

УДК 532.516.013.4

РЭЛЕЕВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАПИЛЛЯРЕ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРОЦЕССУ ОБРАЗОВАНИЯ ОСТАТОЧНОЙ НЕФТИ

ГАЛИНА И. Л.

При вытеснении нефти водой из пористой среды процесс образования остаточной нефти может определяться не только строением пор и свойствами вытесняющих жидкостей, но также механизмом вытеснения, который может возникнуть при вытеснении нефти водой из смачиваемых коллекторов. Поперечное сечение поры, как правило, не гладкое, а имеет в связи с шероховатостью поверхности угловые точки. В том случае, когда в пористой среде до начала вытеснения уже присутствует нефть и вода, к этим угловым точкам примыкает водная фаза, а нефть занимает внутреннюю часть поры. При низких скоростях вытеснения распространение воды происходит вдоль этих водяных пленок. Подобное явление наблюдается и в том случае, когда нефть, первоначально полностью занимающая поры, вытесняется водой в процессе капиллярной пропитки из сильно смачиваемых водой коллекторов. Тогда помимо основного течения вода перемещается впереди мениска, разделяющего две среды через углы пор, отесняя нефть в центр поры [1]. Однако при более высоких скоростях вытеснения это явление не наблюдается, времени на то, чтобы сработал этот механизм, недостаточно и фронт вытеснения — капиллярный мениск везде контактирует со стенками пор. Таким образом, рассматриваемое явление связано с формированием в капилляре кольцевого слоя воды, охватывающего нефтяную фазу. Образующаяся нить нефти под действием капиллярных сил может терять устойчивость и разбиваться на капли остаточной фазы, причем причиной потери устойчивости может служить случайное отклонение радиуса нефтяного цилиндра от своего среднего значения.

Эта проблема имеет своим аналогом следующую: известно, что в воздухе тонкая струя жидкости распадается на капли даже при небольших скоростях движения. Анализ этого явления дал Рэлея [2], но впервые вязкость двух фаз — струи и окружающей жидкости — учтена в [3].

В качестве обоснования модели можно указать на то обстоятельство, что при проведении опытов на прозрачных микромоделях заземление остаточной нефти за счет потери устойчивости рассматривалось как один из вероятных механизмов, причем в [4] упомянуто на возможность объяснения этого явления по схеме, предложенной в [3].

Полагаем, что вытеснение нефти водой происходит с небольшой скоростью и относительной скоростью перемещения фаз можно пренебречь. Нефть и воду считаем несжимаемыми вязкими жидкостями. В качестве исходного состояния рассмотрим равновесие под действием капиллярных сил нефтяного цилиндра радиуса a , окруженного водной фазой внутри цилиндрической трубки радиуса $a+h$ (фиг. 1). Считая деформации поверхности раздела малыми по сравнению с начальным радиусом нефтяного цилиндра, ограничимся постановкой задачи об устойчивости в рамках линейной теории. Задача осесимметрическая. Для каждой из двух фаз — нефти (γ_1, ρ_1) и воды (γ_2, ρ_2) — имеют место уравнения движения, неразрывности и следующие граничные условия, записанные в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

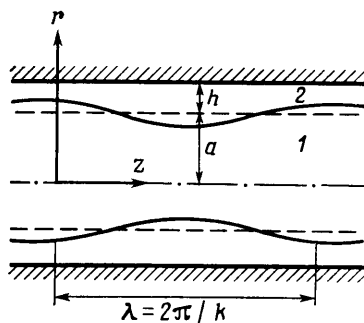
$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$r=a+h, \quad u_2=w_2=0; \quad r=a, \quad u_1=u_2, \quad w_1=w_2, \quad \tau_1=\tau_2,$$

$$\Delta p_{rr} = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

Здесь $\gamma = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости, u, w — компоненты скорости по осям r и z , T — поверхностное натяжение, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности раздела

$$\tau = \gamma \rho \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \Delta p_{rr} = (p_{rr})_2 - (p_{rr})_1, \quad p_{rr} = -p + 2\gamma \rho \frac{\partial u}{\partial r}$$



