МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1988

УДК 533.6.011.72

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

МИХАЙЛОВ Ю. Я., ЧИНИЛОВ А. Ю.

Задача об устойчивости ударной волны относительно малых деформаций ее формы исследовалась различными методами [1–10]. Для сред с произвольным уравнением состояния уже в первых исследованиях [2, 3] путем анализа возмущений частного вида получены область неустойчивости, где возмущения растут по времени, область устойчивости, где возмущения затухают, и промежуточная область, наименование которой не установилось. (Ее называют областью нейтральной устойчивости, областью спонтанного излучения звука и т. п.) Общей чертой этих исследований и последующих, несмотря на разные приемы анализа, является то, что в них анализируются фактически искажения исходной ударной волны в плоских течениях или одномерных. Для выяснения роли размерности фронта ударной волны и было предпринято предлагаемое исследование.

В рамках линейной теории для уединенного плоского скачка уплотнения при помощи преобразований Фурье и Лапласа строится в явном виде решение в предположении только финитности малых возмущений. В случае трехмерных течений малые деформации поверхности ударной волны представляются в виде интегральных функционалов с пуассоновскими ядрами от начальных возмущений как формы ударной волны, так и параметров поля течения за ней. Решение для плоских течений строится затем методом спуска.

Из полученных формул следует: для области устойчивости и промежуточной области решение имеет конечную область зависимости от начальных возмущений; несмотря на то что структура области зависимости в них разная, при больших временах затухание возмущений происходит по единому закону со скоростью, зависящей от размерности фронта ударной волны.

1. Для изложения техники построения решения ограничимся рассмотрением центральной задачи в линейной теории устойчивости ударной волны. Эту задачу можно сформулировать следующим образом: нужно решить смешанную задачу в области $\{t>0;\ x>0;\ -\infty<y,\ z<+\infty\}$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial t}+U\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\\
\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho U\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho U\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}=0\\
\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho U\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial z}=0
\end{gathered}\tag{1.1}$$

$$x=0,\quad t>0$$

$$\begin{gathered}
p=-\frac{2\rho U}{1+j}\left(1-\frac{U}{U_\infty}\right)\frac{\partial f}{\partial t},\quad v=(U_\infty-U)\frac{\partial f}{\partial y}\\
u=\frac{1-j}{1+j}\left(1-\frac{U}{U_\infty}\right)\frac{\partial f}{\partial t},\quad w=(U_\infty-U)\frac{\partial f}{\partial z}
\end{gathered}\tag{1.2}$$

$$t=0,\quad x>0$$

$$f(y,z,0)=\Phi(y,z),\quad \frac{\partial}{\partial t}f(y,z,0)=\Psi(y,z)$$

$$p(x,\ y,\ z,\ 0)=p^\circ(x,\ y,\ z),\ldots,\quad w(x,\ y,\ z,\ 0)=w^\circ(x,\ y,\ z) \tag{1.3}$$

Система (1.1) — результат линеаризации уравнений Эйлера, в которых p (давление), u, v и w (проекции скорости газа x, y, z соответственно) являются малыми возмущениями параметров поля течения за ударной волной; относительно невозмущенного течения предполагается, что два однородных потока $\{\rho_\infty,\ P_\infty,\ U_\infty,\ x<0\}$ и $\{\rho,\ P,\ U,\ x>0\}$ связаны соотношениями Ренкина — Гюгонио и подчиняются условиям $P_\infty<P$, $\rho_\infty<\rho$, $U_\infty>c_\infty$, $U<c$, $U_\infty>U>0$, где ρ — плотность, P — давление, U — проекция скорости на ось x, c — скорость звука (для параметров перед ударной волной используется нижний индекс ∞).

Краевые условия (1.2) следуют из линеаризированных соотношений Ренкина — Гюгонио, когда малые отклонения поверхности ударной волны от стационарного состояния описываются функцией вида $x=f(y,\ z,\ t)$. Уравнение состояния среды, следуя [2], не конкретизируется, учет его влияния осуществляется через параметр $j=(\partial V/\partial P)_{\text{н}}(P-P_\infty)/(V_\infty-V)$, где $V=1/\rho$ — удельный объем, а нижний индекс означает дифференцирование вдоль адиабаты Гюгонио. Дополнительно при конструировании (1.2) предполагается, что $1+j\neq0$.

