

УДК 532.516.013.4

**О СТАБИЛИЗАЦИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ
В КАНАЛЕ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ**

ГАНИЕВ Р. Ф., УКРАИНСКИЙ Л. Е., УСТЕНКО И. Г.

Рассматривается устойчивость к малым возмущениям течения Пуазейля в плоском канале, стенками которого являются упругие пластинки. Для описания динамики стенок использовалась моментная теория тонких пологих пластинок. Устойчивость течения Пуазейля относительно малых плоских возмущений, направление распространения которых параллельно потоку, рассматривалось рядом авторов, предложивших различные модели податливой границы. Так, в [1] податливая граница моделировалась заданием отношения давления на поверхности к ее деформации. Модель границы, описываемая уравнением колебания мембраны, была предложена в [2], где было установлено, что податливость стенок способствует устойчивости течения и теорема Сквайра [3] неприменима. Однако никакого анализа косых волн сделано не было.

Течение Пуазейля между упругими пластинами было рассмотрено в [4]. Однако были исследованы только двумерные плоские возмущения для отдельных значений упругости пластинки. Исчерпывающего анализа влияния упругости на произвольные возмущения до настоящего времени, насколько известно авторам, не проведено. В данной работе рассматриваются произвольные трехмерные возмущения. Установлено, что с ростом податливости стенок наиболее опасными становятся косые волны, что существенно отличает рассматриваемую систему от течения Пуазейля в жестком канале. Проведен анализ устойчивости течения для широкого диапазона значений параметра упругости, перекрывающего значения параметра упругости для реальных материалов.

1. Постановка задачи. Рассматривается поток вязкой несжимаемой жидкости в канале с упругими стенками. В недеформируемом состоянии стенки предполагаются плоскими пластинами ($z = \pm l$) без внутренних напряжений. Профиль скорости невозмущенного потока $U = U_x = U_0(1 - z^2)$. В настоящей работе принимается безразмерная форма переменных, в качестве характерных масштабов скорости, длины и плотности выбраны скорость течения на оси канала, полуширина канала, плотность жидкости. Уравнения, описывающие волну бесконечно малого возмущения, имеют вид

$$\begin{aligned} V &= \text{Real}(\{V_x, V_y, V_z, p\} \exp(i\alpha(x - Ct) + i\beta y)) \\ Ri\alpha(U - C)V_x + Ri\alpha p + RV_z \frac{\partial U}{\partial z} + (\alpha^2 + \beta^2)V_x - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} &= 0 \\ Ri\alpha(U - C)V_y + Ri\beta p + (\alpha^2 + \beta^2)V_y - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} &= 0 \\ Ri\alpha(U - C)V_z + R \frac{\partial p}{\partial z} + (\alpha^2 + \beta^2)V_z - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} &= 0 \\ i\alpha V_x + i\beta V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \quad R = \frac{U_0 l}{\mu} \end{aligned} \tag{1.1}$$

где R — число Рейнольдса, μ — размерный коэффициент вязкости жидкости. Для симметричных и асимметричных возмущений на оси канала ста-

взяты соответствующие граничные условия

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial^3 V_z}{\partial z^3} = 0 \quad (z=0); \quad V_z = \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = 0 \quad (z=0) \quad (1.2)$$

Граничные условия на стенке определяются из условия прилипания жидкости к деформированной поверхности. При этом осуществляется снос граничных условий на невозмущенную границу. В линейном относительно перемещения границы приближении условия прилипания имеют вид

$$V_z = C \frac{\partial w}{\partial t}, \quad V_y = C \frac{\partial v}{\partial t}, \quad V_x = C \frac{\partial u}{\partial t} - w \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u} = (u, v, w) = \text{Real}(\{A, B, D\} \exp(i\alpha(x-Ct) + i\beta y))$$

где \mathbf{u} — вектор перемещения срединной поверхности пластинки.

Связь между деформацией пластинки и напряжениями на границе жидкости можно определить из уравнения движения стенки канала. Принимается, что стенки канала представляют собой тонкие упругие пластинки, изготовленные из однородного линейно-упругого материала. Будем считать, что движение пластинок может быть описано, исходя из моментной теории тонких пологих пластин, построенной на основании гипотезы Кирхгофа — Лява. Тогда получим [5]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{M^2 C^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{P_{nx}}{\rho \delta C^2} + \frac{T_x}{\rho \delta C^2} \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{M^2 C^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{P_{ny}}{\rho \delta C^2} + \frac{T_y}{\rho \delta C^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\delta^2}{12 M^2 C^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 w &= \frac{P_{nz}}{\rho \delta C^2} + \frac{T_z}{\rho \delta C^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$M = \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}$$

где δ и ρ — толщина и плотность пластинки; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; M — величина, обратная скорости звука в материале пластины; T_x, T_y, T_z — проекции усилий закрепления стенок канала, которые уравновешивают усилия, приложенные к стенкам со стороны протекающей по каналу жидкости в невозмущенном состоянии; P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} — проекции вектора усилий, приложенных со стороны жидкости к деформированной пластине, на орты системы координат, связанной с деформированной пластиной.

