равны нулю в силу (1.5), (2.12). Изменяются только коэффициенты переноса.

3. К рассматриваемым здесь медленным стационарным течениям газов относятся такие явления, как термофорез, диффузиофорез, линейный фотофорез и т. д. (например, [9]). Как показано выше, при малых K эти явления описываются уравнениями в приближении Стокса (1.5), (2.12). В качестве граничных условий на поверхности тела S должны использоваться граничные условия скольжения соответствующего порядка по K . При этом местные напряжения Π на S отличны от навье-стоксовых, для их определения необходим соответствующий расчет задачи о кнудсеновском слое [1, 9].

Покажем, что для определения силы и момента, действующих на тело, последнее делать не нужно. Действующая на тело сила

$$F = \int_S (p_0 p \delta + \Pi) dS = \int_V \nabla (p_0 p \delta + \Pi) dV - \int_\Sigma (p_0 p \delta + \Pi) d\Sigma \quad (3.1)$$

Здесь применена теорема Гаусса — Остроградского к объему V , заключенному между поверхностью тела S и поверхностью Σ , проходящей по смеси газов.

В силу линейности задачи на масштабах $\ll L$ (в том числе и в кнудсеновских слоях) уравнение импульса сводится к виду $\nabla (p_0 p \delta + \Pi) = 0$, поэтому интеграл по объему V в (3.1) равен нулю.

Если тело принадлежит к группе тел, то предполагаем также, что расстояния между их поверхностями намного превышают длину свободного пробега l , так что можно окружить тело поверхностью Σ , удаленной от поверхности любого тела на такие расстояния $L \gg l$, что на Σ вместо Π можно подставить соответствующее разложение Чепмена — Энскога (с экспоненциальной по $K \rightarrow 0$ погрешностью [2]). Кроме навье-стоксова слагаемого $\Pi^{(1)}$ оно, как показано выше, содержит сумму из вторых производных от Z_m по координатам с постоянными коэффициентами ($m=1, 2, 3$; $Z_1=T$, $Z_2=p$, Z_3 — сумма из n_M , причем $\Delta Z_m = 0$). Следуя работе [10],

можно показать, что интегралы по Σ от этих производных сводятся к интегралам от ΔZ_m и равны нулю.

В результате (3.1) принимает вид

$$F = - \int_{\Sigma} (p_0 p \delta + \Pi^{(1)}) d\Sigma \quad (3.2)$$

Применяя к (3.2) указанную теорему в обратном порядке и используя уравнение Стокса, получаем, что

$$F = \int_s (p_0 p \delta + \Pi^{(1)}) dS$$

рассчитывается по местным навье-стоксовым напряжениям. То же справедливо и для расчета момента.

Итак, в любом приближении метода Чепмена — Энскога для описания медленных стационарных течений смеси газов справедливы линейаризованные уравнения Навье — Стокса (1.5), (2.12), при этом расчет сил и моментов, действующих на обтекаемые тела, производятся по навье-стоксовым напряжениям. Эффекты разреженности учитываются лишь через граничные условия на поверхности тела. Медленные стационарные движения слаборазреженных газов являются представительным примером широкой области применимости уравнений Навье — Стокса.

Автор признателен М. Н. Гайдукову и О. Г. Фридлиндеру за плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М. Наука, 1967. 440 с.
2. Gercignani C. On the general solution of the steady linearized Boltzmann equation // Rarefied Gas Dynamics. Göttingen, 1974. V. 1. P. A9/1—A9/11. (Рус. перев.: Динамика разреженных газов. М.: Мир, 1976. С. 119—128.)
3. Галкин В. С. О статье И. Б. Чекмарева «К вопросу о решении уравнения Больцмана при малых числах Кнудсена» // Журн. техн. физики. 1978. Т. 48. № 11. С. 2429—2430.
4. Grad H. Asymptotic of the Boltzmann equation // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 2. P. 147—181. (Рус. перев.: Некоторые вопросы кинетической теории газов. М.: Мир, 1965. С. 7—92.)
5. Галкин В. С., Носик В. И. Кинетическая теория и принцип материальной независимости от системы отсчета в механике сплошных сред // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 563—571.
6. Шавалиев М. Ш. Явления переноса в газовых смесях в барнеттовском и супербарнеттовском приближениях. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. 1978. 162 с.
7. Шавалиев М. Ш. Барнеттовское приближение к функции распределения и супербарнеттовские вклады в тензор напряжений и тепловой поток // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 656—660.
8. Шавалиев М. Ш. Явления переноса в барнеттовском приближении в многокомпонентных газовых смесях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С. 126—137.
9. Галоян В. С., Яламов Ю. И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 207 с.
10. Галкин В. С., Фридлиндер О. Г. О силах на тела в газе, обусловленных барнеттовскими напряжениями // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 271—283.

Москва

Поступила в редакцию
9.VI.1987