

УДК 532.5+517.54

**ПОСТРОЕНИЕ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ МЕТОДОМ
КВАЗИРЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

ЕЛИЗАРОВ А. М., ИЛЬИНСКИЙ Н. Б., ПОТАШЕВ А. В.

Излагается математически строго обоснованный подход к решению обратных краевых задач аэрогидродинамики — задач, в которых контур крылового профиля отыскивается по заданному на нем распределению величины скорости как функции дуговой абсциссы. Подход основан на использовании идеи квазирешения из теории некорректных задач и связан с целенаправленным видоизменением исходных данных с целью получения единственного решения в заданном классе контуров. Этот подход изложен на примере задачи построения изолированного крылового профиля, обтекаемого плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости, и обобщен на случаи дозвукового потока газа и потока вязкой несжимаемой жидкости. Приведены некоторые результаты численных расчетов, иллюстрирующие возможности предлагаемого подхода.

1. Идеальная несжимаемая жидкость. Стимулом создания общей математической теории обратных краевых задач послужила задача построения контура крылового профиля по заданному на нем распределению скорости как функции дуговой абсциссы [1, 2]. Эту задачу назовем основной обратной краевой задачей аэрогидродинамики и приведем ее полную постановку.

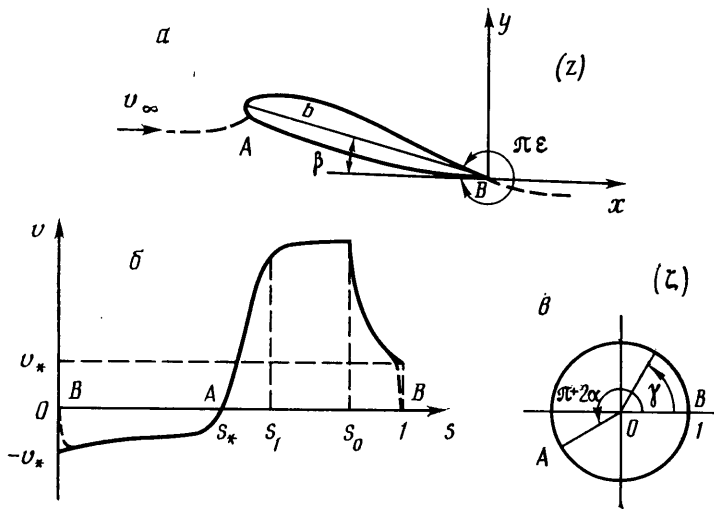
В физической плоскости z (фиг. 1, а) искомый непроницаемый крыловой профиль обтекается плоским потенциальным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости; в задней кромке B внутренний к области течения угол равен $\varepsilon\pi$, $1 \leq \varepsilon \leq 2$. Скорость v_∞ на бесконечности параллельна оси x , а ее величина задана (всюду далее скорости безразмерные, отнесенные к заданной величине v_∞). Дуговая абсцисса s , $0 \leq s \leq 1$ (s — безразмерная дуговая координата, отнесенная к периметру L контура профиля) отсчитывается от $s=0$ на острой выходной кромке B до $s=1$ на ней же так, что при возрастании s вдоль поверхности профиля область течения остается слева; s_* — значение s в точке A разветвления потока. Вдоль поверхности профиля задано распределение скорости потока (фиг. 1, б)

$$v=v(s), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (1.1)$$

где кусочно-гладкая функция $v(s)$ обращается в нуль в точке s_* и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки (последнее условие обеспечивает гладкость искомого контура в точке A). Знак $v(s)$ связан с направлением обхода и поэтому $v(s) < 0$ при $0 < s < s_*$, $v(s) > 0$ при $s_* < s < 1$; $v(0) = -v_*$, $v(1) = v_*$ при $\varepsilon=2$ (бесконечно тонкая кромка), $v(0) = v(1) = 0$ при $1 \leq \varepsilon < 2$ (штриховые линии в окрестностях $s=0$ и $s=1$ на фиг. 1, б). Требуется определить форму профиля, угол атаки β и коэффициент подъемной силы C_y .

