

УДК 532.517.3.013.4:534.29

## ОБ УПРАВЛЕНИИ РАЗВИТИЕМ ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛОЕ СМЕШЕНИЯ

ВЕРЕТЕНЦЕВ А. Н., РУДЯК В. Я.

В связи с разнообразными практическими приложениями сдвиговых течений в последнее десятилетие широко исследовались различные возможности управления их эволюцией. В частности, для замедления развития неустойчивости в слое смешения его возбуждают на частоте  $f$ , наиболее неустойчивости в слое смешения. В этом случае первичная неустойчивость развивается быстрее, нежели при естественном возбуждении, но зато нарастание субгармонических возмущений замедляется [1]. Последнее связано с тем, что при возбуждении частоты  $f$ , увеличивается отношение амплитуды основной гармоники к амплитуде субгармонических возмущений, что приводит к сужению области их резонансного взаимодействия [2, 3]. Именно это и объясняет хорошо известный факт подавления длинноволновых возмущений коротковолновыми [1, 4, 5]. Напротив, чтобы ускорить развитие слоя смешения, его возбуждают на частоте  $f$ , в несколько раз меньшей  $f$ . [6].

Возбуждение слоя смешения обычно производится вибрирующей ленточкой [1, 7], колебаниями кромки разделительной пластины или сопла [8], посредством акустического поля [9, 10]. По ряду причин в натуральных условиях наиболее предпочтительным является именно последний способ. Поэтому в настоящей работе рассматривается управление вихревыми возмущениями с помощью внешнего акустического поля. Однако в этом случае необходимо описать механизм возбуждения течения звуком, т. е. прежде всего решить задачу о его восприимчивости к внешнему акустическому полю. Эта задача ранее для слоя смешения качественно анализировалась в [11], где было показано, что наиболее чувствительным местом течения с точки зрения возбуждения его звуком являются области наибольших градиентов.

1. Рассмотрим сначала задачу о восприимчивости к звуку слоя смешения, образующегося за острой кромкой твердой полубесконечной пластины, который возбуждается плоской акустической волной частоты  $f$ , падающей под углом  $\varphi_0$  к пластине. Числа Маха течения будем предполагать малыми, а числа Рейнольдса, наоборот, большими. Кроме того, считается, что длина волны генерируемых звуком вихревых возмущений много больше начальной толщины слоя смешения. В этом случае слой смешения можно заменить вихревой пеленой.

Пусть  $h$  — функция, определяющая форму вихревой пелены. Совместим начало декартовой системы координат с кромкой пластины и направим ось  $x$  вдоль по потоку, а ось  $y$  по нормали к пластине. Рассматриваемое течение является потенциальным вне вихревой пелены, поэтому для возмущений скорости можно ввести потенциалы:  $P_1$  при  $y > h$  (величины в этой области будем обозначать индексом 1) и  $P_2$  при  $y < h$  (величинам в этой области соответствует индекс 2).

Если процесс генерации вихревых возмущений установившийся, то вместо  $P_1, P_2$  можно использовать не зависящие от времени комплексные потенциалы  $\Phi_n$  ( $n=1, 2$ ), которые связаны с  $P_1, P_2$  соотношением  $P_n = \text{Re}_j[\exp(-j\omega t)\Phi_n]$ ,  $\omega = 2\pi f$ .

Эксперименты показывают, что генерируемые звуком вихревые возмущения сначала являются двумерными, и только потом на достаточно большом расстоянии от начала слоя смешения начинают проявляться трехмерные эффекты. Кроме того, так как числа Рейнольдса предпола-

гаются достаточно большими, задачу будем решать в невязком приближении. В этом случае, однако, на острой кромке должно выполняться условие Кутта — Жуковского. Итак, будем исходить из двумерных уравнений невязкого сжимаемого газа. Так как генерируемые звуком возмущения обычно малы, эти уравнения можно линеаризовать относительно невозмущенных скоростей  $U_1$ ,  $U_2$  смешивающихся потоков. Тогда в линейном приближении потенциалы  $\Phi_n$  удовлетворяют следующему уравнению, условию непротекания и обычным условиям на вихревой пелене