В ходе последующих преобразований вплоть до получения окончательных формул предполагается, что начальные данные в (1.3) являются произвольными финитными функциями и согласованы с краевыми условиями (1.2). Кроме того, все функции обладают гладкостью, требуемой для справедливости выполняемых преобразований. После построения решения большинство из этих ограничений можно существенно ослабить или вообще снять.

2. Нестандартностью приведенной смешанной задачи является наличие f — одной из искомых функций — только в краевых условиях, причем эта функция является основным предметом теории устойчивости ударной волны. Существуют разные пути решения этой задачи. Ниже предпочтение отдано способу, когда первоначальная задача для нескольких функций сводится к задаче только для искомой функции f. Выбранный путь основан на теории волнового уравнения и с точностью до перестановки ряда операций аналогичен [3].

Из системы (1.1) следует волновое уравнение вида

$$c^2\Delta p+c_*^{\,2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-2U\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0 \tag{2.1}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

где $c_*^{\,2}=(c^2-U^2)^{1/2}$ — скорость распространения за ударной волной звуковых волн вдоль ее поверхности. Для любой функции, удовлетворяющей уравнению (2.1), справедливо следующее интегральное соотношение (формула Кирхгоффа):

$$2\pi c p(x,y,z,t)=\iint\limits_S\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial p}{\partial\nu}\right]-[p(\xi,\eta,\zeta,\tau)]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial p}{\partial\tau}\right]\left(\frac{1}{Rc_*^{\,2}}\frac{\partial R}{\partial\nu}-\frac{U}{R}n_\xi\right)\right\}dS$$

$$r^2=(\eta-y)^2-(\zeta-z)^2,\quad R^2=c_*^{\,2}r^2+c^2(\xi-x)^2 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}=c_*{}^2 n_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+c^2 n_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+c^2 n_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

где n_ξ, n_η, n_ζ — компоненты внешней нормали к замкнутой кусочно-гладкой поверхности S; скобки $[\ldots]$ означают, что соответствующая функция обладает запаздывающим аргументом: $\tau=t-\{(\xi-x)U+R\}/c_*{}^2$. Формула выписана для случая, когда точка $\{x, y, z\}$ располагается на поверхности S. Специальный выбор поверхности S в этой формуле и позволяет получить уравнение, которое содержит только одну искомую функцию f. Пусть поверхность S составлена из плоского участка S_1: $r<c_*t$, $\xi=0$, и участка сферы S_2: $(\xi+Ut)^2+r^2=c^2t^2$, $\xi>0$, а точка $\{x, y, z\}$ — центр круга S_1. На сферическом участке $\tau=0$, поэтому эта часть поверхностного интеграла зависит только от начальных данных; на плоском участке $\tau=t-r/c_*$, а подынтегральная функция содержит сомножитель $c_*{}^2\partial p/\partial x-U\partial p/\partial t$, который можно выразить через f, используя (1.1) и (1.2). Если и в левой части формулы (2.2) осуществить замену $p(0, y, z, t)$ на $\partial f/\partial t$, то формула (2.2) превращается в интегральное уравнение для определения искомой функции

$$\frac{\partial f(y,z,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi c_*}\iint\limits_{r<c_*t}\left[c_*{}^2A\Delta f(\eta,\zeta,\tau)-\right.$$

$$\left.-B\frac{\partial^2 f(\eta,\zeta,\tau)}{\partial\tau^2}\right]_{\tau=t-r/c_*}\frac{d\eta\,d\zeta}{r}-\alpha g(y,z,t) \qquad (2.3)$$

$$A=\frac{cU_\infty(1+j)}{2c_*{}^2},\quad B=\frac{c(1-j)}{2U},\quad \alpha=\frac{U_\infty(1+j)}{2\rho U(U_\infty-U)}$$

Неоднородный член — функционал от начальных данных (1.3) и его можно представить, например, в виде

$$g=p^\circ(ct-Ut,y,z)-\frac{\rho c}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{ct-Ut}d(\xi,y+q\cos\varphi,z+q\sin\varphi)\,d\xi\,d\varphi+$$

$$+\frac{ct}{2\pi}\Delta\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{ct-Ut}\int\limits_0^{1}p^\circ(\xi,y+rq\cos\varphi,z+rq\sin\varphi)\,r\,dr\,d\xi\,d\varphi$$

$$q^2=c^2t^2-(\xi+Ut)^2,\quad d(x,y,z)=\frac{\partial u^\circ}{\partial x}+\frac{\partial v^\circ}{\partial y}+\frac{\partial w^\circ}{\partial z}$$

Из описанного построения следует, что рассматриваемая задача об устойчивости ударной волны сводится к решению одного линейного интегродифференциального уравнения.

