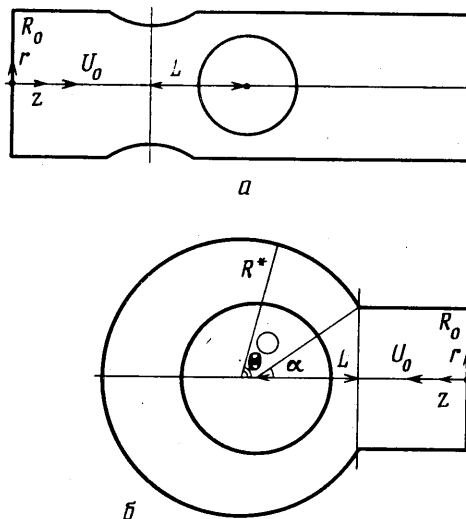


УДК 532.516

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
ВНУТРИ ПОЛОСТЕЙ И КАНАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

СТАРОБИН И. М.

На основе численного решения уравнений Навье – Стокса изучено обтекание осесимметричных тел различной формы внутри расширяющейся полости и цилиндрического канала. Для каждой из форм обтекаемых тел получены распределения скоростей, давлений и сдвиговых напряжений. На основе найденных таким образом данных проведен сравнительный анализ характера обтекания тел в зависимости от их форм и чисел Рейнольдса. Определены особенности течения жидкости, характерные для обтекания тел в канале и в полости с подвижной границей. Исследование течения вязкой жидкости около искусственных клапанов сердца является важным этапом конструирования и создания новых, более совершенных с физиологической точки зрения моделей этих устройств. Задача об исследовании таких



Фиг. 1

течений сводится к решению уравнений Навье – Стокса для внутриполостного обтекания препятствий различной формы несжимаемой ньютоновской жидкостью [1, 2]. В общем случае решение этой задачи сопряжено со значительными методическими трудностями и может быть получено лишь с использованием численных методов. В [3, 4] приведен расчет уравнений Навье – Стокса для стационарного и нестационарного течений вязкой жидкости около прямоугольного препятствия внутри плоской прямоугольной полости (модель митрального клапана). В [5] также дан расчет двумерных уравнений Навье – Стокса, но для естественного митрального клапана с учетом геометрии желудочка естественного сердца. В [6] найдено решение задачи об обтекании искусственного шарового митрального клапана. Моделирование течений крови около аортальных клапанов (обтекание препятствий в каналах) было проведено в [7, 8]. В [7] получено решение плоской задачи для дискового искусственного клапана, а в [8] проведен сравнительный анализ течения вязкой жидкости около аортальных протезов для осесимметричного (шаровой и дисковый клапан) и плоского (дисковый поворотный клапан) случаев.

Наиболее подробные экспериментальные исследования течений жидкости около искусственных клапанов сердца на физических моделях представлены в [9–12]. В [9, 10] на жесткой модели аорты исследовались течения около различных аортальных искусственных клапанов сердца. В [11, 12] изучалось течение жидкости в модели левого желудочка сердца. В [9–12] наряду с измерениями перепадов давления на клапанах проводилась визуализация течений жидкости, требующая применения весьма трудоемких и сложных в экспериментальном отношении методов.

1. Введем цилиндрическую систему координат r, z , ось которой совпадает с осями симметрии канала (ось симметрии корня аорты для аортальных клапанов, фиг. 1, а) или полости желудочка сердца (ось симметрии полости желудочка сердца для митральных клапанов, фиг. 1, б). Как и в [6, 13], желудочек сердца имеет форму сферы, ось симметрии которой совпадает с осью симметрии клапана. Во введенной таким образом системе координат течение крови будет, как уже отмечалось выше, описываться двумерными осесимметричными уравнениями Навье – Стокса, которые в переменных функций тока ψ и вихря ω имеют вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) \right] \quad (1.1)$$

$$-\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (1.2)$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.3)$$

Здесь и далее величины, входящие в систему уравнений (1.1)–(1.3), обезразмерены относительно масштабов длины R_0 и скорости U_0 следующим образом:

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad z = \frac{Z}{R_0}, \quad u = \frac{U}{U_0}, \quad v = \frac{V}{U_0}, \quad t = \frac{T U_0}{R_0},$$

$$\psi = \frac{\Psi}{\pi U_0 R_0^2}, \quad \omega = \frac{\Omega R_0}{U_0}, \quad \text{Re} = \frac{R_0 U_0}{\nu}$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости, Re – число Рейнольдса, T – время, U и V – осевая и радиальные компоненты скорости жидкости соответственно.