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} &= \left( \frac{U_n}{c_0} \frac{\partial}{\partial x} - jk \right)^2 \Phi_n \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} &= 0 \quad (y=0, x < 0) \\ y &= h(x, t) = \text{Re}_j[\exp(-j\omega t) \eta] \\ U_n \frac{d\eta}{dx} - j\omega \eta &= \frac{\partial \Phi_n}{\partial y}, \quad U_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - j\omega \Phi_1 = U_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - j\omega \Phi_2 \end{aligned}$$

где  $c_0$  — скорость звука в покоящемся газе,  $k = \omega/c_0$ . В силу условия Кутта — Жуковского первые производные от  $\Phi_n$  на кромке пластины должны быть ограничены.

При малых числах Маха  $M = (U_1 + U_2)/2c_0 = U/c_0$  длина волны возбуждаемых звуком вихревых возмущений оказывается порядка  $U/f$  и много меньше длины акустической волны  $\lambda = c_0/f$ . Следовательно, при  $M \ll 1$  в рассматриваемой задаче появляются два различных по порядку величины масштаба длины: длина акустической волны  $\lambda$  и характерная длина волны вихревых возмущений  $\lambda_r = U/f$ . Это позволяет для решения задачи использовать метод сращиваемых асимптотических разложений [12], следуя которому введем внутренние  $x' = x/\lambda_r$ ,  $y' = y/\lambda_r$  и внешние  $x'' = x/\lambda$ ,  $y'' = y/\lambda$  переменные и безразмерные потенциалы  $\Phi_n'(x', y') = \Phi_n/f\lambda_r^2$ ,  $\Phi_n''(x'', y'') = \Phi_n/f\lambda^2$  соответственно для внутренней и внешней областей. В нулевом приближении по числу Маха потенциал  $\Phi''$ , определенный во всей области, занятой жидкостью, и совпадающий с потенциалами  $\Phi_1'$  и  $\Phi_2''$  в областях их определения, удовлетворяет уравнению Гельмгольца с граничным условием непротекания. Таким образом, во внешней области задача сводится к определению поля звуковой волны, дифрагирующей на острой кромке полубесконечной пластины. Точное решение этой задачи хорошо известно [13]. В окрестности кромки

$$\Phi'' = 4A_* \exp \left[ j \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \sin \left( \frac{\psi_0}{2} \right) \sin \left( \frac{\psi}{2} \right) \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}, \quad A_* = \frac{A}{f\lambda_r^2}$$

где  $\rho$ ,  $\psi$  — полярные координаты с началом на кромке пластины;  $A$  и  $\varphi$  — соответственно амплитуда и фаза падающей волны.

Перейдем теперь к анализу решения во внутренней области. С точностью до членов порядка  $M^2$  потенциалы  $\Phi_n'$  определяются из системы уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2)

$$\frac{\partial^2 \Phi_n'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n'}{\partial y'^2} = 0, \quad n=1, 2 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \Phi_n'}{\partial y'} = 0 \quad y'=0, \quad x' < 0$$

$$\frac{U_n}{U} \frac{d\eta'}{dx'} - 2\pi j \eta' = \frac{\partial \Phi_n'}{\partial y'} \quad (1.2)$$

$$\frac{U_1}{U} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x'} - 2\pi j \Phi_1' = \frac{U_2}{U} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x'} - 2\pi j \Phi_2'$$

