МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1988

УДК 532.526

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ТЕПЛОМАССООБМЕНОМ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

ГАРАЕВ К. Г.

Рассматривается задача минимизации конвективного теплового потока, передаваемого от пограничного слоя сжимаемого газа к пористой криволинейной стенке при заданном ограничении на мощность системы охлаждения; в качестве управления выступает местный расход газа через пористую поверхность. Эта задача для частных случаев линейной зависимости вязкости от температуры и постоянном температурном факторе была поставлена в [1]. В настоящей работе для решения вариационной задачи используется теоретико-групповой подход к построению дифференциальных законов сохранения для двумерных вариационных задач типа Майера [2], основанный на теории Ли – Овсянникова [3, 4] и первой теореме Э. Нётер [5, 6]. Вариационная задача полностью алгоритмизирована: построение оптимального управления свелось к рекуррентному интегрированию двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрешимыми особенностями в точке торможения потока. В примере расчета уравнений оптимального управляемого пограничного слоя на проницаемом круговом цилиндре была обнаружена быстрая сходимость итерационного процесса: с достаточной для практики точностью можно ограничиться оптимальным управлением в первом приближении, которое получено в аналитической форме. При проведении расчетов варьировались температура поверхности, длина пористого участка, а также мощность системы охлаждения; выигрыш в величине теплового потока, который дает оптимальное управление по сравнению с неоптимальным, достигает 57%.

1. Постановка вариационной задачи, необходимые условия экстремума. Уравнения ламинарного пограничного слоя на цилиндрическом теле при продольном обтекании его совершенным газом возьмем в виде [7]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0,\qquad p=\rho RT,\qquad \mu=\mu_{e0}\tau b(\tau)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial x}\right)=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial H}{\partial y}\right)+$$
$$+\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Здесь ось x направлена вдоль контура тела, ось y перпендикулярна оси x по направлению внешней нормали; u, v — проекции вектора скорости на координатные оси; p — давление; ρ, μ и T — плотность, вязкость и температура газа; $H=C_pT+u^2/2$ — полная энтальпия; C_p — теплоемкость при постоянном давлении; R — газовая постоянная; Pr — число Прандтля; $b(\tau)$ — известная функция безразмерной температуры $\tau=T/T_{e0}$; индекс e соответствует параметрам газа на внешней границе пограничного слоя, индекс 0 — в точке полного торможения потока.

Граничные условия зададим в виде

$$u=0,\ v=(m/\rho)_w,\ T=T_w(x)\quad (y=0,\ x>0)$$
$$u=u_e(x),\ T=T_e(x)\quad (y=\infty) \tag{1.2}$$
$$u=u_e(0),\ T=T_e(0),\ (x=0,\ y>0)$$

Здесь $T_w(x)$ — заданная температура наружной стороны обшивки (допускается, что она равна температуре пристеночного слоя газа); $m_w=(\rho v)_w$ — массовый расход вдуваемого газа (того же состава, что и в набегающем потоке) через единицу площади в единицу времени; индекс w соответствует параметрам газа на стенке. Мощность, затрачиваемая системой охлаждения на вдув газа через пористую стенку единичной ширины на участке $[0, x_k]$, с учетом закона Дарси [8] оценивается функционалом

$$N=\int_0^{x_k} a v_w^2\,dx \tag{1.3}$$

где параметр a зависит от толщины стенки, коэффициента проницаемости материала и теплофизических свойств газа в порах.

Ставится следующая вариационная задача. Среди управлений $m_w(x)=(\rho v)_w$ требуется найти такое, которое доставляет минимальное значение количеству тепла

$$Q=\int_0^{x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}dx \tag{1.4}$$

передаваемого в единицу времени от пограничного слоя к обтекаемой поверхности единичной ширины при заданном ограничении на мощность системы охлаждения (1.3) и связях (1.1), (1.2).