Усилия, действующие со стороны жидкости на стенку, могут быть вычислены через значение компонент тензора напряжений в жидкости в точках контакта с деформированной поверхностью пластинки, которые в свою очередь определяются распределением скоростей и давления в жидкости, а также вязкостью. Усилия, действующие на деформированную пластинку, сносятся на недеформируемую поверхность. В окончательных выражениях для величин P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} были сохранены только линейные члены.

Исключая из уравнений (1.3) и (1.4) компоненты вектора перемещений пластины, получим граничные условия для волны возмущения на стенке канала

$$\begin{aligned} i\alpha C \left(V_x - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{1}{i\alpha C} V_z \right) + \frac{1}{i\alpha C M^2} \left(\alpha^2 \left(V_x - \frac{1}{i\alpha C} \frac{\partial U}{\partial z} V_z \right) + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \beta^2 \left(V_x - \frac{1}{i\alpha C} \frac{\partial U}{\partial z} V_z \right) + \frac{1+\nu}{2} \alpha \beta V_y \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho\delta R}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + i\alpha V_z - \frac{1}{i\alpha C}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} V_z\right) = 0 \quad (1.5)$$

$$i\alpha C V_y + \frac{1}{i\alpha C M^2}\left(\beta^2 V_y + \frac{1-\nu}{2}\alpha^2 V_x + \frac{1+\nu}{2}\alpha\beta\left(V_x - \frac{1}{i\alpha C}\frac{\partial U}{\partial z} V_z\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{\rho\delta R}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + i\beta V_z\right) = 0$$

$$i\alpha C V_z + \frac{\delta^2}{12i\alpha C M^2}(\alpha^2 + \beta^2)^2 V_z + \frac{1}{\rho\delta R}\left(R\rho - \frac{V_z}{C}\frac{\partial U}{\partial z} + 2(i\alpha V_x + i\beta V_y)\right) = 0$$

Таким образом, задача гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в канале с упругими стенками сводится к анализу краевой задачи (1.1), (1.2), (1.5).

Для уравнений (1.1), (1.2) осуществимо преобразование Сквайра. Преобразование Сквайра существенно упрощает анализ устойчивости параллельных течений, позволяя привести спектральную задачу о трехмерных возмущениях к эквивалентной двумерной задаче. Для уравнений (1.5), как в этом нетрудно убедиться, преобразование Сквайра также осуществимо. Поэтому анализ спектра малых возмущений течения Пуазейля в канале с упругими стенками достаточно провести только для двумерных возмущений при $\beta=0$, $V_y=0$. При этом параметры трехмерных возмущений могут быть определены из двумерной задачи с помощью пересчета эффективных значений соответствующих величин по следующим соотношениям:

$$R' = R \frac{\alpha}{k}, \quad p' = p \frac{\alpha}{k}, \quad M' = M \frac{\alpha}{k}, \quad \alpha' = k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (1.6)$$

где R , M , p , α , β — параметры трехмерной задачи, а R' , M' , p' , k — эффективные значения параметров эквивалентной двумерной задачи.

Для анализа гидродинамической устойчивости течения Пуазейля исследовалась на собственные значения краевая задача (1.1), (1.2), (1.5).

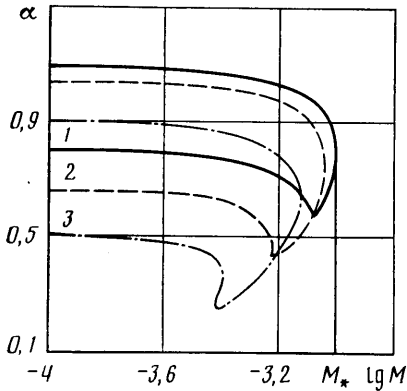
Интегрирование осуществлялось численно методом дифференциальной прогонки по методике, изложенной в [6] и модифицированной для случая течения в канале. Пользуясь тем, что собственные значения краевой задачи для течения в жестком канале были известны, решения для упругой границы находились по непрерывности путем малого изменения параметров границы. Таким образом, в данной работе исследовалось влияние упругости стенки канала на возмущения, соответствующие волнам Толмина — Шлихтинга. Поверхностные волны на границе жидкости, рассмотренные в [2, 7, 8], существующие при малых числах Рейнольдса, не рассматриваются.

