

УДК 533.6.011.72:534.2

**НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ
НА ЖЕСТКУЮ СТЕНКУ, ПОКРЫТУЮ ТОНКИМ
СЖИМАЕМЫМ СЛОЕМ**

ПЕКУРОВСКИЙ Л. Е., СОЗОНЕНКО Ю. А.

Изучается одномерная нестационарная задача об изменении давления на жесткой стенке, покрытой тонким сжимаемым слоем, при падении на нее плоской акустической волны. Рассмотрение ведется с двух точек зрения: без учета волновых процессов в слое (при этом слой моделируется специальным граничным условием [1] и давление на стенке оказывается непрерывной функцией времени) и с учетом волн, переносящих возмущение давления от внешней границы слоя к стенке и обратно (при этом давление на стенке оказывается кусочно-непрерывной функцией времени). Критерием близости результатов двух подходов служит малость величины отношения акустических импедансов слоя и жидкости до начала взаимодействия падающих волн приводят к значительному сжатию слоя и росту его акустического импеданса.

1. Пусть в плоскости $x=0$ находится неподвижная жесткая стенка. Эта стенка покрыта тонким сжимаемым слоем с начальной толщиной h_0 . В силу малости толщины слоя граничное условие, моделирующее сжимаемый слой, сносится на плоскость $x=0$. Пространство вне слоя заполнено сжимаемой жидкостью, начальные значения плотности, давления и скорости звука в которой обозначаются соответственно ρ_0 , p_0 , c_0 . Материал сжимаемого слоя удовлетворяет условию баротропности

$$h = h_0 G(\xi), \quad \xi = (p - p_0) / p_0 \quad (1.1)$$

где h , p — соответственно текущая толщина слоя и давление в слое, которое считается постоянным во всех его точках, $G(\xi)$ — функция, характеризующая сжимаемость слоя. Решается задача о нормальном падении на рассматриваемую стенку плоской акустической волны избыточного давления $p_i = p_i(t + x/c_0)$.

Случаи возникновения кавитации в отраженной волне не рассматриваются.

Потенциал течения вне сжимаемого слоя описывается одномерным волновым уравнением.

Граничное условие при $x=0$ можно получить, используя условие непротекания жидкости через границу слоя $\partial\varphi/\partial x = dh/dt$, линеаризованный интеграл Коши — Лагранжа $p - p_0 = -\rho_0 \partial\varphi/\partial t$ и наличие баротропии слоя (1.1)

$$G' \left(-\frac{\rho_0}{p_0} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{p_0}{\rho_0 h_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Начальные условия определяются заданием конкретного вида падающей волны.

Решение поставленной задачи ищется в виде суммы потенциалов падающей и отраженной волн $\varphi(x, t) = \varphi_i(t + x/c_0) + \varphi_s(t - x/c_0)$. Отсюда с помощью линеаризованного интеграла Коши — Лагранжа легко получается

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{p - p_0 - 2p_i}{\rho_0 c_0} \quad (1.3)$$

Подставляя соотношение (1.3) в граничное условие (1.2) с учетом условия $x=0$ и переходя от потенциала к давлению, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения давления $p(t)$ на стенке, покрытой сжимаемым слоем

$$A(p) dp/dt = p - 2p_i - p_0, \quad p(0) = p_0 \quad (1.4)$$

$$A(p) = \frac{h_0 \rho_0 c_0}{p_0} G' \left(\frac{p - p_0}{p_0} \right)$$

Начальное условие следует из наличия баротропии и отражает тот факт, что толщина сжимаемого слоя не может меняться мгновенно. Из (1.4) получается, что в начальный момент времени отражение от сжимаемого слоя происходит как от свободной поверхности, т. е. $(dh/dt)_{t=0} = -2p_i(0)/(\rho_0 c_0)$.