Используя преобразования [9—11]

$$s=\frac{1}{l}\int_0^x q\,dx,\qquad t=\frac{u_e\eta}{\sqrt{\nu_{e0}v_{\max}l}},\qquad \eta=\int_0^y\frac{(1-\alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}{\tau}dy$$

$$u^*=\frac{u}{u_e},\qquad w=\sqrt{\frac{v_{\max}l}{\nu_{e0}}}\left[(1-\alpha_e^2)^{-\gamma/(\gamma-1)}u^*\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{v}{\tau u_e}\right]+\frac{tu^*}{u_e}\frac{du_e}{ds}$$

$$\psi=1-\tau-\alpha_e^2u^{*2},\ q=\alpha_e(1-\alpha_e^2)^{\gamma/(\gamma-1)},\ \alpha_e=u_e/v_{\max}$$

систему (1.1) запишем в виде [11]

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial s}+w\frac{\partial u^*}{\partial t}=\frac{d\alpha_e}{ds}\frac{(1-\psi-u^{*2})}{\alpha_e(1-\alpha_e^2)}+\frac{\partial}{\partial t}\left(b(\tau)\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial t}=0 \tag{1.5}$$

$$u^*\frac{\partial\psi}{\partial s}+w\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial t}\left(b(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(b(\tau)\frac{\partial u^{*2}}{\partial t}\right)$$

Граничные условия принимают вид

$$u^*=0,\ w=m(s)/q(s),\ \psi=1-\tau_w\ (t=0) \tag{1.6}$$
$$u^*=1,\ \psi=0\ (t=\infty);\ u^*=1,\ \psi=0\ (s=0)$$

Изопериметрическое условие (1.3) и функционал (1.4) запишутся в виде

$$N^* = \frac{N}{a\nu_{e0}v_{\max}} = \int_0^{s_k} f(1-\psi_w)^2 m^2\, ds \tag{1.7}$$

$$Q^* = \frac{Q}{\sigma} = -\int_0^{s_k}\left(b\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0} ds \tag{1.8}$$

$$f = \frac{1}{\alpha_e(1-\alpha_e^2)^{3\gamma/(\gamma-1)}}$$

$$\sigma = \frac{\mu_{e0}C_pT_{e0}}{\Pr}\sqrt{\frac{v_{\max}l}{\nu_{e0}}}, \qquad s_k = \frac{1}{l}\int_0^{x_k} q\, dx$$

Здесь l — некоторый характерный размер.

Вариационная задача в новых переменных ставится так: среди управления $m(s)$ требуется отыскать такое, которое реализует минимальное знание функционала (1.8) при связях (1.5), (1.6) и изопериметрическом условии (1.7). Использование формализма Лагранжа приводит к следующим уравнениям Эйлера — Лагранжа — Остроградского относительно множителей $\lambda_i(s, t)$ $(i=1, 2, \ldots 5)$ (в дальнейшем индекс звездочка у переменной u опускается)

$$\begin{gathered}
\lambda_1\left(\frac{\partial u}{\partial s}+2\beta u\right)+\lambda_3\left[\frac{\partial\psi}{\partial s}+2\alpha_e^2\left(1-\frac{1}{\Pr}\right)\frac{\partial R_1}{\partial t}\right]-2\lambda_4\alpha_e^2 u\frac{\partial b}{\partial\tau}\frac{\partial u}{\partial t}- \\
-2\lambda_5\alpha_e^2 u\frac{\partial b}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}(\lambda_1 u+\lambda_2)-\frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_1 w+2\alpha_e^2\left(1-\frac{1}{\Pr}\right)\lambda_3 R_1+\lambda_4 b\right]=0 \\
\lambda_1\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_3\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}=0 \\
\lambda_1\beta-\lambda_4\frac{\partial b}{\partial\tau}\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda_3\frac{\partial b}{\partial\tau}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s}(\lambda_3 u)-\frac{\partial}{\partial t}(\lambda_3 w+\lambda_5 b)=0 \\
2\alpha_e^2\left(1-\frac{1}{\Pr}\right)-\lambda_3\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda_4+\frac{\partial}{\partial t}\left[2\alpha_e^2\lambda_3 u\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)+\lambda_1\right]=0 \\
-\lambda_5+\frac{1}{\Pr}\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}=0
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь учтено, что $\tau=\vartheta-\alpha^2=1-\psi-\alpha_e^2u^2$.