Обозначим неподвижные и подвижные участки границ областей, изображенных на фиг. 1, через Γ_m и Γ_f соответственно. Подвижным участком границы является расширяющаяся сферическая поверхность желудочка сердца (фиг. 1, б), скорость которой, согласно [13], дается формулой (R^* – радиус полости)

$$v_n = \frac{dR^*}{dt} \left(1 - \frac{\cos \Theta}{\cos \alpha} \right) \quad (1.4)$$

Отметим, что течение жидкости около митральных клапанов рассматривается в фазе наполнения желудочка, когда его поверхность расширяется по закону (1.4), оставаясь сферой в течение всей фазы наполнения. Учитывая то, что неподвижные участки границ и оси симметрии полостей на фиг. 1 образуют линии тока, получим граничные условия для системы уравнений (1.1)–(1.3)

$$\psi|_{\Gamma_f} = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_f} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_m} = \psi_0(r, z), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_m} = r v_n \quad (1.5)$$

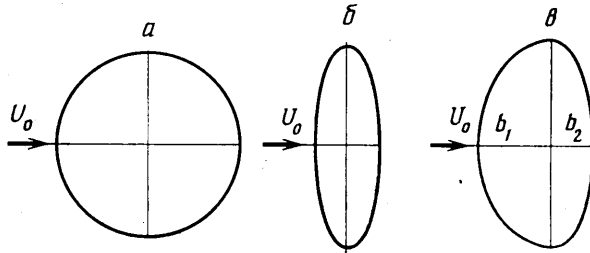
Так, например, для аортальных клапанов (фиг. 1, а) на линии тока, образуемой осью симметрии и поверхностью клапана, функция тока

$\psi=0$, а на стенке канала $\psi=q$, где q — объемный расход жидкости через его поперечное сечение. В случае митральных клапанов условия на оси симметрии и поверхности клапана аналогичны условиям для аортальных клапанов, т. е. на этих участках $\psi=0$, а на подвижном участке расширяющейся поверхности полости желудочка функция ψ_0 , согласно [13], дается соотношением

$$\psi_0 = q \left(1 + \cos \Theta + \frac{\sin^2 \Theta}{2 \cos \alpha} \right) \left(1 + \frac{\cos \alpha}{2} + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right)^{-1}, \quad q = \frac{Q}{\pi R_0 U_0^2} \quad (1.6)$$

Здесь q — объемный расход жидкости, поступающей в полость желудочка, а углы Θ и α определены на фиг. 1, б.

Для окончательного определения граничных условий будем считать,



Фиг. 2

что на входе в канал (аортальный клапан) и полость (митральный клапан) при $z=0$ задан плоский профиль осевой скорости $u(q=1)$, а на выходе из канала при $z=z_0$ — условия «успокоения» [14]. Имеем

$$\psi|_{z=0} = \frac{r^2}{2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = 0 \quad (1.7)$$

Для решения уравнений (1.1)–(1.3) с граничными условиями (1.4)–(1.7) использовался конечно-разностный метод [6, 15]. Он основан на аппроксимации в (1.5) производных не по нормали $\partial\psi/\partial n$, а наклонных производных $\partial\psi/\partial l$ в направлениях, параллельных линиям разностной сетки. Эти производные выражаются через $\partial\psi/\partial n$ и $\partial\psi/\partial \tau$, где $\partial\psi/\partial \tau$ — производная от функции тока вдоль касательной к поверхностям полости или канала. Такой подход позволяет аппроксимировать уравнения (1.1)–(1.3) и граничные условия (1.4)–(1.7) на равномерной сетке со вторым порядком точности по шагу сетки, несмотря на то что границы полостей не совпадают с линиями сетки, а их форма меняется с течением времени.

2. На основе численного решения задачи (1.1)–(1.7) для аортальных и митральных клапанов различных форм (фиг. 2) были получены распределения функций ψ , ω , u , v , а также распределения сдвиговых напряжений $\tau = \tau/\rho U_0^2$ и давлений $p = p/\rho U_0^2$ (ρ — плотность жидкости). Расчетные области имели 30×120 узлов по r и z соответственно для течения в канале (обтекание аортальных клапанов) и 70×80 узлов для течения в расширяющейся полости (обтекание митрального клапана). Течение жидкости в канале считалось стационарным. Скорость U_0 во входном сечении канала не зависела от времени и соответствовала $Re=750$. Течение жидкости в подвижной полости было нестационарным, но скорость U_0 во входном сечении полости не зависела от времени. Число Рейнольдса в этом случае равнялось 500.