2. Пусть $G(\xi) = 1 - (p_0/\rho_* c_*^2) \xi$, что соответствует линейному закону деформирования материала сжимаемого слоя, покрывающего стенку (ρ_* , c_* — соответственно плотность и скорость звука материала этого слоя). Функция $A(p)$ в уравнении (1.4) в этом случае оказывается постоянной

$$A(p) \equiv t_0 = (h_0 \rho_0 c_0)/(\rho_* c_*^2) \quad (2.1)$$

Решение уравнения (1.4) имеет вид

$$p - p_0 = \frac{2}{t_0} \int_0^t e^{-\tau/t_0} p_i(t - \tau) d\tau \quad (2.2)$$

Возьмем падающую волну экспоненциальной формы $p_i(t) = p_m \exp \times (-t/\theta) \eta(t)$, где θ — параметр, характеризующий время действия волны, $\eta(t)$ — функция Хевисайда. Из формулы (2.2) получим давление на стенке, покрытой сжимаемым слоем

$$p - p_0 = \frac{2p_m}{1 - t_0/\theta} (e^{-t/\theta} - e^{-t/t_0}), \quad \theta \neq t_0 \quad (2.3)$$

$$p - p_0 = 2p_m \frac{t}{t_0} e^{-t/t_0}, \quad \theta = t_0 \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) можно найти максимальное значение давления и момент времени t_m , при котором оно достигается

$$(p - p_0)_{\max} = 2p_m (\theta/t_0)^{-1/(\theta - t_0) - 1}, \quad \theta \neq t_0$$

$$t_m = \frac{\theta \ln(\theta/t_0)}{(\theta/t_0) - 1}, \quad \theta \neq t_0; \quad (p - p_0)_{\max} = \frac{2p_m}{e}, \quad t_m = \theta, \quad \theta = t_0$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow \infty$ в формуле (2.3), получаем решение для падающей волны в форме ступеньки

$$p - p_0 = 2p_m (1 - e^{-t/t_0}) \quad (2.5)$$

В этом случае кривая давления не имеет локального максимума. Давление с ростом времени возрастает, стремясь к предельному значению $2p_m$.

Для падающей волны прямоугольной формы $p_i(t) = p_m [\eta(t) - \eta(t - \theta)]$ из (2.2) получим выражения для p и его максимального значения

$$p - p_0 = 2p_m [(1 - e^{-t/t_0}) \eta(t) - (1 - e^{-(t-\theta)/t_0}) \eta(t - \theta)] \quad (2.6)$$

$$(p-p_0)_{\max}=2p_m(1-e^{-\theta/t_0}), \quad t_m=\theta$$

Для падающей волны треугольной формы $p_i(t)=p_m[\eta(t)-\eta(t-\theta)] \times (\theta-t)/\theta$ аналогично имеем

$$p-p_0=2p_m \left[\left(1-e^{-t/t_0} + \frac{t_0-t}{\theta} - \frac{t_0}{\theta} e^{-t/t_0} \right) \eta(t) - (t_0-t+\theta-t_0 e^{-(t-\theta)/t_0}) \frac{\eta(t-\theta)}{\theta} \right] \quad (2.7)$$

Пусть $G(\xi)=(1+\xi)^{-1}$, что соответствует сжимаемому слою, заполненному идеальным совершенным газом при изотермическом процессе. Функция $A(p)$ в уравнении (1.4) примет следующий вид:

$$A(p)=h_0\rho_0c_0p_0/p^2 \quad (2.8)$$

Для падающей волны в форме ступеньки $p_i(t)=p_m\eta(t)$ имеем решение

$$t = \frac{h_0\rho_0c_0p_0}{(2p_m+p_0)^2} \left[\ln \frac{p/p_0}{1-(p-p_0)/(2p_m)} + \frac{2p_m+p_0}{p_0^{-1}-p^{-1}} \right] \quad (2.9)$$

Давление монотонно возрастает, стремясь при $t \rightarrow \infty$ к величине $p-p_0=2p_m$.

3. Пусть $G(\xi)=(1+\xi)^{-1/\kappa}$, что соответствует сжимаемому слою, заполненному идеальным совершенным газом при адиабатическом процессе (κ — показатель адиабаты). Функция $A(p)$ в уравнении (1.4) примет вид

$$A(p) = \frac{h_0\rho_0c_0}{\rho_*c_*^2} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-(\kappa+1)/\kappa} \quad (3.1)$$

Здесь ρ_* , c_* — соответственно плотность и скорость звука в газе слоя при $p=p_0$.