Подставляя λ_4 и λ_5 из двух последних в первые три уравнения системы (1.9), получим эквивалентную систему относительно множителей Лагранжа λ_1, λ_2, λ_3

$$\begin{gathered}
2\beta u\lambda_1+\lambda_3\frac{\partial\psi}{\partial s}-u\frac{\partial\lambda_1}{\partial s}-w\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}-\lambda_1\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial s}- \\
-b\left[\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2}+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)u\frac{\partial^2\lambda_3}{\partial t^2}\right]-2\alpha_e^2 u\frac{\partial b}{\partial\tau}\times \\
\times\left\{\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+2\alpha_e^2 u\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\right]\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\Pr}\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}- \\
-\frac{\partial b}{\partial t}\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)u\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\right]=0
\end{gathered} \tag{1.10}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = 0$$

$$\beta\lambda_1 - \frac{\partial b}{\partial \tau}\left\{\left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)u\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\right]\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial s}(\lambda_3 u) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_3 w + \frac{b}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\right) = 0$$

Краевые условия для нее имеют вид

$$\begin{gathered} \lambda_1=0,\ \lambda_3=\mathrm{Pr}\ \ (t=0) \\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=0\ \ (t=\infty) \\ \lambda_1=\lambda_3=0\ \ (s=s_k) \end{gathered} \tag{1.11}$$

Отметим, что множитель Лагранжа $\lambda_3(t, s)$ терпит разрыв первого рода в точке $(s_k, 0)$, в то время как $\lambda_1(t, s)$ является в этой точке непрерывным. Оптимальное управление определяется по формуле

$$m(s)=\lambda_2(s,\ 0)/2\alpha q f(1-\psi_w)^2 \tag{1.12}$$

Так же, как и в [2], можно показать, что вариационная задача оптимального управления пограничным слоем (1.5)—(1.8) при любом распределении скорости на внешней границе и при любой зависимости вязкости от температуры допускает первый интеграл

$$\frac{\partial}{\partial s}(u\lambda_2) + \left[\lambda_1 w + 2\alpha_e^2\left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\lambda_3 R_1 + \lambda_4 b\right]\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial w}{\partial t} + (\lambda_3 w + \lambda_5 b)\frac{\partial \psi}{\partial t} -$$

$$- \frac{\lambda_3}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t} - \left[\lambda_1 - 2\alpha_e^2\left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)u\lambda_3\right]\frac{\partial R_1}{\partial t} = g(s) \tag{1.13}$$

где произвольная функция интегрирования $g(s)\equiv 0$ на отрезке $[0, s_k]$.

Отметим, что первый интеграл, полученный ранее в [2], справедлив только для случая линейной зависимости вязкости от температуры.

Уравнением (1.13) можно заменить первое или третье уравнение системы (1.10), что будет эквивалентно понижению ее порядка (относительно независимой переменной t) на единицу; используя граничные условия для искомых функций и множителей Лагранжа при $t=0$, из (1.13) получим

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \tag{1.14}$$

Равенство (1.14) устанавливает точную явную связь между градиентами множителей Лагранжа на произвольной поверхности при любых числах Прандтля и любой зависимости вязкости от температуры.