Во внутренней области приходим, таким образом, к задаче о развитии в несжимаемой жидкости плоской вихревой пелены, сходящей с острой кромки пластины. Для решения задачи, следуя [14], введем комплексные потенциалы  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ , определенные при  $\text{Im } z > 0$  и связанные с потенциалами  $\Phi_n'$  так:  $\Phi_1' = \text{Re}_i F_1(z)$ ,  $\Phi_2' = \text{Re}_i F_2(\bar{z})$ . Здесь  $z = x' + iy'$ , черта означает комплексное сопряжение. Уравнения (1.1) выполняются, если потенциалы  $F_n$  — аналитические функции комплексной переменной  $z$ . Используя граничные условия (1.2) и условие Кутта — Жуковского, можно найти явный вид этих функций:

$$U_1 \neq U_2, \quad F_n = C_n(1-ij)e^{\alpha z} + \frac{(-1)^n b}{2\Delta U} \left[ \frac{i}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{2\pi U}{\alpha} + jU_n \right) \times \right. \\ \left. \times e^{\alpha z} \text{Erfc}(\sqrt{\alpha z}) - \frac{1}{\sqrt{\alpha^*}} \left( \frac{2\pi U}{\alpha} - jU_n \right) e^{-\alpha^* z} \text{Erfc}(\sqrt{-\alpha^* z}) - \frac{(-1)^n}{2} b \sqrt{-z} \right] \quad (1.3)$$

$$C_n = \frac{(-1)^n b \sqrt{\pi}}{4\Delta U \sqrt{\alpha}} \left( U_n - \frac{2\pi U}{\alpha} j \right), \quad n=1, 2, \quad \Delta U = |U_1 - U_2| \\ U_1 = U_2, \quad F_2 = -F_1 \\ F_1 = e^{\alpha z} \left[ (1-ij)C - \frac{ib}{2\sqrt{\alpha}} \text{Erfc}(\sqrt{\alpha z}) \right] + \frac{b}{2} \sqrt{-z} \quad (1.4)$$

$$\alpha = 2\pi U \frac{\Delta U + 2Uj}{U_1^2 + U_2^2}, \quad \text{Erfc}(x) = \int_x^\infty dt e^{-t^2}, \quad C = j \frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\alpha}}$$

Здесь звездочка означает комплексное сопряжение относительно мнимой единицы  $j$ .

Постоянная  $b$  определяется из условия сращивания внутреннего и внешнего решений в области, где возмущения скорости затухают

$$\lim_{\rho' \rightarrow \infty} \Phi'(\rho', \psi) = \lim_{\rho'' \rightarrow 0} \Phi''(\rho'', \psi), \quad |\psi| > \arctg \beta \\ b = 8A_* \sin\left(\frac{\psi_0}{2}\right) \sqrt{M} \exp\left[j\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad \beta = \frac{\Delta U}{2U} \quad (1.5)$$

С помощью формул (1.3), (1.4) можно определить разрыв продольной компоненты скорости на кромке пластины и, следовательно, интенсивность  $\gamma(t)$  сходящего с нее вихревого слоя. Если изменение интенсивности вихревого слоя вызывается только внешними акустическими колебаниями частоты  $f$ , то

$$\gamma(t) = U_2 - U_1 + A_f \cos(2\pi ft + \varphi_f) \\ A_f = \frac{\pi U |b|}{\sqrt{4(1+\beta^2)}} \sin\left[\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{\pi}{4}\right], \quad \varphi_f = \frac{\pi}{4} - \text{Arg } b$$

Таким образом, в линейном приближении влияние акустического поля на течение в слое смешения сводится к генерации на кромке вихревых возмущений с амплитудой  $A_f$  и фазой  $\varphi_f$ , усиливающихся при  $U_1 \neq U_2$  вниз по потоку.

2. Развитым выше методом может быть решена и более сложная задача о восприимчивости к акустическим возмущениям слоя смешения дозвуковой струи, истекающей со скоростью  $U_2$  из круглой цилиндрической трубы диаметром  $d$  в спутный поток, движущийся со скоростью  $U_1$ . Будем считать, что акустические возмущения вызываются плоской гармонической волной с потенциалом скорости  $A \exp[j(kx - 2\pi ft + \varphi)]$ , распространяющейся по трубе по направлению к ее открытому концу. Действи-