Исследуем решение для падающей волны в форме ступеньки $p_i(t)=p_m\eta(t)$.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$P = \frac{p-p_0}{p_m}, \quad \tau = \frac{c_*t}{2h_0}, \quad \mu = \frac{\rho_*c_*}{\rho_0c_0}, \quad \alpha = \frac{p_0}{p_m} \quad (3.2)$$

Уравнение (1.4) с учетом (3.1) примет вид

$$\frac{dP}{d\tau} = 2\mu \left(1 + \frac{P}{\alpha} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} (2-P), \quad P(0)=0 \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) видно, что $dP/d\tau > 0$, причем $dP/d\tau \rightarrow 0$ при $P \rightarrow 2$, т. е. функция $P(\tau)$, возрастая от 0, асимптотически приближается к 2 при $\tau \rightarrow \infty$. Далее, кривая $P(\tau)$ имеет точку перегиба, которой соответствует следующее значение $P=P_f$ и $P'=P_f'$:

$$P_f = \frac{2(\kappa+1) - \kappa\alpha}{2\kappa+1}, \quad P_f' = 2\mu\kappa \left(\frac{\kappa+1}{\alpha} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} \left(\frac{2+\alpha}{2\kappa+1} \right)^{(2\kappa+1)/\kappa}$$

При малых α величина P_f' оказывается довольно большой. Таким образом, точка перегиба попадает на участок резкого возрастания кривой $P(\tau)$. Следует заметить, что с ростом α (т. е. с уменьшением перепада давления в падающей волне) значение P_f убывает, что, учитывая монотонность $P(\tau)$, означает смещение точки перегиба в сторону все меньших значений времени τ пока, наконец, точка перегиба не исчезнет при $\alpha=2(\kappa+1)/\kappa$.

Для получения приближенного решения уравнение (3.3) удобно рассматривать в виде

$$\frac{d\zeta}{dP_*} = \frac{1}{(P_*+1)^\delta(1-\alpha P_*/2)}, \quad \zeta(0)=0 \quad (3.4)$$

$$P_* = \alpha P, \quad \zeta = 4\mu\tau/\alpha, \quad \delta = (\kappa+1)/\kappa$$

Искомую функцию можно представить в виде ряда по степеням $\kappa/2$, используя следующее разложение:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\alpha P_*\right)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\alpha P_*\right)^n, \quad \frac{1}{2}\alpha P_* < 1 \quad (3.5)$$

$$\zeta(P_*) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \zeta_n(P_*) \quad (3.6)$$

$$\zeta_0(P_*) = \frac{1}{\delta-1} \left[1 - \frac{1}{(P_*+1)^{\delta-1}}\right]$$

$$\zeta_n(P_*) = \frac{1}{n+1-\delta} \left[\frac{\Gamma(P_*^n)}{(P_*+1)^{\delta-1}} - n\zeta_{n-1} \right], \quad n=1, 2, \dots$$

Беличина P_* изменяется от 0 до $2/\alpha$; для малых P_* ($P_* \ll 2/\alpha$) уже $\zeta_0(P_*)$ дает достаточно хорошую аппроксимацию решения; однако с ростом P_* ($P_* \sim 2/\alpha$) приходится учитывать все большее число членов ряда (3.5). В связи с этим для P_* , близких к значению $2/\alpha$, воспользуемся другим разложением правой части уравнения (3.4) ($\beta = (2/\alpha) - P_*$)

$$\frac{d\zeta}{d\beta} = -\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\delta-1} \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \delta \left[\frac{\alpha(1-\beta)}{2} \right] + \frac{\delta(\delta+1)}{2!} \left[\frac{\alpha(1-\beta)}{2} \right]^2 - \dots \right\} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \zeta = & -\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\delta-1} \left\{ \ln \beta - \frac{\delta}{2\alpha}(1-\beta + \ln \beta) + \right. \\ & \left. + \frac{\delta(\delta+1)}{2!} \frac{1}{4\alpha^2} \left[\frac{(1-\beta)^2}{2} + (1-\beta) + \ln \beta \right] + \dots \right\} + \text{const} \quad (3.8) \end{aligned}$$

С целью получения достаточно простой формулы для $\zeta(P_*)$ имеет смысл провести «сращивание» первого члена разложения (3.6) (т.е. $\zeta_0(P_*)$) для малых P_* с первым членом разложения (3.8). Составное решение имеет вид (предполагается, что α — достаточно малая величина)

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{1}{\delta-1} \left[1 - \frac{1}{(P_*+1)^{\delta-1}} \right] - \frac{1}{(2\alpha)^{\delta-1}} \left[\ln \left(1 - \frac{P_*}{2\alpha} \right) + \frac{P_*}{2\alpha} \right] \\ \tau = & \tau_* - \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\kappa 2^{1/\kappa}}{(P-\alpha)^{1/\kappa}} + \ln \left(1 - \frac{P}{2} \right) + \frac{P}{2} \right], \quad \tau_* = \frac{\kappa\alpha}{4\mu} \quad (3.9) \end{aligned}$$