3. Для решения уравнения (2.3) удобно скомбинировать два интегральных преобразования: Фурье — по пространственным переменным и Лапласа — по времени. По определению интегральных преобразований

$$f^F(k,l,t)=\frac{1}{2\pi}\iint f(y,z,t)\exp(-iky-ilz)\,dy\,dz$$

$$f^{FL}(k,l,\sigma)=\int f^F(k,l,t)\exp(-\sigma t)\,dt$$

Здесь для изображений использованы верхние индексы: F — преобразование Фурье и L — преобразование Лапласа.

Преобразование Фурье переводит (2.3) в обыкновенное интегральное уравнение

$$\frac{df^F}{dt}=-\frac{1}{c_*}\int\limits_0^{c_*t}\left[Ac_*^2\Omega^2 f^F(k,l,\tau)-B\frac{d^2}{d\tau^2}f^F(k,l,\tau)\right]_{\tau=t-r/c_*}J_0(r\Omega)\,dr-\alpha g^F \qquad (3.1)$$

$$g^F(k,l,t)=p^F(ct-Ut,k,l)-\rho c\int\limits_0^{ct-Ut}d^F(\xi,k,l)J_0(q\Omega)\,d\xi-$$

$$-ct\Omega^2\int\limits_0^{ct-Ut}\int\limits_0^1 p^F(\xi,k,l)J_0(rq\Omega)\,r\,dr\,d\xi$$

где $\Omega^2=k^2+l^2$, J_0 – функция Бесселя первого рода.

Это уравнение отличается только непринципиальными деталями в росписи от аналогичной формулы [3] для задачи при отсутствии поршня. Для построения в [3] использована иная последовательность операций: сначала фактически осуществлено преобразование Фурье для системы уравнений, затем выполнен переход к телеграфному уравнению, для решения которого привлечена функция Римана.

После преобразования Лапласа уравнение (3.1) переходит в алгебраическое соотношение

$$f^{FL}=\{(B\sigma+s)\Phi^F+B\Psi^F+\alpha\rho c d^{FL}(\mu,k,l)-\alpha c_*^{-2}(c\sigma+Us)p^{FL}(\mu,k,l)\}K(\sigma,\Omega) \qquad (3.2)$$

$$s=(\sigma^2+c_*^2\Omega^2)^{1/2},\quad \mu=c_*^{-2}(U\sigma+cs)$$

$$K=(\sigma s+B\sigma^2+Ac_*^2\Omega^2)^{-1}$$

Из вида (3.2) следует, что при использовании теоремы Эфроса [11] для выполнения обратных преобразований достаточно найти оригинал для одного изображения

$$G^{FL}(\sigma,\Omega,\xi)=K(\sigma,\Omega)\exp(-\xi\mu(\sigma))$$

По теореме обращения преобразования Лапласа, после ликвидации иррациональности при помощи замены переменной и последующего разложения подынтегрального выражения на элементарные дроби, имеем

$$G^F(t,\Omega,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}K(\sigma,\Omega)\exp(\sigma t-\xi\mu(\sigma))\,d\sigma=$$

$$=\frac{b^{1/2}}{(1+B)c_*\Omega\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\sum_{n=1}^{2}\frac{C_n}{1-\lambda_n b/\omega^2}\exp\left(q\Omega\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)\Big/2\right)\frac{d\omega}{\omega^2},\quad C_{1,2}=\frac{1+\lambda_{1,2}}{\lambda_1-\lambda_2}$$

$$\omega=\frac{b^{1/2}}{c_*\Omega}(s+\sigma),\quad b=\left(t-\frac{\xi}{c-U}\right)\Big/\left(t+\frac{\xi}{c+U}\right)$$

$$\lambda_{1,2}=[B-2A\pm(1-4AB+4A^2)^{1/2}](1+B)^{-1}$$

Дроби под интегралом можно разложить в сходящиеся ряды по степеням $\lambda_n b/\omega^2$ ($n=1,2$), поэтому, используя одно из интегральных представлений функций Бесселя [11], G^F можно представить в виде суммы двух бесконечных рядов из функций Бесселя

$$G^F=\frac{2b^{1/2}}{(1+B)c_*\Omega}\sum_{n=1}^{2}C_n\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda_n b)^m J_{2m+1}(q\Omega)\,\theta\left(t-\frac{\xi}{c-U}\right) \qquad (3.3)$$

где θ – единичная функция Хевисайда.