Задание распределения скорости как функции от s обладает рядом преимуществ по сравнению с заданием, например, хордовой диаграммы или годографа скорости: заранее известна величина подъемной силы

$$P = \rho \Gamma, \quad \Gamma = \int_0^1 v(s) ds$$



Фиг. 1

где ρ — плотность среды. При построении профиля в потоке вязкой жидкости с большими числами Рейнольдса до решения задачи можно провести расчет пограничного слоя и оценить величину коэффициента сопротивления C_x . Далее, известные критерии безотрывности течения выражаются в зависимости от дуговой абсциссы s , поэтому можно задавать распределения скорости, обеспечивающие безотрывное обтекание. Наконец, задание $v(s)$ позволяет точно определить строение контура профиля в окрестности критических точек, что особенно важно при численном решении.

Первые наиболее полные результаты по решению основной обратной краевой задачи аэрогидродинамики содержатся в [1, 2]. Обзор результатов, полученных до 1965 г., приведен в [3]; в [4] дан обзор работ до 1980 г. В [5] описаны достижения ряда зарубежных ученых. В [6] можно найти краткую классификацию работ, относящихся к решению этой задачи, по используемым в них методам.

Основными недостатками известных приближенных методов решения являются зависимость точности решения и сходимости метода от выбора начального приближения, а также неудовлетворительное решение вопроса об обеспечении условий замкнутости и однолиственности (в результате чего может отсутствовать сходимость процесса итераций). Эти методы эффективно применимы в случае, когда заданное распределение скорости мало отличается от распределения скорости по известному замкнутому однолиственному профилю. Поэтому они не дают способа решения обратной краевой задачи аэрогидродинамики в полной постановке и являются лишь аппаратом численного решения задачи об изменении контуров.

Приведем кратко схему решения основной обратной краевой задачи аэрогидродинамики методом конформных отображений. При указанных в постановке задачи предположениях существует комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $z = x + iy$, φ — потенциал скорости, ψ — функции тока. Циркуляция скорости выражается в виде $\Gamma = \varphi_1 - \varphi_0$, причем $\varphi_1 = \varphi(1)$, $\varphi_0 = \varphi(0)$ и

$$\varphi(s) = \int_{s_*}^s v(s) ds, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (1.2)$$

Формула (1.2) вместе с условием $\psi = 0$ определяет уравнение проекции границы области, соответствующей области течения и лежащей на бесконечнолистной римановой поверхности над плоскостью w . Конформно

отображая на эту область внешность единичного круга во вспомогательной плоскости ζ (фиг. 1, ϵ) функцией $w=w(\zeta)$, $w(\infty)=\infty$, $w(1)=\varphi_1$ и устанавливая зависимость $s=s(\gamma)$ на окружности $\zeta=\exp(i\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, с учетом (1.1) найдем гельдеровскую функцию

$$S(\gamma) = \ln |v[s(\gamma)]| - \ln \{2|\sin [1/2(\gamma-\gamma_*)]|\} - (2-\epsilon) \ln [2 \sin (\gamma/2)]$$

$$\gamma_* = \pi + 2\alpha, \quad \alpha = -\arg(dw/d\zeta)_\infty, \quad \zeta_* = \exp(i\gamma_*)$$

где ζ_* — прообраз точки $w=0$. Теперь можно записать интегральное представление функции $z=z(\zeta)$, конформно отображающей $|\zeta|>1$ на область течения с нормировкой $z(\infty)=\infty$, $z(1)=0$

$$z(\zeta) = \int_1^\zeta (1-1/\zeta)^{\epsilon-2} (1-\zeta_*/\zeta)^{-1} \exp[-\chi(\zeta)] w'(\zeta) d\zeta \quad (1.3)$$

где $\chi(\zeta)$ восстанавливается оператором Шварца с плотностью $S(\gamma)$. Полагая $\zeta=\exp(i\gamma)$, получим параметрические уравнения искомого контура профиля. Зная $z(\zeta)$, можно найти хорду профиля b , угол атаки β , коэффициент подъемной силы C_y и другие характеристики.

Однако построенное решение не обеспечивает таких свойств, как замкнутость искомого контура и его однолиственность. Условия, выполнение которых обеспечивает замкнутость контура при заданной скорости потока на бесконечности, обычно называют условиями разрешимости этой задачи. Однолиственность контура гарантируется выполнением некоторых известных достаточных условий.