2. Алгоритмизация вариационной задачи. Отыскание управления $m(s)$, минимизирующего суммарный тепловой поток (1.8), сводится к совместному интегрированию систем уравнений в частных производных (1.5) и (1.10) с краевыми условиями (1.6) и (1.11), что является весьма сложной проблемой. Положение, к сожалению, осложняется и тем, что не удается найти ни одного автомодельного решения вариационной задачи, удовлетворяющего всем краевым условиям. Попытка найти такое решение даже в более простом случае оптимального управления движением вязкой несжимаемой жидкости оказалась безуспешной [12]. Дело в том, что инвариантные решения (в смысле Ли — Овсянникова [4]) ранга единица существуют для уравнений Прандтля только в силу автоматического удовлетворения «начальному» условию в точке $x=0$; для сопряженной системы новая независимая («групповая») переменная такова, что не удается удовлетворить «начальному» условию в точке $x=x_k$ (задней кромке профиля). Это обстоятельство вызывает (и будет вызывать) большие затруднения при решении вопроса о близости конструируемых (тем или иным способом) приближенных управлений к точному. Другими словами, остается пока довольствоваться эвристическими идеями при построении последовательности оптимальных управлений и соответствующей минимизирующей последовательности, что, впрочем, кажется естественным при решении прикладных задач.

Следуя [13], интегральные соотношения, соответствующие сопряженной системе (1.10), получим в следующем виде:

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 (\lambda_1+\lambda_3\theta H)\,du=\left(b\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2}+w\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}-\lambda_3\frac{\partial\psi}{\partial s}+\frac{\partial b}{\partial t}\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}\right)_{t=0} \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 \lambda_3 u\theta\,du=\beta\int_0^1 \lambda_1\theta\,du+\left(\lambda_3 w+\frac{b}{\Pr}\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\right)_{t=0}-$$

$$-\int_0^1\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)u\frac{\partial\lambda_3}{\partial u}\right]\frac{b^*}{\theta}\,du-\frac{1}{\Pr}\int_0^1\frac{\partial\lambda_3}{\partial u}q^*\,du \tag{2.2}$$

где $b^*(\tau)=\partial b/\partial\tau$, $q^*=b^*\partial\psi/\partial t$, а функции H, b^*/θ, q^* зададим в виде, соответствующем аппроксимирующей системе второго приближения [11]

$$\theta=[\theta_0+(\theta_1-2\theta_0)u]/(1-u),\quad H=(1-u)\,[H_0+2(2H_1-H_0)u]$$

$$\frac{b^*}{\theta}=(1-u)\left[\frac{b_0^*}{\theta_0}+2\left(2\frac{b_1^*}{\theta_1}-\frac{b_0^*}{\theta_0}\right)u\right],\qquad q^*(1-u)\,[q_0^*+2(2q_1^*-q_0^*)u] \tag{2.3}$$

$$H_0=\frac{1}{\theta_0}\left(-\frac{3\omega_0}{\theta_0}+\frac{4\omega_1}{\theta_0}\right),\qquad H_1=-\frac{1}{\theta_1}\frac{\omega_0}{\theta_0},\qquad q_0^*=b_0^*H_0,\qquad q_1^*=b_1^*H_1$$

$$b_0^*=\left.\frac{\partial b}{\partial\tau}\right|_{u=0},\qquad b_1^*=\left.\frac{\partial b}{\partial\tau}\right|_{u=1/2}$$

Здесь функции θ_0, θ_1, ω_0, ω_1 удовлетворяют системе (для удобства аппроксимирующая система записана относительно независимой переменной $x^*=x/l$)

$$\frac{d\theta_0}{dx^*}=18m+6\beta q\left(\frac{7\theta_1}{6}+\frac{9\theta_0}{6}-\frac{5\omega_1}{3}-\frac{4\omega_0}{3}\right)-\frac{32qb_1}{\theta_1}+\frac{34qb_0}{\theta_0}$$

$$\frac{d\theta_1}{dx^*}=12m-12\beta q\left(\frac{\theta_0}{3}+\frac{\theta_1}{2}-\frac{2\omega_1}{3}-\frac{\omega_0}{3}\right)-\frac{16qb_1}{\theta_1}+\frac{20qb_0}{\theta_0}$$