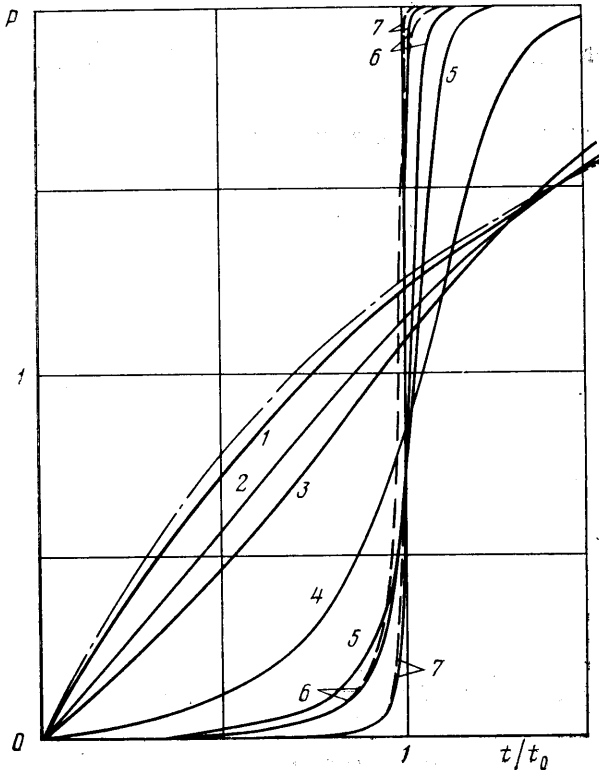
Переходя в (3.9) к размерным величинам, получаем характерное время $t_* = h_0 \rho_0 c_0 / (2p_m)$ [2], которое равно времени перемещения жидкости, примыкающей к сжимаемому слою, на расстояние, равное h_0 , при отсутствии сопротивления сжимаемого слоя. Заметим, что характерное время t_0 в уравнении (2.1) имеет аналогичный смысл, но вместо h_0 нужно взять величину $h_0 - h_m$, где h_m есть толщина слоя при давлении $2p_m$. Рас-

смотренные характерные времена сжатия слоя получаются как частные случаи из общей формулы

$$t_0 = \frac{h_0 \rho_0 c_0}{2p_m} \left[1 - G \left(\frac{2p_m}{p_0} \right) \right] \quad (3.10)$$

Действительно, если $p_m/p_0 \ll 1$, то формула (3.10) переходит в формулу для t_0 в уравнении (2.1), а если $p_m/p_0 \gg 1$, то в формулу для t_* .

На фиг. 1 сплошными кривыми показаны результаты численного решения уравнения (3.3), причем по горизонтальной оси отложена величина t/t_0 , где t_0 определялась по формуле (3.10). Считалось, что $\mu = 2,69 \cdot 10^{-4}$ (это соответствует отношению акустических импедансов воздуха и воды



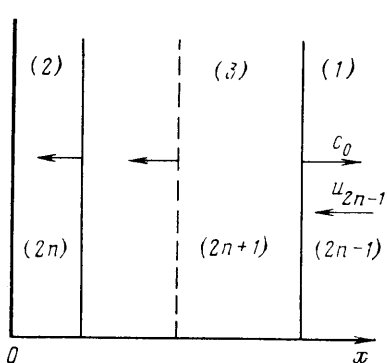
Фиг. 1

при нормальных условиях: $\rho_* = 1,2 \text{ кг/м}^3$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1500 \text{ м/с}$). Кривым 1–7 соответствуют значения $p_m/p_0 = 0,1; 0,5; 1,0; 10; 50; 100; 800$. Видно, что t_0 оказывается характерным моментом существенного возрастания давления (для $p_m/p_0 \geq 50$ можно считать $t_0 \approx t_*$). Кривые, соответствующие приближенной формуле (3.9), нанесены штриховыми линиями.