тельно, при малых числах Маха здесь также можно использовать метод сращиваемых асимптотических разложений. В результате во внешней области рассматриваемая задача, как и предыдущая, сводится к чисто акустической задаче о дифракции звуковой волны, но теперь уже распространяющейся в цилиндрическом волноводе. Точное решение этой задачи также известно [15]. Пользуясь им, нетрудно установить, что в окрестности кромки трубы потенциал внешнего решения  $\Phi''$  определяется формулой

$$\Phi'' = A_* \text{He} \exp \left[ j \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \times \\ \times \sin \left( \frac{\psi}{2} \right) \sqrt[3]{\frac{8\rho(-R)}{\pi d}}$$

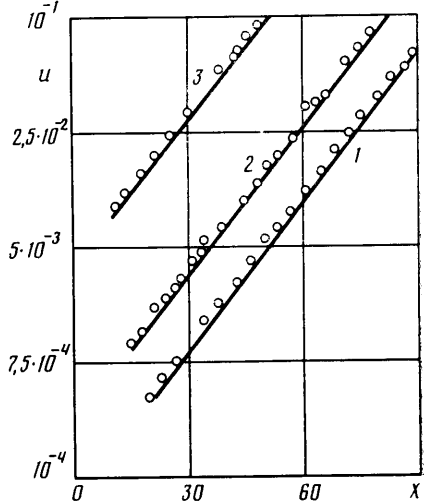
где  $\text{He} = kd/2$  — число Гельмгольца;  $\rho, \psi$  — полярные координаты с началом на кромке трубы, расположенные в плоскости  $(x, r)$  цилиндрической системы координат  $(x, r, \vartheta)$ ;  $R$  — коэффициент отражения акустической волны от открытого конца трубы, эта величина является известной функцией числа Гельмгольца [15].

Если ограничиться случаем коротковолновых (по сравнению с диаметром трубы) вихревых возмущений (число Струхала  $St_d = df/U \gg 1$ ), тогда решение во внутренней области с точностью до членов порядка  $M^2$  и в нулевом приближении по  $St_d^{-1}$ , по-прежнему будет удовлетворять уравнениям (1.1) с граничными условиями (1.2). Единственное различие состоит в том, что теперь  $y' = r' - St_d/2$ . В результате для потенциалов  $F_1, F_2$  имеем все те же выражения (1.3) и (1.4), но только с другой постоянной

$$b = A_* \sqrt[3]{32 \text{He} M(-R)} \exp [j(\varphi + \pi/2)] \quad (2.1)$$

Рассмотренной задаче хорошо соответствуют условия проведения эксперимента Фреймута [16], где истекающая из круглой трубы струя возбуждалась акустическими возмущениями заданной интенсивности и частоты. Эти возмущения генерировались источником звука, расположенным внутри трубы. На фиг. 1 сопоставлены результаты расчетов (сплошные линии) максимальных значений пульсаций продольной компоненты скорости  $u'_m$  с экспериментальными данными [16] на различных расстояниях  $X = x/\Theta_0$  от среза сопла и при разных уровнях звукового давления  $L = 70, 80, 100$  дБ (кривые 1–3). Здесь  $\Theta_0$  — характерное значение толщины потери импульса вблизи среза сопла,  $u = u'_m/U_2$  ( $U_1 = 0$ ). В иллюстрируемом примере  $M = 0,01666$ ;  $St_d = 7,74$ ;  $St_\Theta = \Theta_0/\lambda_r = 0,0236$ ;  $Re_\Theta = U\Theta_0/\nu = 61$ . Во всех случаях расчетные и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются между собой.

3. Трудности управления развитием слоя смещения в реальных условиях связаны с тем, что спектр внешних возмущений в общем случае оказывается сплошным, причем амплитуды и фазы возмущений не известны. По этой причине, по-видимому, наиболее перспективным способом управления слоем смещения является способ с предварительным искусственным возбуждением выделенной гармоники с детерминированными амплитудой и фазой. Если эта гармоника доминирует в спектре возмущений, то именно она будет определять характер развития неустойчивости течения. Воздействуя на возбужденную гармонику внешним возмущением, например акустическим, тем самым будем управлять и эволюцией течения. Именно такой способ управления развитием неустойчивости в пограничном слое предлагался в [17].