$$\frac{d\omega_1}{dx^*}=6m\frac{\omega_0}{\theta_0}-6\beta q\left(\frac{\omega_0}{6}+\frac{\omega_1}{2}-\frac{2\omega_1^2}{3\theta_1}-\frac{\omega_1^2}{6\theta_0}\right)+$$

$$+\frac{6qb_0\omega_0}{\theta_0^2}+6q\left(1+\frac{1}{\Pr}\right)\left[\frac{b_0}{6\theta_0}\left(\frac{4\omega_1}{\theta_1}-\frac{3\omega_0}{\theta_0}\right)-\frac{2b_1\omega_0}{3\theta_1\theta_0}\right]-$$

$$-\frac{6qb_0}{\Pr\theta_0}\left(\frac{4\omega_1}{\theta_1}-\frac{3\omega_0}{\theta_0}\right)+4q\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\frac{b_1}{\theta_1} \tag{2.4}$$

$$\frac{d\omega_0}{dx^*}=(1-\tau_w)\theta_0'-\tau_w\theta_0$$

$$b_0=b(\tau)\,|_{u=0},\qquad b_1=b(\tau)\,|_{u=1/2},\qquad \beta q=\frac{\alpha_e'}{\alpha_e(1-\alpha_e^2)}$$

Для отыскания оптимального управления аппроксимации множителей Лагранжа $\lambda_1(s, u)$ и $\lambda_2(s, u)$ зададим в виде

$$\lambda_1(s,\ u)=u(1-u)(A_0+A_1u),\qquad \lambda_3(s,\ u)=(1-u)(B_0+B_1u) \tag{2.5}$$

где неизвестные функции $A_0(s)$, $A_1(s)$, $B_0(s)$, $B_1(s)$ определяются в соответствии с интегральными соотношениями (2.1), (2.2), краевым условием $\lambda_3(s, 0)=\mathrm{Pr}$ и следствием из первого интеграла (1.14). В частности, для B_0 имеем $B_0=\mathrm{Pr}$ при $0\leqslant s<s_k$ и $B_0=0$ если $s=s_k$.

Отметим, что для аппроксимаций (2.5) автоматически удовлетворяются граничные условия (1.11) при $t=0$ $(u=0)$ и $t=\infty$ $(u=1)$; для удовлетворения «начальному» условию $\lambda_1(s_k, u)=\lambda_3(s_k, u)=0$ следует положить $A_0(s_k)=A_1(s_k)=B_1(s_k)=0$.

Из (1.14) имеем

$$A_0=\frac{\theta_0H_0}{\mathrm{Pr}}(B_0-B_1). \tag{2.6}$$

Рассмотрим для простоты случай линейной зависимости вязкости от температуры. Подставляя (2.5) в (2.1) и (2.2), с учетом (2.6) после преобразований получим (штрихи означают дифференцирование по $x^*=x/l$)

$$\begin{gathered}A_1'=12\left\{A_1\left(Q-\frac{VN}{U}\right)+B_1\left[R-N'+\frac{N}{U}(U-S)\right]+\right.\\ \left.+B_0\left[P-M'+\frac{N}{U}(Z'-W)\right]+B_0'\left(\frac{ZN}{U}-M\right)\right\}\\ B_1'=\frac{1}{U}[A_1V+B_1(S-U')+B_0(W-Z')-B_0'Z]\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}M=l_0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6\,\mathrm{Pr}}\right)+\frac{l_1}{6},\qquad N=\frac{l_0}{6}\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)+\frac{l_1}{12}\\ P=\frac{l_0}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{2m}{\theta_0}-\beta q\left(1-\frac{\omega_0}{\theta_0}\right)-\frac{2q}{\theta_0^2}\right]-\left(\frac{\omega_0}{\theta_0}\right)'\\ \theta=\frac{2q}{\theta_0^2},\qquad R=-P-\left(\frac{\omega_0}{\theta_0}\right)',\qquad Z=-\frac{\theta_0}{6}+\frac{\theta_1}{3}\\ U=-\frac{\theta_0}{6}+\frac{\theta_1}{4},\qquad V=\beta qU,\qquad S=m-W,\qquad W=m-\frac{q}{\mathrm{Pr}\,\theta_0}+\frac{l_0\beta q}{\mathrm{Pr}}Z\\ l_0=4\frac{\omega_1}{\theta_1}-3\frac{\omega_0}{\theta_0},\qquad l_1=4\left(\frac{\omega_0}{\theta_0}-2\frac{\omega_1}{\theta_1}\right)\\ B_0=\mathrm{Pr}\,(0\leqslant x^*<x_k^*),\qquad B_0=0\,(x=x_k)\end{gathered} \tag{2.8}$$