Если воспользоваться асимптотическими формулами для функций Бесселя, то получаются точно такие же асимптотические оценки при $t\to\infty$, как и в [3]:

$$G^F\sim(c_*\Omega t)^{-3/2}\sin(c_*\Omega t+\delta)$$

$$A>0,\quad B>A\quad\left(-1<j<j_*=\frac{c^2-U^2-UU_\infty}{c^2-U^2+UU_\infty}\right) \qquad (3.4)$$

Величина G^F колеблется, не затухая, при

$$A>0, \quad -1<B<A \quad (j_*<j<1+2U/c) \tag{3.5}$$
$$G^F \sim (c_*\Omega t)^{-1/2} \sin(c_*\Omega t+\delta), \quad A>0, \quad B=A \quad (j=j_*)$$

Величина G^F экспоненциально растет при

$$A<0,\ B>1 \text{ либо } A>0,\ B<-1 \quad (j<-1 \text{ либо } j>1+2U/c) \tag{3.6}$$

Здесь δ — постоянная, не зависящая от t и Ω.

Оставшаяся область $A<0$, $B<1$ исключается из рассмотрения, так как при любом значении j $c_*^2A+UU_\infty B=cU_\infty$.

Следует иметь в виду, что при анализе вариантов с $|b\lambda_n|>1$ (случаи (3.5), (3.6)) нужно воспользоваться разложением по обратным степеням, которое можно получить из производящей функции для бесселевых функций

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_n b)^m J_{2m+1}(q\Omega) = \frac{1}{\lambda_n b} \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_n b)^{-m} J_{2m+1}(q\Omega) +$$
$$+ (\lambda_n b)^{-1/2} \operatorname{sh}\{q\Omega[(\lambda_n b)^{1/2} + (\lambda_n b)^{-1/2}]/2\} \tag{3.7}$$

Выполнение обратного преобразования Фурье сводится к вычислению интеграла

$$G(t, r, \xi) = \int_0^\infty G^F(t, \Omega, \xi) J_0(r\Omega)\, \Omega\, d\Omega$$

Почленное интегрирование (3.3), с учетом [12]

$$\int_0^\infty J_{2m+1}(q\Omega) J_0(r\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{q} P_m\left(1-2\frac{r^2}{q^2}\right) \theta(q-r)$$

дает сумму из полиномов Лежандра P_m. При $|\lambda_n b|<1$ (выполняется всегда, если $|\lambda_n|<1$) ряды сходятся и представляют собой производящие функции, поэтому

$$G=G_0 = \frac{2b^{1/2}}{(1+B)c_* q} \theta(q-r)\, \theta\left(t-\frac{\xi}{c-U}\right) \sum_{n=1}^{2} C_n \left[(1-\lambda_n b)^2 + 4\lambda_n b \frac{r^2}{q^2}\right]^{-1/2} \tag{3.8}$$

При $|\lambda_n|>1$ существует такое $\xi_* = (c-U)t(|\lambda_n|-1)/[|\lambda_n|-(c-U)/(c+U)]$, что если $\xi_*<\xi<ct-Ut$, то $|\lambda_n b|<1$ и остается справедливой формула (3.8); если $0<\xi<\xi_*$, то $|\lambda_n b|>1$ и соответствующий ряд в (3.3) следует заменить по формуле (3.7). Так как [12]

$$\int_0^\infty \sin(qQ\Omega) J_0(r\Omega)\, d\Omega = (q^2Q^2-r^2)^{-1/2}\theta(qQ-r)$$
$$Q = {}^1/_2(|b\lambda_n|^{1/2} + |b\lambda_n|^{-1/2})$$

то оригинал преобразования Фурье можно построить и при действительных $\lambda_n<-1$.