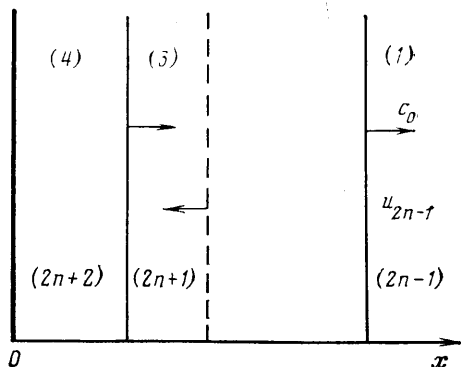
Численные решения для малых p_m/p_0 можно сравнить с акустическим решением (2.5), изображенным штрихпунктирной кривой.

4. Рассмотрим вопрос о соответствии рассмотренной модели решениям, в которых учитывается изменение давления по толщине слоя.

Пусть со стороны плотной жидкости, заполняющей полупространство $x > h_2$, на плоскую стенку, отделенную от жидкости слоем газа толщиной h_2 , падает плоская ударная волна; p_0 , ρ_0 , c_0 — соответственно невозмущенное давление, плотность, скорость звука в жидкости, p_1 — избыточное давление за фронтом падающей волны ($p_1 = p_m = \text{const}$), $\rho_2 = \rho_*$, $p_2 = p_0$ —



Фиг. 2



Фиг. 3

плотность и давление в слое газа до начала взаимодействия с падающей волной.

Описание распространения волн в жидкости (падающей ударной волны, а также возникающих в дальнейшем волн разрежения, идущих от слоя в положительном направлении оси x) ведется в акустическом приближении, а ударные волны в слое газа, считающегося идеальным совершенным, описываются точными нелинейными соотношениями на разрывах.

Фронт падающей волны движется в отрицательном направлении оси x со скоростью c_0 и увлекает за собой жидкость со скоростью $u = -p_m / (\rho_0 c_0)$.

В момент $t=0$ он достигает границы раздела сред ($x=h_2$). В результате распада произвольного разрыва возникает ударная волна, движущаяся по газу в сторону стенки, и волна разрежения, движущаяся по жидкости в сторону $x>0$ (фиг. 2; граница раздела сред обозначена штриховой линией).

Скорость фронта ударной волны $c_2 M_2$, давление p_3 между фронтами движущихся в разные стороны волн, скорость движения тангенциального разрыва u_3 связаны следующей системой уравнений:

$$p_3 = p_2 \left(\frac{2\kappa}{\kappa+1} M_2^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right), \quad p_3 - p_1 = \rho_0 c_0 (u_3 - u_1) \quad (4.1)$$

$$u_3 = -\frac{2}{\kappa-1} c_2 \frac{M_2^2 - 1}{M_2}, \quad c_2 = \sqrt{\kappa \frac{p_2}{\rho_2}}$$

Исключение величин p_3 и u_3 дает кубическое уравнение для определения числа Маха падающей на стенку ударной волны

$$\mu M_2^3 + M_2^2 - \mu [1 + (\kappa+1)/(\alpha\kappa)] M_2 - 1 = 0 \quad (4.2)$$

Конфигурация волн, изображенная на фиг. 2, имеет место при $0 < t < t_2$, где $t_2 = h_0 / (c_2 M_2)$ — момент падения ударной волны на стенку. После отражения ее от стенки возникает область 4 (фиг. 3), в которой давление, плотность и скорость звука вычисляются по формулам [3]

$$p_4 = p_3 \frac{(3\kappa-1)p_3 - (\kappa-1)p_2}{(\kappa-1)p_3 + (\kappa+1)p_2} \quad (4.3)$$

$$\rho_4 = \frac{\rho_3}{\rho_2} \frac{\kappa\rho_2}{(\kappa-1) + (p_2/p_3)}, \quad c_4 = \sqrt{\kappa \frac{p_4}{\rho_4}}$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{(\kappa+1)M_2^2}{(\kappa-1)M_2^2+2} \quad (4.4)$$

Скорость отраженного фронта c_3M_3 дается формулой

$$c_3M_3 = c_2 \sqrt{2\{\kappa[(\kappa+1)(p_3/p_2) + (\kappa-1)]\}^{-1}[(\kappa-1)(p_3/p_2) + 1]} \quad (4.5)$$

$$\frac{c_2}{c_3} = \frac{(\kappa+1)M_2}{\sqrt{[2\kappa M_2^2 - (\kappa-1)][2 + (\kappa-1)M_2^2]}}$$

С помощью первого равенства в (4.1) и соотношения (4.4) величины p_3/p_2 , ρ_3/ρ_2 и M_3 могут быть выражены через M_2 — решение уравнения (4.2), удовлетворяющее условию $M_2 > 1$