Решение системы (2.7), где $A_1(x^*)$ и $B_1(x^*)$ терпят разрыв первого рода в точке x_k^*, будем искать в виде

$$A_1=a_1B_0+F,\qquad B_1=b_1B_0+\Phi \tag{2.9}$$

где a_1, F, b_1, Φ — неизвестные пока функции. Подставляя (2.9) в (2.7), получим

$$a_1=-12(M+b_1N),\qquad b_1=-Z/U \tag{2.10}$$

а функции $F(x^*)$ и $\Phi(x^*)$ удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений

$$F'=12\left\{F\left(Q-\frac{NV}{U}\right)+\Phi\left[R-N'+\frac{N}{U}(U'-S)\right]\right\}+$$

$$+12B_0\left[12\left(\frac{NZ}{U}-M\right)\left(Q-\frac{NV}{U}\right)+\frac{Z}{U}\left(\frac{NS}{U}-R\right)+P-\frac{NW}{U}\right] \tag{2.11}$$

$$\Phi'=\frac{1}{U}\left\{FV+\Phi(S-U')+B_0\left[W+12V\left(\frac{NZ}{U}-M\right)-\frac{ZS}{U}\right]\right\}$$

Отметим, что F и Φ непрерывны в точке x_k^*.

Процедуру поиска оптимального управления можно представить в виде алгоритма типа Пикара.

1. Задается оптимальное управление $m_0(x^*)$ в нулевом приближении и интегрируется система (2.4) на отрезке $[x_0^*, x_k^*]$ с начальными условиями

$$\theta_0(x_0^*)=\theta_0^*x_0^*, \quad \theta_1(x_1^*)=\theta_1^*x_0^*, \quad \omega_0^*(x_0^*)=\omega_0^*x_0^*, \quad \omega_1(x_0^*)=\omega_1^*x_0^*$$

где θ_0^*, θ_1^*, ω_0^*, ω_1^* определяются из соответствующей алгебраической системы [11].

2. Система (2.11) интегрируется справа налево с нулевыми начальными условиями.

3. В соответствии с формулой (1.12) находится оптимальное управление $m_1(x^*)$ в первом приближении

$$m_1(x^*)=-\frac{1}{2\alpha qf(1-\omega_0/\theta_0)^2}\left[\frac{A_0}{6}+\frac{A_1}{12}+B_0\left(\frac{l_0}{2}+\frac{l_1}{6}\right)+B_1\left(\frac{l_0}{6}+\frac{l_1}{12}\right)\right]$$

где множитель Лагранжа α определяется в соответствии с изопериметрическим условием (1.7).

4. Снова интегрируется система (2.4) при $m(x^*)\equiv m_1(x^*)$; решаются сопряженные уравнения (2.11), находится оптимальное управление $m_2(x^*)$ во втором приближении и т. д.

Вычислительный процесс заканчивается при обнаружении практической сходимости функционала (1.8).

3. Обтекание кругового цилиндра. Как известно, с приемлемой для практики точностью безразмерное распределение скорости на внешней границе пограничного слоя на прямом круговом цилиндре описывается линейным (относительно центрального угла $\varphi=x^*=x/R$, где R — радиус цилиндра) законом: $\alpha_e=cx^*$, где c — известная постоянная [14].