2. Результаты расчетов. Расчеты проводились для нескольких наиболее опасных спектральных мод. Здесь представлены результаты вычислений, проведенных для первой спектральной моды возмущений течения Пуазейля жесткого канала. Для других мод неустойчивость течения в упругом канале не обнаружена. Предполагалось, что плотность пластинки $\rho=10$, а ее толщина $\delta=0,01$.

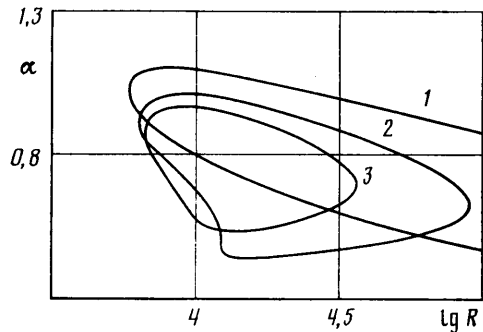
Зависимости области неустойчивости спектра малых двумерных возмущений от параметра упругости пластин M представлены на фиг. 1, где кривые 1—3 соответствуют $R=10\,000$, $20\,000$, $75\,000$. Значение $M=0$ соответствует случаю жесткой границы канала. Для значений параметра упругости M , больших чем M_* , которое назовем критическим, течение становится устойчивым по отношению к малым двумерным возмущениям. Расчеты проводились для чисел Рейнольдса от 6000 до 100 000 и показали, что критическое значение параметра упругости зависит от числа Рейнольдса.

На фиг. 2 представлены нейтральные кривые малых двумерных возмущений течения, полученные при значениях $M=0$ — жесткая граница; $M=0,0007235$; $M=0,00085$ (кривые 1–3). Соответствующие критические значения числа Рейнольдса $R=5770$; 6262; 6683.

Обратим внимание на то, что для податливых пластин ветви нейтральной кривой смыкаются и область неустойчивости к двумерным возмущениям становится ограниченной. При достаточно больших значениях параметра M (больших 0,001015) область неустойчивости стягивается в точку и исчезает. Отметим, что для замкнутых областей неустойчивости существуют диапазоны числа Рейнольдса, в которых увеличение числа Рейнольдса



Фиг. 1



Фиг. 2

са ведет к устойчивости течения. Этот результат существенно отличается от случая течения в жестком канале, которое всегда неустойчиво для чисел Рейнольдса, больших критического. Поэтому подобный результат нуждается в пояснении.

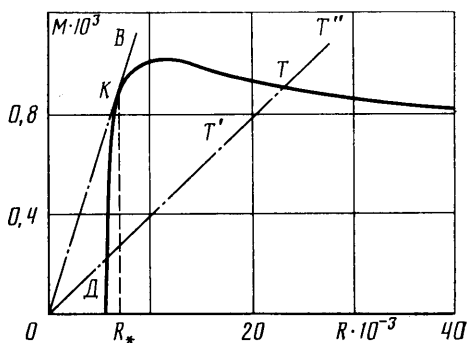
Рассмотрим трехмерные возмущения. Для их анализа сначала построим зависимость M_* от R для двумерных возмущений. Она показана на фиг. 3 сплошной линией (кривая ДКА). Эта кривая ограничивает собой область неустойчивости течения по отношению к двумерным возмущениям. С ее помощью оказывается возможным провести анализ устойчивости произвольного трехмерного возмущения. Возьмем, например, точку T на этой кривой. Эта точка характеризуется нейтральной устойчивостью двумерных возмущений. Рассмотрим трехмерное возмущение с такими же значениями M и R . Для расчета значения эффективных параметров воспользуемся преобразованиями (1.6), где волновое число $\beta \neq 0$. Получим, что точка, положение которой определяют эффективные параметры M' и R' , смещается от точки T по прямой OT к началу координат, т. е. в область неустойчивости (точка T'). Таким образом, течение с параметрами R и M , определяющими точку T , в зависимости от β может оказаться неустойчивым для трехмерных возмущений.

Аналогично рассуждая для случая произвольной точки T'' , лежащей в области устойчивости течения по отношению к двумерным возмущениям, можно определить такие значения волнового числа β , для которого течение будет неустойчивым.