Итак, после обратных преобразований Лапласа и Фурье в случае (3.4) ($|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|<1$) $G=G_0$, а в случае (3.5) ($|\lambda_1|<1$, $\lambda_2<-1$) $G=G_0+$ $+H(t, r, \xi)$, где

$$H = \frac{4C_2 b^{1/2}}{(1+B)c_* q} \left[(1-\lambda_2 b)_2 + 4\lambda^2 b \frac{r^2}{q^2}\right]^{-1/2} \theta(\xi_*-\xi)\,[\theta(qQ-r)-\theta(q-r)]$$

Таким образом, из (3.2) при помощи известных в операционном исчислении правил (см., например, [11]) следует

$$f(y, z, t) = \Phi(y, z) + \frac{A}{2\pi} c_*^2 \Delta \int_0^t \iint \Phi(\eta, \zeta) G(\tau, r, 0)\, d\eta\, d\zeta\, d\tau +$$

$$+\frac{U+cB}{2\pi c}\iint \Psi(\eta,\zeta)G(t,r,0)\,d\eta\,d\zeta+\frac{\alpha}{2\pi c}\iiint\Big(\rho c^2 d(\xi,\eta,\zeta)-$$

$$-U\frac{\partial}{\partial\xi}p^\circ(\xi,\eta,\zeta)\Big)G(t,r,\xi)\,d\eta\,d\zeta\,d\xi-$$

$$-\frac{\alpha}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iiint p^\circ(\xi,\eta,\zeta)G(t,r,\xi)\,d\eta\,d\zeta\,d\xi \qquad (3.9)$$

Отметим, что эта формула применима и в случае наклонной ударной волны в силу инвариантности задачи относительно преобразования Галилея. Для этого следует заменить y на $y-V_\infty t$ и z на $z-W_\infty t$.

4. Интегральные преобразования являются мощным аппаратом для построения решения в явном виде. Однако у них есть и недостатки, являющиеся следствием их универсальности. В ходе их выполнения не очень очевидна связь структуры получаемых формул с характерными свойствами решения конкретной задачи. Поэтому для лучшего понимания решения (3.9) имеет смысл рассматриваемую задачу свести к более традиционной задаче для дифференциального уравнения в частных производных.

Интегральный оператор в (2.3) можно представить в операторной символике следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r<c_*t} f\Big(\eta,\zeta,t-\frac{r}{c_*}\Big)\frac{d\eta\,d\zeta}{r}=\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_*^2\Delta\Big)^{-1/2} f$$

Для ликвидации дробной степени волнового оператора нужно перейти к итерированному уравнению, как это часто делается в теории интегральных уравнений. После такого перехода дифференцирование $(\partial^2/\partial t^2-c_*^2\Delta)\,\partial/\partial t$ даст уравнение вида

$$\Big\{(B^2-1)\frac{\partial^4}{\partial t^4}-(2AB-1)c_*^2\Delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}+A^2c_*^4\Delta^2\Big\}f(y,z,t)=$$

$$=-A\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_*^2\Delta\Big)\Delta\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(y+c_*t\cos\varphi,\,z+c_*t\sin\varphi)\,d\varphi+\dots \qquad (4.1)$$

где точками обозначены члены, которые зависят только от остальных начальных данных.

Из самого процесса получения уравнения следует, что любое решение уравнения (2.3) является решением неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с частными производными. Множество решений интегродифференциального уравнения образуют подмножество всей совокупности решений задачи Коши для уравнения (4.1). Выделение этого подмножества осуществляется через формирование частного вида как неоднородного члена, так и начальных данных. Последние полностью определяются, исходя из (2.3). Таким образом, рассматриваемая задача об устойчивости ударной волны, которая является смешанной задачей для гиперболической системы, сводится не только к решению интегродифференциального уравнения, но и к задаче Коши для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка.

Аналогичный прием использовался и ранее [13], но только для плоских течений. Однако для более наглядной демонстрации взаимосвязи результатов с [3] изложен вариант построения решения через уравнение (2.3). Можно было бы вообще отказаться от уравнения (2.3), а сразу же использовать первоначальную формулировку задачи, но тогда не столь очевидна связь задачи с уравнением (4.1), особенно в исходном физическом пространстве.