Для случая обтекания окрестности критической точки при $m_0(x^*)\equiv$ $\equiv$const система (2.11) допускает интегрирование в квадратурах, что позволяет получить первое приближение оптимального управления в аналитическом виде

$$m_1(x^*)=\frac{\Pr(1-\alpha_e^2)^{2\gamma/(\gamma-1)}}{2\alpha U_0(1-\omega_0/\theta_0)^2}\left[(A_1^{(1)}+NB_1^{(1)})+\left(\frac{x^*}{x_k^*}\right)^{-p_1}(A_1^{(2)}+NB_1^{(2)})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^*}{x_k^*}\right)^{-p_2}(A_1^{(3)}+NB_1^{(3)})\right] \tag{3.1}$$

Здесь p_1 и p_2 — действительные корни квадратного уравнения

$$p^2+p[S_0/U_0-1+12(Q_0-N_0)]+12[Q_0(S_0/U_0-1)+P_0]=0 \tag{3.2}$$

В (3.1) и (3.2) введены обозначения

$$M_0=l_0^*\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6\,\mathrm{Pr}}\right),\quad N_0=\frac{l_0^*}{6}\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)+\frac{l_1^*}{12}$$

$$P_0=\frac{l_0^*}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{2m}{\theta_0^*}-1+\frac{\omega_0^*}{\theta_0^*}-\frac{2c}{\theta_0^{*2}}\right),\quad Q_0=\frac{2c}{\theta_0^{*2}}$$

$$R_0=-P_0,\quad Z_0=-\frac{\theta_0^*}{6}+\frac{\theta_1^*}{3},\quad U_0=-\frac{\theta_0^*}{6}+\frac{\theta_1^*}{4}$$

$$W_0=m_0-\frac{c}{\mathrm{Pr}\,\theta_0^*}+\frac{l_0^*}{\mathrm{Pr}}Z_0,\quad S_0=m_0-W_0 \tag{3.3}$$

$$l_0^*=4\frac{\omega_1^*}{\theta_1^*}-3\frac{\omega_0^*}{\theta_0^*},\quad l_1^*=4\left(\frac{\omega_0^*}{\theta_0^*}-2\frac{\omega_1^*}{\theta_1^*}\right)$$

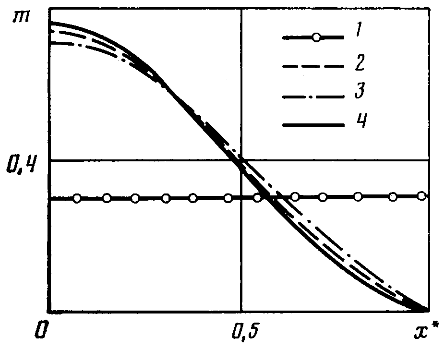
$$A_1^{(1)}=\frac{\gamma^*b+s^*P_0}{p_1p_2},\quad A_1^{(2)}=\frac{p_1a+\gamma^*b+s^*P_0}{p_1(p_1-p_2)}$$

$$A_1^{(3)}=\frac{p_2a+\gamma^*b+s^*P_0}{p_2(p_2-p_1)},\quad B_1^{(1)}=\frac{12\sigma^*}{p_1p_2}$$

$$B_1^{(2)}=\frac{12\sigma^*+p_1s^*}{p_1(p_1-p_2)},\quad B_1^{(3)}=\frac{12\sigma^*+p_2s^*}{p_2(p_2-p_1)}$$

$$a=\gamma^*U_0-s^*N_0,\quad b=S_0-U_0,\quad \sigma^*=s^*Q_0-\gamma^*U_0$$

Из (3.1) следует, что, во-первых, оптимальное управление непрерывно в точке x_k^* слева; во-вторых, это управление будет конечным в точке $x_0^*=0$ только при $p_1<0$ и $p_2<0$.