Расчеты проводились для трех типов обтекаемых тел (клапанов): шаровой клапан — фиг. 2, а; дисковый клапан — фиг. 2, б и клапан с переходным профилем, состоящим из двух плавно сопрягающихся полуэллипсоидов с одинаковой большой и разными малыми полуосями — фиг. 2, в ($B_1=b_1/a$; $B_2=b_2/a$).

Сдвиговые напряжения τ и давление p определялись из уравнений [16]

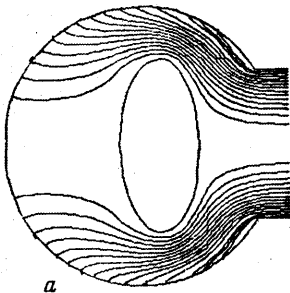
$$\tau_{rz} = \tau = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{2}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \omega \right]$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \left(v - \frac{1}{r \text{Re}} \right) \omega - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial r} = \left(\omega v + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \frac{\partial v}{\partial t}$$

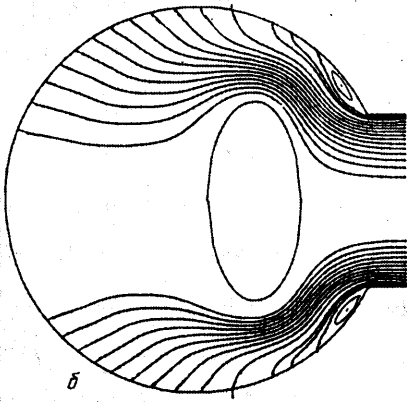
$$B = p + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

Для анализа полученных численных решений проводилось построение изолиний функции тока ψ .

При обтекании препятствий внутри расширяющейся полости обнаружен следующий эффект: зона отрывного течения, локализуемая в узкой горловине, образуемой передним профилем обтекаемого тела и входным отверстием полости, возникает при значительно более низких Re , чем зона, локализуемая вблизи заднего профиля тела. Такой результат ранее был установлен аналитически в [6] при не очень больших числах Рейнольдса ($\text{Re} \sim 100$) для шарового тела на начальной стадии наполнения полости, когда объем обтекаемого шара практически не отличался от объема полости.



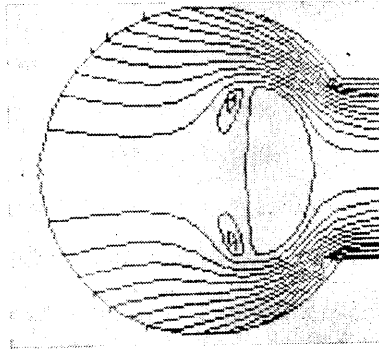
а



б

Фиг. 3

горловине, образуемой передним профилем обтекаемого тела и входным отверстием полости, возникает при значительно более низких Re , чем зона, локализуемая вблизи заднего профиля тела. Такой результат ранее был установлен аналитически в [6] при не очень больших числах Рейнольдса ($\text{Re} \sim 100$) для шарового тела на начальной стадии наполнения полости, когда объем обтекаемого шара практически не отличался от объема полости.



Фиг. 4

Численное моделирование показало, что даже при $\text{Re}=500$ и не для шарового, а дискового тела, обтекаемого хуже, указанная выше особенность течения сохраняется. Так, для дискового тела при увеличении объема полости почти в 2 раза вблизи ее входного отверстия образуются зоны отрывного течения (фиг. 3, а, б). За телом отрывные зоны возникают при

$Re=500$ только для тел с переходным профилем — со значительно спрямленной задней кромкой (фиг. 4). Однако линейная скорость циркуляции жидкости в этих зонах мала по сравнению с характерным масштабом U_0 и составляет величину порядка $0,1U_0$.