Фиг. 1

В дальнейшем рассматриваются различные варианты конкретной реализации подобного способа управления слоем смещения, образующимся за острой кромкой полубесконечной пластины или сопла. При этом управляемые возмущения возбуждаются вибрациями кромки, а управляющие — внешним акустическим полем. Начальные амплитуды этих возмущений предполагаются большими по сравнению с амплитудами фоновых возмущений, которые по этой причине вообще не учитывались.

С целью упрощения задачи далее рассматривается не слой смещения, а более простое течение — сдвиговой слой, в котором твердые границы отсутствуют, а само течение уже считается периодическим в пространстве (вдоль оси  $x$ ). Рассматриваемая граничная задача тогда переходит в задачу Коши. Начальное распределение завихренности в сдвиговом слое получается из распределения завихренности в начале слоя смещения с помощью преобразования Рэлея:  $x_* = x - Ut$ ,  $y_* = y$ ,  $t_* = x/U$ , где  $x_*$ ,  $y_*$ ,  $t_*$  — новые независимые переменные, относящиеся к сдвиговому слою. Из результатов разд. 1, 2 следует, что влияние внешнего акустического поля сводится к генерации на кромке пластины (сопла) вихревых возмущений, что в свою очередь приводит к возмущению начального распределения завихренности в сдвиговом слое. Кроме того, вибрации кромки приводят к возмущению ее формы. В результате для начального распределения завихренности в сдвиговом слое имеем следующее выражение:

$$\omega = \gamma(-x_*/U)\chi[y_* - h_0(-x_*/U), \Delta], \quad t_* = 0, \quad (3.1)$$

где  $\Delta$  — начальная толщина слоя смещения, обезразмеренная на  $\lambda_r$ ;  $\chi$  — нормированная на единицу функция распределения завихренности, сходящаяся при  $\Delta \rightarrow 0$  к  $\delta$ -функции;  $h_0(t)$  — закон движения кромки.

Пусть управляемые возмущения вводятся на частоте  $f_0$  вибрациями кромки по закону  $h_0(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ . Задача управления эволюцией слоя смещения будет решена, если с помощью внешнего акустического поля частоты  $f$  удастся ослабить или наоборот усилить развитие неустойчивости на частоте  $f_0$ . Это можно сделать несколькими способами, простейшими из которых является интерференционный. В этом случае управляющее возмущение, генерируемое на частоте  $f_0$ , накладывает на управляемое и в зависимости от разности фаз усиливает или ослабляет последнее. Условия подавления неустойчивости в сдвиговом слое можно получить из анализа линейной задачи для предельного случая вихревой пелены ( $\Delta = 0$ ). В самом деле, возмущение формы вихревой пелены описывается функцией  $h(x_*, t_*)$ , для которой в линейном приближении справедливо выражение

$$h(x_*, t_*) = (C_{11}e^{\sigma t_*} + C_{12}e^{-\sigma t_*}) \cos\left(\frac{2\pi x_*}{\lambda_r}\right) + (C_{21}e^{\sigma t_*} + C_{22}e^{-\sigma t_*}) \sin\left(\frac{2\pi x_*}{\lambda_r}\right)$$

где  $\sigma = \pi\Delta U/\lambda_r$ ;  $C_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — постоянные, зависящие от амплитуд и фаз как управляемых, так и управляющих возмущений. Развитие неустойчивости, очевидно, подавляется, если  $C_{11} = C_{21} = 0$ . Используя выражения для  $C_{11}$  и  $C_{21}$ , условия подавления неустойчивости можно записать в явном виде

$$A_f = 4\pi\beta f A_0, \quad \varphi_f = \varphi_0 + \pi/2 \quad (3.2)$$

При переходе к слою конечной толщины с гладким распределением завихренности условия подавления неустойчивости аналитически получить уже не удастся. Эти условия, однако, можно найти с помощью численных экспериментов. В настоящей работе рассматривался сдвиговой слой с толщиной  $\Delta = 0,0636$ . Фазовые соотношения здесь остаются такими же, как в (3.2), но необходимое для подавления неустойчивости значение амплитуды  $A_f$  получается несколько большим  $A_f = 4,222\pi\beta f A_0$ .