В качестве примера был проведен вычислительный эксперимент по построению оптимального управления в случае обтекания сверхзвуковым потоком ($M_\infty=7$) прямого кругового цилиндра радиуса $R=0{,}05$ м; параметры стандартной атмосферы соответствовали высоте $H=10\,000$ м. На фигуре представлены оптимальные законы вдува, полученные по схеме последовательных приближений: кривая *4* соответствует оптимальному управлению $m_1(x^*)$, *3* — $m_6(x^*)$; там же представлено управление $m_1(x^*)$, полученное по формуле (3.1) (кривая *2*). Эти зависимости получены для $x_k^*=1{,}0$; $\tau_w=0{,}8$; $N^*=0{,}1842$, что соответствует постоянному (автомодельному) вдуву $m_0(x^*)=0{,}3$ (кривая *1*).

При использовании пикаровской схемы итерации начаты с $m_0(x^*)=0{,}3$; последовательность значений функционала получилась такой: $Q_i^*=3{,}991\cdot10^{-2}$; $2{,}558\cdot10^{-2}$; $2{,}554\cdot10^{-2}$; $2{,}553\cdot10^{-2}$; $2{,}553\cdot10^{-2}$; $2{,}552\cdot10^{-2}$; $2{,}552\cdot10^{-2}$ $(i=1,\ldots,6)$.

Отметим, во-первых, что предельное значение функционала Q_6^* отличается от Q_1^* всего на 0,2%; во-вторых, значение функционала, найденное по формуле (3.1), равно $2{,}554 \cdot 10^{-2}$ и практически совпадает с предельным. Другими словами, при практических расчетах можно ограничиться оптимальным управлением в первом приближении, которое найдено в аналитическом виде (как показали расчеты, этот важный вывод сохраняет свою силу и при других физически допустимых комбинациях параметров x_k^*, τ_w и N^*); при этом выигрыш в значении функционала по сравнению с неоптимальным (автомодельным) вдувом составляет примерно 36% при одной и той же мощности системы охлаждения. Интересно отметить, что этот выигрыш сильно зависит как от протяженности участка вдува (например, при $x_k^*=0{,}1$; $\tau_w=0{,}25$; $N^*=0{,}01799$ выигрыш составляет всего 4%), так и от температурного фактора (например, при $x_k^*=1{,}0$; $\tau_w=0{,}25$; $N^*=0{,}01799$ выигрыш составляет 57%).

Автор благодарит В. Г. Павлова за содержательное обсуждение работы, В. А. Овчинникова и А. Н. Кусюмова — за эффективную помощь при организации вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
2. *Гараев К. Г.* Об одном следствии из теоремы Нетер для двумерных вариационных задач типа Майера // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 448–453.
3. *Lie Sophus.* Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen transformationen. Leipzig: Teubner, 1891. 618 S.
4. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1962. 238 с.
5. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. 1918. S. 235–257. (Рус. перев.: Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 611–630).
6. *Ибрагимов Н. Х.* Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения // Теорет. и мат. физика. 1969. Т. 1. № 3. С. 350–359.
7. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
8. *Белов С. В.* Пористые материалы в машиностроении. М.: Машиностроение, 1981. 247 с.
9. *Дородницын А. А.* Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя // ПМТФ. 1960. № 3. С. 111–118.
10. *Дородницын А. А.* Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 140–173.
11. *Лю-Шень-Цюань.* Расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т. 2. № 5. С. 868–883.
12. *Гараев К. Г., Павлов В. Г.* Групповые свойства уравнений оптимально управляемого пограничного слоя // Изв. вузов. Авиац. техника. 1970. № 4. С. 5–9.
13. *Гараев К. Г., Павлов В. Г., Овчинников В. А.* Оптимизация теплообмена в пограничном слое сжимаемого вязкого газа // Изв. вузов. Авиац. техника. 1984. № 4. С. 18–22.
14. *Краснов Н. Ф.* Аэродинамика тел вращения. М.: Машиностроение, 1964. 572 с.

Казань

Поступила в редакцию
18.V.1987