Условие замкнутости искомого контура эквивалентно требованию однозначности функции $z(\zeta)$ и имеет вид

$$\int_0^{2\pi} S(\tau) e^{i\tau} d\tau = B_1 + iB_2, \quad B_1 = \pi(1-\epsilon), \quad B_2 = 0 \quad (1.4)$$

Третье условие

$$\int_0^{2\pi} S(\tau) d\tau = B_3 \quad (1.5)$$

где $B_3=0$, выражает факт совпадения скорости на бесконечности, определяемой в ходе решения, с заданной в постановке задачи. Заметим, что если v_∞ не задается, то условие (1.5) можно использовать для ее нахождения (при $v_\infty \neq 1$ имеем $B_3 = 2\pi \ln v_\infty$).

Соотношения (1.4), (1.5) означают фиксацию трех коэффициентов Фурье функции $S(\gamma)$. В [1] и в некоторых других работах в случае невыполнения этих условий предлагается заменять значения соответствующих коэффициентов на нужные, «исправляя» тем самым задачу. Однако такой способ не содержит условий минимизации изменений, вносимых в начальное распределение $v(s)$. В [7] численно реализован способ удовлетворения (1.4) и (1.5) за счет варьирования конечного числа параметров, вводимых в выражение $v(s)$, с тем чтобы уменьшить отклонение от исходных данных. Именно в [7] в частном случае и без доказательства существования и единственности построено одно из возможных обобщенных решений рассматриваемой задачи.

Выполнение условий разрешимости еще не гарантирует физической реализуемости полученного решения, так как, вообще говоря, построенный контур может оказаться неоднолистным. Обзор исследований по достаточным условиям однолиственности функции $z(\zeta)$ с представлением (1.3) содержится, например, в [4].

2. Квазирешение основной обратной краевой задачи аэрогидродинамики. Итак, задание распределения $v(s)$, удовлетворяющего требованиям, сформулированным в постановке задачи, не гарантирует попадания ее решения в класс профилей, ограниченных замкнутым конечным контуром, т. е. задача оказывается неразрешимой. Если бы удалось получить условия разрешимости, выраженные непосредственно через $v(s)$, то удалось бы и выделить класс корректных (по Адамару) обратных краевых задач аэрогидродинамики. Эта проблема весьма сложная и в теории таких задач до сих пор не решена. Проверить выполнение условий (1.4), (1.5) можно, лишь проведя более половины этапов решения. Поэтому необходимо определить такое решение задачи (назовем его обобщенным) и указать процедуру (способ) его нахождения, чтобы в частном случае выполнения условий разрешимости это обобщенное решение совпадало с обычным решением. Наличие интегральных представлений решений во многих случаях обеспечивает переход к корректным по Адамару задачам, так как позволяет выяснить, принадлежит ли построенное решение классу корректности, или же указать алгоритм проверки этого свойства.

Как известно, квазирешением называется обобщенное решение некорректной задачи, которое при достаточно общих условиях в отличие от истинного решения корректно по Адамару. Таким образом, нужно определить квазирешение задачи и проверить выполнимость для него всех условий корректности по Адамару. Приводимое ниже определение базируется на общей идее В. К. Иванова построения квазирешений.

Пусть U — множество корректности задачи, т. е. выделенный нами класс искомых решений. Ясно, что для всех элементов U должны быть выполнены условия разрешимости (1.4), (1.5). Кроме того, в определение U можно закладывать и другие условия (однолиственность, критерии безотрывности обтекания и т. п.).

Используя (1.3)–(1.5), можно показать, что малым вариациям функции $S(\gamma)$ по норме $\|\cdot\|_{C_\delta}$ банахова пространства C_δ функций $Q(\gamma)$, удовлетворяющих при любых γ_1, γ_2 условию Гельдера

$$|Q(\gamma_1) - Q(\gamma_2)| \leq A |\gamma_1 - \gamma_2|^\delta, \quad 0 < A < \infty, \quad 0 < \delta \leq 1$$

соответствуют малые вариации функции $z(\xi)$ в топологии равномерной сходимости, что означает устойчивость решения задачи. Так как искомое решение при выполнении (1.4), (1.5) строится однозначно по $S(\gamma)$ через оператор Шварца с последующим интегрированием (см. (1.3)), а условия разрешимости (1.4), (1.5) также выражаются через $S(\gamma)$, то построение квазирешения удобно вести с использованием функции $S(\gamma)$. Отметим, что и другие ограничения, налагаемые на множество U , также могут быть выражены через $S(\gamma)$.