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(\kappa-1)M_2^2+2}{2\kappa M_2^2 - (\kappa-1)} \left(\frac{3\kappa-1}{\kappa+1} M_2^2 - 2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right)$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{\kappa(2\kappa M_2^2 - \kappa + 1)}{(\kappa-1)(2\kappa M_2^2 - \kappa + 1) + \kappa + 1} \frac{(\kappa+1)M_2^2}{(\kappa-1)M_2^2 + 2} \quad (4.6)$$

$$M_3 = \frac{(\kappa-1)[(\kappa-1)M_2^2+2]+1}{\kappa \sqrt{[(\kappa-1)M_2^2+2][2\kappa M_2^2 - (\kappa-1)]}}$$

$$t_3 = t_2 \left(\frac{3\kappa-1}{\kappa+1} M_2^2 - \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \right)$$

В момент времени $t=t_3$ отраженная волна достигает границы раздела сред. Вновь возникает задача о распаде произвольного разрыва. Описанный выше цикл (образование ударной волны, идущей к стенке, ее отражение и встреча с тангенциальным разрывом) повторяется.

Пусть $n=1, 2, \dots$ — номер цикла, t_{2n-1} — момент начала цикла, т. е. распада разрыва, t_{2n} — момент прихода ударной волны к тангенциальному разрыву; $n=1$ соответствует уже описанному начальному циклу (считается, что $t_1=0$). Номера областей постоянных значений параметров указаны на фиг. 2 и 3, при этом фиг. 2 соответствует $t_{2n-1} < t < t_{2n}$, а фиг. 3 — $t_{2n} < t < t_{2n+1}$.

Рассуждения, аналогичные проведенным для первого цикла ($n=1$), позволяют получить рекуррентную систему уравнений для определения давления на стенке p_{2n+2} , которое будет постоянным в течение промежутка времени $t_{2n} < t < t_{2n+2}$, значений t_{2n} и t_{2n+1} , толщины слоя h_{2n+2} в конце цикла и других параметров задачи

$$\mu_{2n} M_{2n}^3 + M_{2n}^2 - \mu_{2n} \left(1 + \frac{\kappa+1}{\kappa\alpha} \frac{p_2}{p_{2n}} \right) M_{2n-1} = 0$$

$$\mu_{2n} = \frac{\rho_{2n} c_{2n}}{\rho_0 c_0}, \quad \mu_2 = \mu, \quad \alpha = \frac{p_0}{p_m}$$

$$p_{2n+2} = p_{2n} \frac{(\kappa-1)M_{2n}^2+2}{2\kappa M_{2n}^2 - \kappa + 1} \left(\frac{3\kappa-1}{\kappa+1} M_{2n}^2 - 2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right)$$

$$t_{2n+1} = (t_{2n} - t_{2n-1}) \left(\frac{3\kappa-1}{\kappa+1} M_{2n}^2 - \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \right) + t_{2n-1}, \quad t_{2n} = \frac{h_{2n}}{c_{2n} M_{2n}}$$

$$h_{2n+2} = h_{2n} + u_{2n+1}(t_{2n+1} - t_{2n-1})$$

$$u_{2n+1} = \frac{2c_{2n}}{\kappa+1} \frac{M_{2n}^2 - 1}{M_{2n}}, \quad \rho_{2n+1} = \rho_{2n} \frac{(\kappa+1)M_{2n}^2}{(\kappa-1)M_{2n}^2 + 2}$$

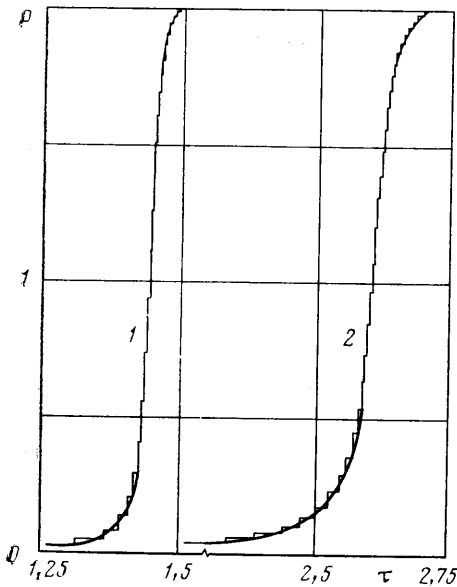
$$\rho_{2n+2} = \frac{\kappa \rho_{2n+1}}{\kappa - 1 + (\kappa+1)(2\kappa M_{2n}^2 - \kappa + 1)^{-1}}$$