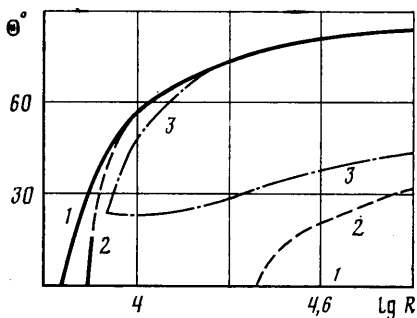
Какие именно β определяют неустойчивость волны возмущения, зависит от числа Рейнольдса и от податливости пластины. Трехмерные возмущения с $\beta \neq 0$ распространяются в отличие от двумерных возмущений под углом к потоку. Вектор нормали к фронту волны параллелен внешним границам канала и составляет угол θ с осью координат, направленной вдоль потока. С волновыми числами этот угол связан соотношением $\theta = \arctg \beta/\alpha$. На фиг. 4 и 5 показано, как зависят от числа Рейнольдса и от параметра упругости пластинки величины углов, определяющих направление распространения неустойчивых возмущений. На фиг. 4 возмуще-

ниям, дестабилизирующим поток, отвечают точки на плоскости $(\lg R, \theta)$, лежащие между ветвями изображенных кривых. Кривым 1–3 соответствует значение параметра упругости $M=0$ (жесткая граница); 0,0009; 0,0011. Для $M=0$ нижняя ветвь кривой совпадает с осью абсцисс, таким образом для случая жесткой границы среди неустойчивых возмущений всегда присутствуют двумерные, которые и определяют неустойчивость течения. С увеличением податливости пластин ситуация меняется. В этом случае неустойчивые двумерные возмущения существуют в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса (кривая 2). С ростом числа Рейнольдса неустойчивыми остаются только трехмерные возмущения. И наконец, для достаточно податливых пластин область неустойчивых направлений распространения возмущений сужается так сильно, что происходит стабилизация двумерных возмущений, и неустойчивость течения определяется исключительно трехмерными возмущениями (кривая 3).

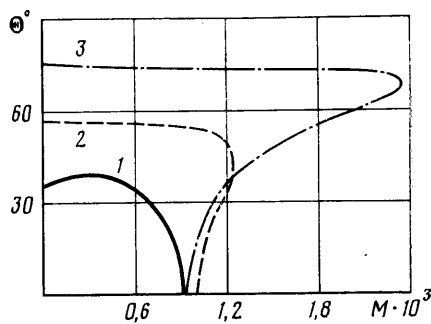
На фиг. 5 показано, как область неустойчивых направлений зависит от параметра упругости. Для кривых 1–3 число Рейнольдса соответственно равно 7000, 10 000, 20 000. При увеличении податливости стенок область неустойчивости течения сужается. При этом для достаточно



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

больших чисел Рейнольдса существуют такие диапазоны значений параметра M , что плоские возмущения устойчивы, а неустойчивы лишь трехмерные возмущения.

Как будет деформироваться область неустойчивости течения с учетом трехмерных возмущений, показано на фиг. 3. Пусть прямая OB , проходящая через начало координат, касается нейтральной кривой двумерных возмущений в точке K , которой соответствует число Рейнольдса R_* . При числах Рейнольдса, меньших R_* , неустойчивость течения в упругом канале определяют двумерные возмущения. Поэтому граница области неустойчивости течения Пуазейля при таких значениях числа Рейнольдса совпадает с кривой для двумерных возмущений. При числах Рейнольдса, больших R_* , луч KB будет ограничивать область неустойчивости течения по отношению к малым трехмерным возмущениям. Действительно, точки, лежащие на луче и слева от него, определяют параметры упругости и числа Рейнольдса, при которых течение устойчиво для любых волновых чисел α и β . А любая точка правее луча KB лежит на секущей области неустойчивости двумерных возмущений, значит, существует такое волновое число

β , при котором течение будет неустойчиво к соответствующему трехмерному возмущению.

Таким образом, границей области неустойчивости на координатной плоскости (R, M) является кривая DKB . Как видно из фиг. 3, критическое число Рейнольдса, определяемое с помощью этой кривой, возрастает с увеличением упругости пластинок, ограничивающих канал. Причем для чисел Рейнольдса, превосходящих R_* , эта зависимость становится линейной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Короткин А. И. Устойчивость плоского течения Пуазейля при наличии упругих границ // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 6. С. 1122–1127.
2. Меркулов В. П. Управление движением жидкости. Новосибирск: Наука, 1981. 173 с.
3. Squire H. B. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1933. V. 142. № 847. P. 621–628.
4. Цвелодуб О. Ю. Устойчивость течения Пуазейля в упругом канале // ПМТФ. 1977. № 5. С. 75–80.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
6. Ганиев Р. Ф., Малых Ю. Б., Украинский Л. Е. Линейная устойчивость течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой вязкоупругой трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 126–134.
7. Landahl M. T. On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. Pt 4. P. 609–632.
8. Benjamin T. B. The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows // J. Fluid Mech. 1963. V. 16. Pt 3. P. 436–450.

Москва

Поступила в редакцию
12.1.1987