Полученные данные свидетельствуют о том, что в изучаемом диапазоне Re в случае внутриполостного обтекания тел в полости с подвижной

B_1	Δp_{\max}		
	$B_2=0,22$	0,33	0,67
0,33	212	223	284
0,67	240	268	325
1	425	455	480

границей задний профиль обтекаемого тела практически не влияет на развитие отрывного течения, а следовательно, и на величину гидродинамического сопротивления. В самом деле, как видно из таблицы, где приведен максимальный перепад давления на телах с переходным профилем Δp_{\max} при различных B_1 и B_2 ($Re=500$, $L/R_0=1$), величина Δp_{\max} мало зависит от изменения B_2 при $B_1=\text{const}$ и сильно меняется при увеличении B_1 , когда $B_2=\text{const}$.

Иная картина наблюдается при анализе сдвиговых напряжений. Как показали численные эксперименты, сдвиговые напряжения изменяются существенно лишь тогда, когда изменяется форма заднего профиля обтекаемого тела. Так, для шарового и дискового тел при $B_1, B_2=0,67$ значения максимальных сдвиговых напряжений τ_{\max} составляют 20 и 22 дин/см² соответственно, т. е. мало отличаются друг от друга. Однако при уменьшении B_2 до 0,33 при неизменном $B_1=0,67$ значение $|\tau_{\max}|$ увеличивается более чем в 2 раза и составляет 50 дин/см². При дальнейшем спрямлении заднего профиля тел переходного типа величина τ_{\max} продолжает возрастать, достигая при $B_2=0,22$ значения 63 дин/см².

3. Обтекание тел в каналах, как и следовало ожидать, отличается от их внутриполостного обтекания в расширяющейся полости. Подвижная стенка полости, перестраивающая течение непосредственно за задним профилем обтекаемого тела, в данном случае отсутствует. Поэтому, практически независимо от типа тела, обтекание при $Re=750$ сопровождается возникновением достаточно протяженных ($\sim R_0$) зон отрывного течения (фиг. 5, а, б, в). Однако небольшое различие в протяженности этих зон имеется. Максимальная протяженность зоны $l=R_0$ наблюдается для дискового тела при $B_1, B_2=0,33$. Для шарового тела $l=2/3R_0$. Минимальная протяженность $l=1/3R_0$ отрывных зон наблюдается для тела переходного профиля с $B_1=0,33$; $B_2=0,67$.

Небольшое различие в структуре обтекания этих тел приводит к тому, что максимальные перепады давления вдоль их поверхностей Δp_{\max} также различаются незначительно. Как показали численные эксперименты, для тела, близкого по форме к полушару с $B_1=0,67$ и $B_2=0,33$, $\Delta p_{\max}=2298$ дин/см², для шара $\Delta p_{\max}=2000$ дин/см². Несколько меньшие значения $\Delta p_{\max}=1800$ дин/см² были получены в [8] при тех же числах Рейнольдса для шара, но иной геометрии канала, который во входной части имел расширение в 1,4 раза по сравнению с R_0 .

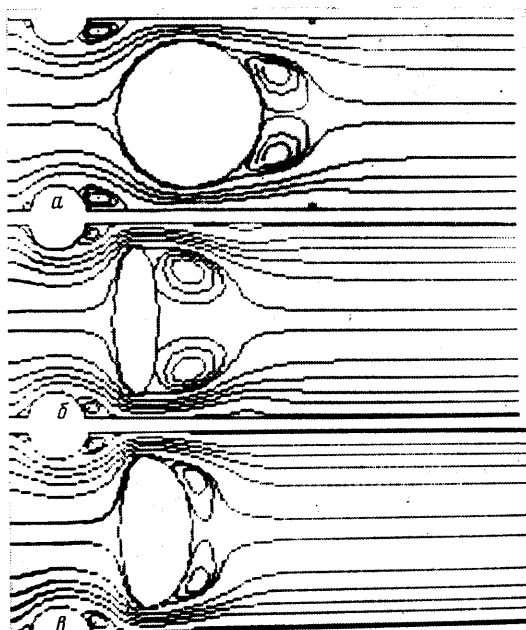
Таким образом, в случае обтекания тел в канале передний профиль тела не так сильно влияет на его гидродинамическое сопротивление, как это имело место в случае внутриполостного обтекания в расширяющейся полости.