Корректность постановки задачи Коши самым непосредственным образом связана с понятием гиперболичности дифференциального оператора. Так как оператор в (4.1) однородный, то для корректности задачи Коши необходимо и достаточно, чтобы $B^2-1\neq 0$ и корни уравнения

$$(B^2-1)\Lambda^4-(2AB-1)c_*^2\Lambda^2+A^2c_*^4=0$$

были вещественными. Сопоставление корней этого уравнения с корнями λ_n, которые использовались при разложении на элементарные дроби, показывает, что

$$\Lambda_n^2=-c_*^2(1-\lambda_n)^2/4\lambda_n \quad (n=1,\ 2) \tag{4.2}$$

Из приведенной связи очевидно, что именно Λ_n^2 входят в состав ядер построенного решения. Но уравнение (4.1) привносит в общую теорию об устойчивости ударной волны и совершенно новые черты.

Уравнение (4.1) может быть не только гиперболическим. Смена его типа не совпадает с границами областей, которые появились в исследованиях [2, 3]. Так, область его гиперболичности описывается неравенствами

$$1<B<A+1/(4A), \quad A>{}^1/_2 \tag{4.3}$$

$$\frac{c_*^2(1-U^2/c^2)^{1/2}(1-U/U_\infty)^{1/2}-UU_\infty}{c_*^2+UU_\infty}<j<1-2\frac{U}{c} \tag{4.4}$$

Из этих неравенств следует, что часть области гиперболичности располагается в области (3.4), а другая — в области (3.5) (см. разд. 3). Так как оператор в (4.1) всегда можно представить в виде произведения двух операторов второго порядка, то уравнение (4.1) порождает три зоны, в одной из которых оба оператора второго порядка гиперболические (неравенства (4.3) определяют эту зону), в другой — один оператор гиперболический, а другой эллиптический (при $|B|<1$, $A>0$ или $1-2U/c<j<$ $<1+2U/c$), а в последней оба оператора эллиптические.

Если исходить из постулата, что только корректным по Адамару процессам соответствуют физически правильно поставленные задачи, которые описывают некоторый процесс, вызванный определенными условиями (а не решается задача, связанная со следствиями процесса), то в рассматриваемой постановке задачи об устойчивости ударной волны заслуживает внимания только область (4.3), хотя решение построено для гораздо большей области. Причина такого явления в какой-то мере связана и с вырожденностью задачи (у нее нет характерного линейного размера). Дополнительные решения могут быть, в частности, пределами решения задач с иной постановкой дополнительных условий, которые при переходе к полупространству формально совпадают с рассматриваемой.

Анализ политропного газа показывает разумность появления нижней границы в (4.4), которая возникает, если показатель адиабаты Пуассона $\gamma\to 1+0$. Другим весомым аргументом может служить случай бесконечно слабой ударной волны. В области (4.3) ударной волне нулевой интенсивности соответствует граничная точка, а с точки зрения формулы (3.9) эта точка является внутренней, несмотря на то что линейная теория теряет силу в окрестности этой точки, так как при получении условий (1.2) используется конечность величины $U_\infty-U$. В окрестности этой точки появляется дополнительный малый параметр, а это с точки зрения нелинейной задачи означает появление пограничной области, где линейная постановка не верна. Следует отметить, что тип уравнения (4.1) определяется (см. (4.2)) целиком коэффициентами граничных условий (1.2). Еще одним частичным аргументом служит результат в [8], где путем анализа коэффициента отражения исключен из области устойчивости участок, который в принятых здесь обозначениях описывается неравенствами $-1<B<$ $<U/c$, $B>c/U$, $A>0$.

Формула (3.9) дает представление решения, в котором фигурирует дифференцирование начальных данных. При $A<B$ путем только интегрирования по частям можно привести ее к виду, в котором отсутствует дифференцирование начальных данных. При $A>B$ один только этот прием не приводит к успеху, так как имеются ядра с сингулярностью. Поэтому для построения окончательных формул нужно вынести операцию дифференцирования за знак интегрирования для части членов. Так как задача линейная, то, чтобы не загромождать изложение, выпишем окончательный вид решения, когда все начальные данные являются нулевыми, за исключением одной функции $\Phi(y, z)$, которая задает начальные отклонения поверхности ударной волны

$$j<j_*: \quad f(y,z,t)=-\frac{2Ac_*t}{1+B}\sum_{n=1}^{2}C_nI_n(y,z,t)$$

$$j>j_*: \quad f(y,z,t)=\frac{2Ac_*t}{1+B}\sum_{n=1}^{2}C_n'I_n(y,z,t)-$$

$$-\frac{4Ac_*C_2'}{(1+B)\Lambda_2^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\Lambda_2 t}S(r)\left[c_*^2t^2(1-\lambda_2)^2+4\lambda_2r^2\right]^{-1/2}r\,dr$$

$$I_n(y,z,t)=\int_0^{c_*t}S(r)\frac{\partial}{\partial r}\left[c_*^2t^2(1-\lambda_n)^2+4\lambda_nr^2\right]^{-1/2}dr$$

$$S(r;y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(y+r\cos\varphi, z+r\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$C_1'=C_1, \quad C_2'=-C_2$$

где $S(r)$ — сферическая средняя.