Фиг. 1

Уравнение неразрывности (2) удовлетворяется введением функции тока ψ

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4)$$

Исключая из (1) давление p и учитывая выражение компонент скорости через функцию тока (4), можно получить следующее линейаризованное уравнение для функции тока [3]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \gamma D \right) D\psi = 0, \quad D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

Поскольку левая часть уравнения (5) является произведением двух линейных операторов, его решение ищется в виде $\psi = f_1 + f_2$, где f_1 и f_2 удовлетворяют уравнениям

$$Df_1 = 0, \quad Df_2 - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Ищем решение уравнений (6) в виде $f_1 = \varphi_1(r) e^{i(\omega t + kz)}$; $f_2 = \varphi_2(r) e^{i(\omega t + kz)}$.

Выражение для функции тока ψ , дающей решение системы (1), следующее:

$$\psi = \{ [A_1 r I_1(kr) + B_1 r K_1(kr)] + [A_2 r I_1(qr) + B_2 r K_1(qr)] \} e^{i(\omega t + kz)} \quad (7)$$

$$q = k^2 + i\omega/\gamma$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 постоянные; $I_1(x), K_1(x)$ — бесселевы функции мнимого аргумента.

Учитывая ограниченность скорости на оси трубы, получаем из (7) для нефти и воды соответственно

$$\psi_1 = r [A_1 I_1(kr) + A_2 I_1(k_1 r)] e^{i(\omega t + kz)} \quad (8)$$

$$k_1^2 = k^2 + i\omega/\gamma_1$$

$$\psi_2 = r[A_3 I_1(kr) + A_4 I_1(k_1' r) + A_5 K_1(kr) + A_6 K_1(k_1' r)] e^{i(\omega t + kz)} \quad (9)$$

$$k_1'^2 = k^2 + i\omega/\gamma_2$$

Для определения шести постоянных $A_1 - A_6$, входящих в выражения (8), (9), необходимо использовать граничные условия (3). При этом давление p выражается из второго уравнения системы (1), а главные радиусы кривизны поверхности раздела R_1 и R_2 — через смещение границы раздела

$$\xi = \int \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} dt$$

Применение граничных условий приводит к однородной системе шести линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $A_1 - A_6$. Эта система имеет нетривиальное решение только если определитель соответствующей матрицы C шестого порядка равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & I_1(k(a+h)) & I_1(k_1'(a+h)) & K_1(k(a+h)) & K_1(k_1'(a+h)) \\ 0 & 0 & -kI_0(k(a+h)) - k_1'I_0(k_1'(a+h)) & kK_0(k(a+h)) & k_1'K_0(k_1'(a+h)) \\ I_1(ka) & I_1(k_1a) & -I_1(ka) & -I_1(k_1'a) & -K_1(ka) & -K_1(k_1'a) \\ -kI_0(ka) & -k_1I_0(k_1a) & kI_0(ka) & k_1'I_0(k_1'a) & -kK_0(ka) & -k_1'K_0(k_1'a) \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$C_{51} = 2k^2\gamma_1\rho_1 I_1(ka); \quad C_{52} = (k_1'^2 + k^2)\gamma_1\rho_1 I_1(ka); \quad C_{53} = -2k^2\rho_2\gamma_2 I_1(ka) \\ C_{54} = -(k^2 + k_1'^2)\rho_2\gamma_2 I_1(k_1'a); \quad C_{55} = -2k^2\gamma_2\rho_2 K_1(ka); \quad C_{56} = -(k^2 + k_1'^2)\rho_2\gamma_2 K_1(ka)$$

$$C_{61} = I_0(ka)\rho_1(2k^2\gamma_1 + i\omega) + I_1(ka) \left[\frac{Tk}{i\omega a^2} (k^2 a^2 - 1) - \frac{2k\gamma_1\rho_1}{a} \right]$$

$$C_{62} = I_0(k_1a)2kk_1\gamma_1\rho_1 + I_1(ka) \left[\frac{Tk(k^2 a^2 - 1)}{i\omega a^2} - \frac{2k\gamma_1\rho_1}{a} \right]$$

$$C_{63} = -I_0(ka)\rho_2(2k\gamma_2 + i\omega) + I_1(ka) \frac{2k\gamma_2\gamma_2}{a}$$

$$C_{64} = I_0(k_1'a)2k_1'\gamma_2\rho_2 - I_1(k_1'a) \frac{2k\gamma_2\rho_2}{a}; \quad C_{65} = K_0(ka)\rho_2(2k^2\gamma_2 - i\omega) +$$