Что касается сдвиговых напряжений, то, как показали расчеты, динамика их изменения в зависимости от формы переднего и заднего профилей обтекаемого тела имеет неоднозначный характер на поверхности тела и на

стенках канала. Если на поверхности тел величины τ_{\max} примерно одинаковы и достигают 100 дин/см^2 , то на стенках канала для тела переходного профиля с $B_1=0,33$ и $B_2=0,67$ величина $\tau_{\max}=32 \text{ дин/см}^2$ в 2 раза меньше, чем для тела с $B_1=0,67$; $B_2=0,33$ и дискового тела с $B_1, B_2=0,33$.

Эти данные свидетельствуют о том, что основным фактором, влияющим на величину τ_{\max} на стенках канала, является форма заднего профиля обтекаемого тела. Этот же фактор является причиной различия в протяженности отрывных зон у тел различной формы.

Структура и протяженность зон отрывного течения в следе за обтекаемым телом зависит не только от формы его заднего профиля, но и от взаимного расположения заднего профиля и стенок канала. Влияние взаимного



Фиг. 5

расположения стенок канала и заднего профиля обтекаемого тела может оказаться столь значительным, что возникают дополнительные зоны отрывного течения на самих стенках канала (фиг. 5, а, б), причем эти зоны являются как бы продолжением возмущений, сформировавшихся в непосредственной близости от заднего профиля обтекаемого тела. При специально подобранных соотношениях B_2 и формы стенки канала (фиг. 5, в, $B_1=0,33$ и $B_2=0,67$) дополнительные отрывные зоны исчезают, а значения τ_{\max} на стенке канала, как уже отмечалось выше, значительно уменьшаются по величине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павловский Ю. Н., Регирер С. А., Скобелева И. М. Гидродинамика крови // Итоги науки. Сер. Механика. 1968. М.: ВИНТИ, 1970. С. 7–96.
2. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 624 с.
3. Au A. D., Greelfield H. S. Computer graphics analysis of stresses in blood flow through a prosthetic heart valve // Comp. Biol. and Med. 1975. V. 4. № 3–4. P. 279–291.
4. Шумаков В. И., Заико В. М., Старобин И. М. Численное моделирование движения дискового митрального клапана в полости левого желудочка сердца // Механика полимеров. 1978. № 3. С. 496–501.
5. Peskin Ch. Flow patterns around heart valves: A numerical method // J. Comp. Phys. 1972. V. 10. № 2. P. 252–271.

6. Старобин И. М., Заико В. М. Математическое моделирование течения крови в полостях с подвижными границами // Современные проблемы биомеханики. Рига: Зинатне, 1983. Вып. 1. С. 59–72.
7. Underwood F. N., Mueller T. J. Numerical study of the steady axisymmetric flow through a disk-type prosthetic heart valve in an aorticshaped chamber // Trans. ASME. J. Biomech. Eng. 1979. V. 101. № 3. P. 198–204.
8. Idelson S. R., Costa L. E., Ponso R. A comparative computational study of blood flow through prosthetic heart valves using the finite element method // J. Biomech. 1985. V. 18. № 2. P. 97–115.
9. Chandran K. B., Khalighi B., Chen C.-J. Experimental study of physiological pulsatile flow past valve prostheses in a model of human aorta-1. Caged ball valves // J. Biomech. 1985. V. 18. № 10. P. 763–772.
10. Chandran K. B., Khalighi B., Chen C.-J. Experimental study of physiological pulsatile flow past valve prostheses in a model of human aorta-2. Tilting disk valves and the effect of orientation // J. Biomech. 1985. V. 18. № 10. P. 773–780.
11. Farahifar D., Cassot F., Bodard M., Pellissier R. Velocity profiles in the wake of two prosthetic heart valves using a new cardiovascular simulator // J. Biomech. 1985. V. 18. № 10. P. 789–802.
12. Farahifar D., Pellissier R., Cassot F., Bodard H. An experimental investigation of post-valvular flow field // Life support system. 1984. V. 2. Suppl. 1. P. 73–77.
13. Старобин И. М. Течение вязкой жидкости в зазоре между подвижной и неподвижной сферами при небольших числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ, 1980. № 6. С. 180–183.
14. Мюллер Т. Д. Применение численных методов к исследованию физиологических течений // Численные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1981. С. 80–151.
15. Starobin I. M., Zaiko V. M. Numerical modeling of blood flow in the ventricular cavity of the artificial heart // Artificial organs. 1983. V. 1. № 1. P. 122–125.
16. Роуч П. Вычислительная гидромеханика. М.: Мир, 1980. 616 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.VI.1987