Метод спуска дает для плоского течения соответственно

$$f(y,t)=Q(y,t)$$

$$f(y,t)=Q(y,t)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left[\Phi(y+\Lambda_2t)+\Phi(y-\Lambda_2t)\right]$$

$$Q(y,t)=\frac{Ac_*^2t^2}{\pi}\int_{-c_*t}^{c_*t}\frac{\Phi(y-\eta)(c_*^2t^2-\eta^2)^{1/2}\,d\eta}{A^2c_*^4t^4-(2AB-1)c_*^2t^2\eta^2+(B^2-1)\eta^4}$$

Отсюда следует, что в фиксированной точке при трехмерном течении любое возмущение конечной протяженности затухает как $O(t^{-2})$, а при плоском — как $O(t^{-1})$. Причем при достаточно больших временах для областей (3.4) и (3.5) закон одинаков. Следует отметить следующую особенность решения. При $j<j_*$ область зависимости решения располагается во внутреннем характеристическом конусе уравнения (4.1) аналогично тому, как это имеет место для поверхностных упругих волн Рэлея на плоской границе твердого тела (см. [1]). Вообще говоря, для области (4.3) справедлива более глубокая аналогия с теорией упругих волн. Если же $j>j_*$, то возмущения вдоль ударной волны распространяются не со скоростью c_* (скорость распространения вдоль ударной волны звуковых волн за ней); а со скоростью Λ_2, которая является скоростью перемещения вдоль фронта так называемой боковой (см. [1]) волны. Для остальных начальных данных областью интегрирования является при $j<j_*$ та же самая область, что и в формуле Кирхгоффа (2.2), т. е. область, которую охватывает сферический фронт отраженной звуковой волны. При $j>j_*$ помимо этой области появляется область, которую охватывает конический фронт боковой звуковой волны. (Именно на коническом фронте этой волны и появляется сингулярность в ядрах.) Для политропного газа всегда $j<j_*$, т. е. боковой волны не появляется. При $\gamma\leqslant{}^5/_3$ политропный газ принадлежит области (4.3), при ${}^5/_3<\gamma<2$ только достаточно интенсивные ударные волны принадлежат этой области, а при $\gamma\geqslant2$ они уже не принадлежат этой области ни при какой интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
2. *Дьяков С. П.* Об устойчивости ударных волн // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1954. Т. 27. Вып. 3. С. 288–295.
3. *Иорданский С. В.* Об устойчивости плоской стационарной ударной волны // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 465–472.
4. *Конторович В. М.* К вопросу об устойчивости ударных волн // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1957. Т. 33. Вып. 6. С. 1525–1526.
5. *Годунов С. К., Гордиенко В. М.* Интегралы энергии в смешанной задаче для волнового уравнения в связи с исследованием устойчивости ударных волн // Исследование гидродинамической устойчивости с помощью ЭВМ. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР, 1981. С. 191–197.
6. *Блохин А. М.* Интегралы энергии в смешанной задаче для уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне // Исследование гидродинамической устойчивости с помощью ЭВМ. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР, 1981. С. 198–228.
7. *Егорушкин С. А.* Распад плоской ударной волны в двухпараметрической среде с произвольным уравнением состояния // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 147–153.
8. *Галин Г. Я., Куликовский А. Г.* Об устойчивости одномерных течений газа в расширяющихся областях // Изв. АН СССР. МЖГ, 1981. № 2. С. 112–119.
9. *Кузнецов Н. М.* К теории устойчивости ударных волн // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1985. Т. 88. Вып. 2. С. 470–486.
10. *Федосов В. П.* О наличии областей неустойчивости течений с ударными волнами в совершенном газе. Ч. 1: Препринт № 21–85. Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР. 1985. 38 с.
11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
12. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
13. *Федосов В. П., Яненко Н. Н.* Решение смешанной задачи для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 3. С. 549–553.

Москва

Поступила в редакцию
4.V.1987