Численное решение задачи выполнялось обобщенным методом дискретных вихревых частиц [18]. Начальные координаты вихревых частиц  $x_\alpha^0, y_\alpha^0$  задавались соотношениями:  $x_\alpha^0 = X_\alpha, y_\alpha^0 = A_0 \cos(2\pi f_0 X_\alpha / U - \varphi_0)$ , где  $X_\alpha$  — невозмущенная координата вихревой частицы  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  — число вихревых частиц). Циркуляции  $\Gamma_\alpha$  находились по начальному распределению завихренности (3.1), так что

$$\Gamma_\alpha = \frac{U_2 - U_1}{N_1} + \frac{A_f}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{N_1}\right) \cos\left(2\pi \frac{X_\alpha}{\lambda_r} - \varphi_f\right)$$

где  $N_1$  — число вихревых частиц на единице длины.

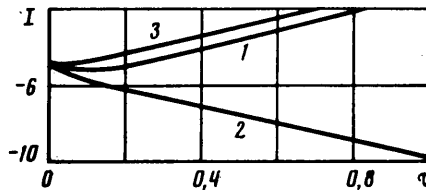
Уравнения движения вихревых частиц [18] решались методом Рунге-Кутты второго порядка точности. Точность решения уравнений движения контролировалась по выполнению законов сохранения. При этом импульс сохранялся с большой точностью порядка  $10^{-9}$ , а относительная погрешность несохранения энергии не превышала нескольких процентов.

На фиг. 2 представлена зависимость логарифма обезразмеренной на  $U^2$  энергии пульсаций продольной скорости (на частоте  $f$ )  $E_f$  от  $\tau = t_* \Delta U / 2\lambda_r = x\beta / \lambda_r, I = \lg(E_f / U^2)$ .

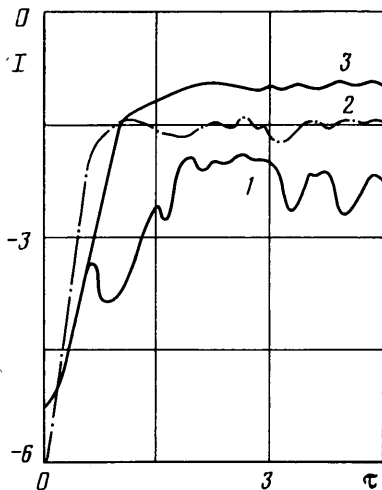
Энергия пульсаций определялась следующим образом:  $E_f = \langle u_f'^2 \rangle / 2\theta_0$ , здесь угловые скобки означают интегрирование по  $y$ . Кривая 1 соответствует развитию возмущения без акустического поля, а кривые 2, 3 — при его наличии, 2 — ослабление возмущения (см. (3.3)), а 3 — наоборот, его усиление. В последнем случае  $A_f$  снова определяется формулой (3.3), но теперь  $\varphi_f = \varphi_0 - \pi/2$ .

Характер развития вторичной неустойчивости существенно зависит от амплитуд основной гармоники и субгармоники и разности их фаз [3]. Это позволяет сформулировать иной способ управления развитием неустойчивости. В частности, развитие неустойчивости на частоте  $f_0$  можно подавить, если возбудить акустические колебания на частоте  $f = 2f_0$ , выбрав  $\varphi_f = 2\varphi_0 - \pi$ . Амплитуда  $A_f$  при этом может изменяться в достаточно широких пределах, необходимо только, чтобы она была не слишком малой относительно  $A_0$ . При таком способе возбуждения течения первичная неустойчивость развивается на частоте  $f$ . Вторичная же неустойчивость на субгармонической частоте  $f/2 = f_0$  подавляется.

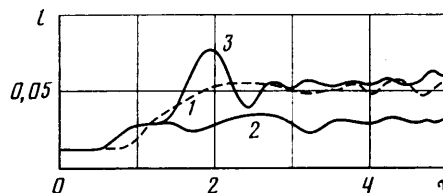
На фиг. 3 показан характер изменения энергии на частотах  $f_0$  и  $2f_0$  при наличии акустического поля, соответственно кривые 1 и 2, и здесь



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

же показано изменение энергии на частоте  $f_0$ , когда акустическое поле отсутствует, — кривая 3.