Введем безразмерные величины по формулам

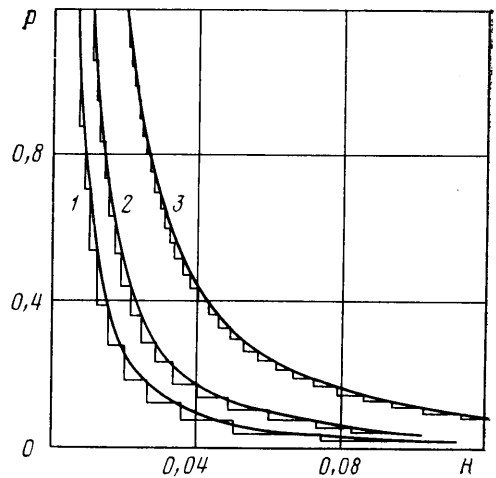
$$\tau = \frac{c_2 t}{2h_2}, \quad H = \frac{h}{h_2}, \quad P = \frac{p_{2n+2} - p_0}{p_m}$$

На фиг. 4 показано давление на стенке P в зависимости от времени τ , а на фиг. 5 — от толщины слоя H . Это — кусочно-постоянные функции, скачок которых происходит в момент падения ударных волн на стенку.

Для расчетов выбран следующий пример: $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $\rho_* = 1,2$ кг/м³,



Фиг. 4



Фиг. 5

$p_0 = 10^5$ Па, $c_0 = 1500$ м/с, $\kappa = 1,4$, т. е. $\mu = 2,7 \cdot 10^{-4}$. Кривым 1—3 соответствуют на фиг. 4, 5 значения p_m/p_0 , равные 900, 500, 200.

Безразмерное давление асимптотически стремится к 2, возрастая явно неравномерно. Из фиг. 4 видно, что резкое возрастание давления происходит примерно в момент времени $\tau_0 = c_2 t_0 / (2h_0)$, где t_0 вычисляется по формуле (3.10). Это соответствует аналогичному результату предыдущего параграфа, полученному для непрерывного решения уравнения (1.4). Решения уравнения (3.3), полученные численно, нанесены на фиг. 4 в виде гладких кривых (там, где они не сливаются со ступенчатыми) для тех же значений p_m/p_0 , что и кусочно-постоянные зависимости. Сравнение их говорит о возможности аппроксимации изменения давления на стенке с помощью дифференциального уравнения (3.3).

Характер связи между давлением и толщиной слоя сопоставляется на фиг. 5 с зависимостью, соответствующей адиабатическому сжатию слоя, когда давление, постоянное поперек слоя, возрастает непрерывно, т. е. с адиабатой Пуассона, которая в принятых здесь обозначениях имеет вид

$$P = \alpha(H^{-\kappa} - 1), \quad P = \frac{p - p_0}{p_m}$$

Из фиг. 4 и 5 видно, что кусочно-непрерывные решения практически не отличаются от гладких решений больше чем на величину скачка в точке разрыва.

5. Для случая линейного материала слоя можно получить аналитические оценки разности между решением уравнения (1.4) с функцией $A(p)$ из (2.1) и решением задачи с учетом волн в слое.

Пусть жидкость с плотностью ρ_0 , скоростью звука c_0 и начальным давлением p_0 заполняет полупространство $x \geq 0$. Сжимаемый слой имеет плотность ρ_* , скорость звука c_* , начальное давление p_0 и заполняет полосу $-h_0 \leq x \leq 0$.

Вместо координаты x удобно ввести координату $m = x\rho(x)$, где $\rho(x) = \rho_*$, $-h_0 < x < 0$, $\rho(x) = \rho_0$, $x \geq 0$.

Тогда движения жидкости и сжимаемого слоя описываются акустическими уравнениями и следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial m^2}, \quad a = (\rho_* c_*), \quad -h_0 < x < 0, \quad a = (\rho_0 c_0), \quad x > 0$$

$$\frac{\partial p(-h_0, t)}{\partial m} = 0, \quad p(-0, t) = p(+0, t), \quad \frac{\partial p(-0, t)}{\partial m} = \frac{\partial p(+0, t)}{\partial m}$$

Падающая волна в форме ступеньки описывается соотношением $p_i = p_m \eta[t + m/(\rho_0 c_0)]$.