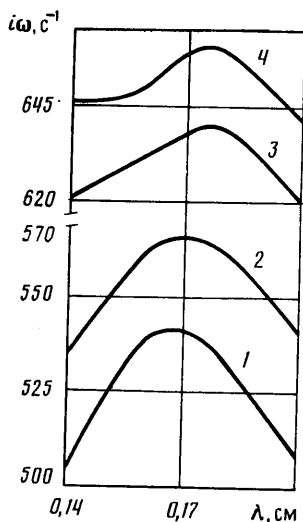
$$+ K_1(ka) \frac{2k\gamma_2\rho_2}{a}; \quad C_{66} = K_0(k_1'a)2kk_1'\gamma_2\rho_2 - K_1(k_1'a) \frac{2k\gamma_2\rho_2}{a}$$

Полученное дисперсионное уравнение (10) служит для определения зависимости инкремента $i\omega$ от волнового числа $k = 2\pi/\lambda$.

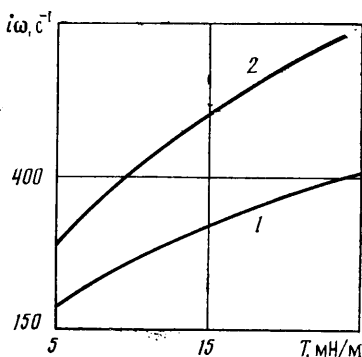
Сложность рассмотрения этого уравнения состоит в том, что величины $i\omega$ и k входят в аргументы бесселевых функций. Задавая величину k из некоторого диапазона (фиг. 2), можно численно определить один из возможных корней уравнения (10) — величину $i\omega$, имеющую действительное значение, решая это уравнение, например, методом хорд. Колебания (7) пропорциональны величине $e^{i(\omega t + kz)}$, т. е. являются функциями, периодическими по z ; в силу принятых предположений они проявляются в симметричных относительно оси z утолщениях и сжатиях нефтяного цилиндра (фиг. 1). Аналогично результатам рассмотрения линейной задачи об устойчивости струи в безграничной среде [3] будем полагать, что найденным положительным значениям $i\omega$ (фиг. 2) соответствуют колебания, приводящие к распаду струи, причем решающими становятся наиболее быстро растущие колебания. Соответствующая этому максимальному значению $i\omega$ длина волны $\lambda = 2\pi/k$ определяет объем жидкости, заключен-

ный в нефтяном цилиндре, и, следовательно, объем капель, на которые он распадается.

Результаты решения уравнения (10) отображены на фиг. 2. Здесь представлен случай, когда нефтяной цилиндр с радиусом $a=0,2$ мм находится в трубке радиуса $r=0,3$ мм. Поверхностное натяжение $T=25$ мН/м.



Фиг. 2



Фиг. 3

На чертеже показаны найденные из уравнения (10) значения инкремента $i\omega$ для различных длин волн λ . Кривые 1–4 соответствуют нефтям различной вязкости. Для кривой 1: $\mu_1=0,5$ мПа·с, $\rho_1=0,7$ г/см³; для кривых 2–4 $\rho_1=0,84$ г/см³; $\mu_1=1,15; 5; 10$ мПа·с соответственно.

Из фиг. 2 видно, что зависимость $i\omega=f(k)$ имеет выраженный максимум.