На начальном этапе энергия пульсаций скорости на частоте  $f_0$  нарастает одинаково как в присутствии акустического поля, так и без него (линейная стадия). Однако как только энергия пульсаций скорости на частоте  $2f_0$  становится порядка 1% энергии невозмущенного течения, рост энергии пульсаций на частоте  $f_0$  существенно замедляется. Особенно важно, что, начиная с  $\tau=2$ , энергия в среднем начинает падать и не превышает 1%. Последнее и обуславливает тот факт, что спаривание первичных вихревых структур теперь уже не происходит.

Варьируя фазу внешнего акустического поля и тем самым фазу  $\varphi_f$ , можно управлять развитием вторичной неустойчивости. Это позволяет, в частности, существенно изменять интегральные характеристики исследуемого течения. В качестве примера на фиг. 4 показано изменение безразмерной толщины потери импульса  $l=\Theta/\lambda_r$ : 1 — без акустики, 2 и 3 — с возбуждением акустических возмущений на частоте  $2f_0$  при  $\varphi_f$ , соответственно равном  $(2\varphi_0-\pi)$  и  $2\varphi_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zaman K. B. M. Q., Hussain A. K. M. F. Turbulence suppression in free shear flows by controlled excitation // J. Fluid Mech. 1981, V. 103, P. 133–159.
2. Kelly R. E. On the stability of an inviscid shear layer which is periodic in space and time // J. Fluid. Mech. 1967, V. 27, Pt 4, P. 657–689.
3. Веретенцев А. Н., Рудяк В. Я. О процессах образования и эволюции вихревых структур в сдвиговых слоях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 31–37.
4. Гиневский А. С., Власов Е. В., Колесников А. В. Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение, 1978. 177 с.
5. Герценштейн С. Я., Олару И. И., Рудницкий А. Я., Сухоруков А. Н. О развитии конечно-амплитудных двумерных и трехмерных возмущений в струйных течениях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 8–19.
6. Ho C.-M., Huang L.-S. Subharmonics and vortex merging in mixing layers // J. Fluid Mech. 1982, V. 119, P. 443–473.
7. Zhang Y. Q., Ho C.-M., Monkewitz P. The mixing layer forced by fundamental and subharmonic // Laminar-Turbulent Transition. B.: Springer-Verlag, 1985. P. 385–395.
8. Oster D., Wygnanski I. The forced mixing layer between parallel streams // J. Fluid Mech. 1982, V. 123, P. 91–130.
9. Власов Е. В., Гиневский А. С. Когерентные структуры в турбулентных струях и следах // Итоги науки и техники, Сер.: Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 20. С. 3–84.
10. Miksad R. W., Jones F. L., Powers E. J. Experiments on nonlinear interactions in wake transition // Laminar-Turbulent Transition. B.: Springer-Verlag, 1985. P. 397–409.
11. Mungur C. J. On the sensivity of the shear layers to sound // AIAA Paper. 1977. № 1369. 9 p.
12. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
13. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 323 с.
14. Möhring W. On flows with vortex sheets and solid plates // J. Sound. Vibrat. 1975. V. 38, № 3, P. 403–412.
15. Levine H., Schwinger J. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe // Phys. Rev. 1948, V. 73, № 4, P. 383–406.
16. Freymuth P. On transition in a separated laminar boundary layer // J. Fluid Mech. 1966, V. 25, Pt 4, P. 683–704.
17. Бардаханов С. П., Довгаль А. В., Качанов Ю. С. и др. Акустическое управление развитием возмущений в пограничном слое // Уч. зап. ЦАГИ, 1986. Т. 17. № 1. С. 41–46.
18. Веретенцев А. Н., Рудяк В. Я., Яненко Н. Н. О построении дискретных вихревых моделей течений идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 1. С. 103–113.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
28.V.1987