Решение этой задачи в изображениях по Лапласу легко находится. Изображение давления на стенке, для удобства сдвинутое по времени, имеет вид

$$p_d^* = e^{h_0 s / c_*} (p - p_0)^* \quad (5.1)$$

$$(p - p_0)^* = \frac{2}{s} \mu p_m \frac{2e^{-(h_0/c_*)s}}{1 + \mu - (1 - \mu)e^{-2(h_0/c_*)s}}$$

Изображение соответствующего давления без учета волн в слое имеет вид

$$p_c^* = \frac{2\mu p_m}{s} \frac{1}{(h_0 s) / c_* + \mu} \quad (5.2)$$

Оригинал решения (5.1) является кусочно-постоянной функцией, оригинал решения (5.2) — непрерывной функцией. Покажем, что $\lim_{\mu \rightarrow 0} |p_d^* - p_c^*| = 0$, и оценим величину этой разности.

Заметим, что $p_d = p_m 4\mu / (1 + \mu)$, $p_c = 0$ при $t = 0$, т. е. разность между этими решениями порядка μ . При $t \rightarrow \infty$ пределы этих решений совпадают: $\lim_{t \rightarrow \infty} p_d = \lim_{t \rightarrow \infty} p_c = 2p_m$.

Предлагаемая здесь оценка основывается на следующем соотношении, которое получается путем разложения $\ln[(1 - \mu)/(1 + \mu)]$ в ряд и оценки остаточного члена этого ряда

$$\frac{1 - \mu}{1 + \mu} = e^{-2\mu + R_0}, \quad |R_0| \leq \frac{2}{3} \frac{\mu^3}{1 - \mu^2}, \quad 0 \leq \mu < 1 \quad (5.3)$$

Тогда функция $F(s) = p_c^* / p_d^*$ и ее оригинал запишутся в виде

$$F(s) = \frac{(1 + \mu)/2}{\mu + (h_0 s) / c_*} \{1 - e^{R_0 - 2[\mu + (h_0 s) / c_*]}\}$$

$$f(t) = \frac{1 + \mu}{2} \frac{c_*}{h_0} e^{-\mu c_* t / h_0}, \quad 0 \leq t \leq 2 \frac{h_0}{c_*}$$

$$f(t) = \frac{1+\mu}{2} \frac{c_*}{h_0} (1-e^{R_0}) e^{-\mu c_* t/h_0}, \quad t > 2 \frac{h_0}{c_*}$$

Используя теорему о свертке, получим

$$p_c(t) = \frac{1+\mu}{2} \frac{c_*}{h_0} \left[\int_0^{2h_0/c_*} p_d(t-\tau) e^{-\mu c_* \tau/h_0} d\tau + \right. \\ \left. + (1-e^{R_0}) \int_{2h_0/c_*}^t p_d(t-\tau) e^{-\mu c_* \tau/h_0} d\tau \right] \quad (5.4)$$

Будем сравнивать решения в момент прихода волн на стенку $t = 2nh_0/c_*$ ($n=1, 2, \dots$). Для этих моментов времени из формулы (5.4) с использованием оценки (5.3) и оригинала решения (5.1) получим

$$\left| p_c \left(2n \frac{h_0}{c_*} \right) - p_d \left(2n \frac{h_0}{c_*} \right) \right| \leq \frac{2\mu^2}{3} p_m \left(1 + \frac{1}{1-\mu^2} \right) \quad (5.5)$$

Таким образом, к моменту прихода волн разность между решениями p_c и p_d имеет порядок μ^2 . График решения p_c изображается гладкой кривой, а график p_d — ломаной. Вершины этой ломаной отстоят от гладкой кривой на расстоянии, определяемом оценкой (5.5). В точках между вершинами разность между решениями будет порядка величины разрыва в решении p_d , т. е. порядка μ . Следовательно, высказанное выше утверждение о разности между гладким и разрывным решениями доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пекуровский Л. Е., Поручиков В. Б., Созоненко Ю. А. Взаимодействие акустических волн с телами, покрытыми тонким сжимаемым слоем // ПММ. 1983. Вып. 5. С. 823–831.
2. Кедринский В. К. Ударные волны в жидкости с пузырьками газа // Физика горения и взрыва. 1980. Т. 16. Вып. 5. С. 14–25.
3. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.V.1987