Интересно сравнить поведение нефтяного цилиндра, окруженного водой, в неограниченной среде и в капилляре. Решение для неограниченной среды получим, положив в (9) $A_3=A_4=0$ и исключив из граничных условий (3) условия на стенке трубы при $r=a+h$. Это равносильно исключению в определителе (10) первой, второй строки и третьего, четвертого столбца. В качестве контрольного примера рассмотрен случай потери

μ_1 , мПа·с	ρ_1 , г/см³	I				II		
		λ , см	λ/a	λ/r	$i\omega$, с⁻¹	λ , см	λ/a	$i\omega$, с⁻¹
0,5	0,7	0,167	8,37	5,57	542	0,164	8,23	1305
1,15	0,84	0,171	8,54	5,7	566	0,169	8,46	—
10	0,86	0,177	8,83	5,89	661	0,1736	8,68	710
15	0,86	0,177	8,85	5,9	661	0,176	8,8	693

устойчивости водяной струей радиуса $a=0,013$ см в воздухе. В [5] указано, что критическое значение длины волны, вызывающей распад струи, $\lambda=0,12$ см, а экспериментальное значение $\lambda=0,08-0,1$ см. При расчете этого примера получено критическое значение $\lambda=0,1207$ см.

В таблице рассмотрено два случая: I — распад нефтяного цилиндра радиуса $a=0,2$ мм, окруженного водой в трубке $r=0,3$ мм; II — распад струи нефти радиуса $a=0,2$ мм в воде; в обоих случаях $T=25$ мН/м. Для нефтей различной вязкости μ_1 и плотности ρ_1 приведены максимальные значения инкремента роста возмущений $i\omega$, соответствующая ему критическая длина волны λ и безразмерные отношения λ/a , λ/r .

Сопоставляя эти результаты, можно сделать следующие выводы: инкремент роста максимального возмущения в капилляре по абсолютной величине меньше, чем в безграничной среде. С увеличением вязкости нефтяного цилиндра в безграничной среде инкремент роста уменьшается, длина волны наиболее быстро растущего возмущения при этом несколько увеличивается. В капилляре с ростом вязкости нефти происходит увеличение инкремента $i\omega$, т. е., наоборот, возможность к разбиению на капли за счет потери устойчивости активизируется. Однако в пределе, как следует из таблицы, при вязкости нефти $\mu_1 = 10,15$ мПа·с инкременты роста в безграничной среде и капилляре сближаются.

Относительно критической длины волны при распаде струи нефтяной фазы в воде и трубке можно заключить, что наличие стенки увеличивает длину волны, вызывающую распад струи.

На фиг. 3 показано влияние поверхностного натяжения на инкремент роста, соответствующего длине волны максимальной неустойчивости. Радиус капилляра $r = 0,3$ мм, $\mu_1 = 5$ мПа·с, $\rho_1 = 0,84$ г/см³, однако толщина водной прослойки, отделяющей нефтяной цилиндр от стенки капилляра, меняется. Кривой 1 соответствует радиус нефтяного цилиндра $a = 0,25$ мм, кривой 2 — $a = 0,2$ мм. Уменьшение толщины прослойки (кривая 1) приводит к тому, что рост возмущений происходит медленнее. При этом длина волны максимальной неустойчивости несколько увеличивается.

В обоих случаях увеличение поверхностного натяжения приводит к увеличению инкремента роста возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lenormand R., Zarcone C., Sarr A. Mechanisme of displacement of one fluid by another in a network of capillary ducts // J. Fluid Mech. 1983. V. 135. P. 337–353.
2. Рэлея Д. В. Теория звука. Т. 2. М.: Госэнергоиздат, 1955. 476 с.
3. Tomotika S. On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid, surrounded by another viscous fluid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1935. V. 150. № 870. P. 322–337.
4. Wardlaw N. C. The effects of geometry, wettability, viscosity and interfacial tension on trapping in single pore-throat pairs // J. Canad. Petrol. Technol. 1982. V. 21. № 3. P. 21–27.
5. Goldin M., Jerushalmi J., Pfeffer R., Shinnar R. Breakup of a laminar capillary jet of a viscoelastic fluid // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. Pt 4. P. 689–711.

Москва

Поступила в редакцию
1.IX.1986