Итак, пусть множество корректности U состоит из функций $S(\gamma)$, задающих решение задачи вида (1.3) в заданном классе решений. Если найденная по начальным данным задачи функция $S(\gamma)$ попадает в U , то соответствующая ей функция $z(\xi)$ будет искомым решением. В противном случае необходимо «подправить» $S(\gamma)$ так, чтобы новая функция (обозначим ее $S_*(\gamma)$) попала в U . Так как таких функций, вообще говоря, бесконечно много, необходимо накладывать дополнительные требования, выделяющие «наилучшую» функцию $S_*(\gamma)$. Одно из таких требований состоит в максимальной близости (в определенном смысле) $S_*(\gamma)$ и $S(\gamma)$.

Следуя [8], будем называть квазирешением обратной краевой задачи аэрогидродинамики мероморфную (с простым полюсом в ∞) и локально-однолиственную в области $|\xi| > 1$ функцию $z_*(\xi)$, которая однозначно определяется из (1.3) по функции $S_*(\gamma)$, принадлежащей множеству корректности U и минимизирующей на нем заданный функционал $J(Q; S)$, т. е.

$$\min_{Q \in U} J(Q; S) = J(S_*; S)$$

Отметим, что в качестве $J(Q; S)$ можно взять норму $\|Q-S\|_P$, где P — нормированное пространство, содержащее U в качестве подмножества.

Теперь нужно обеспечить существование, единственность и устойчивость квазирешения, строя U специальным образом.

Предположим, что при отыскании квазирешения функция $S(\gamma)$ остается неизменной всюду, кроме фиксированного интервала $[\gamma_1, \gamma_2]$ (в частном случае $[\gamma_1, \gamma_2] = [0, 2\pi]$ функция $S(\gamma)$ меняется всюду). Представим $S_*(\gamma)$ в следующем виде:

$$S_*(\gamma) = \begin{cases} S(\gamma) + T(\gamma), & \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2 \\ S(\gamma), & 0 \leq \gamma \leq \gamma_1, \quad \gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi \end{cases}$$

где $T(\gamma)$ — гельдеровская функция, обращающаяся в нуль на концах интервала определения ($T(\gamma_1) = T(\gamma_2) = 0$). Условия разрешимости (1.4), (1.5), выраженные через $T(\gamma)$, примут вид

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T(\tau) e^{i\tau} d\tau = C_1 + iC_2, \quad \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T(\tau) d\tau = C_3 \quad (2.1)$$

$$C_1 + iC_2 = B_1 + iB_2 - \int_0^{2\pi} S(\tau) e^{i\tau} d\tau, \quad C_3 = B_3 - \int_0^{2\pi} S(\tau) d\tau$$

Пусть $J(Q; S) = J_1(Q; S) = \|Q-S\|_{L_2}$. В этом случае корректность задачи построения квазирешения вытекает из следующего утверждения, доказанного в [6].

Квазирешение $z_*(\xi)$ на множестве корректности $U \subset C_\delta$, определенном условиями (2.1), существует, единственно, устойчиво и определяется однозначно по функции $S_*(\gamma)$, которая минимизирует на U функционал $J_1(Q; S)$ и обладает дополнительным свойством

$$\min_{Q \in U} \|Q - S\|_{C_\delta} = \|S_* - S\|_{C_\delta}$$

т. е. минимизирует на U и функционал $\|Q-S\|_{C_\delta}$.

Это утверждение гарантирует равномерную сходимость минимизирующей последовательности и позволяет использовать разложение в равномерно сходящийся ряд Фурье. При этом описанная выше вариационная задача сводится к задаче минимизации функционала

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 + d_k^2)$$

где c_k, d_k — коэффициенты Фурье функции $T(\gamma)$, при линейных ограничениях, а ее решение получено в явном виде (см. [6]).

Пусть теперь $J(Q; S) = J_2(Q; S) = \|Q'-S'\|_{L_2}$, $T(\gamma)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Условия разрешимости примут вид

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T'(\tau) e^{i\tau} d\tau = C_2 - iC_1, \quad \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \tau T'(\tau) d\tau = -C_3 \quad (2.2)$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T'(\tau) d\tau = 0, \quad T(\gamma_1) = 0$$

Таким образом, необходимо минимизировать функционал

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T''(\tau) d\tau$$

при ограничениях (2.2). Следовательно, среди всех гладких функций $T(\gamma)$, удовлетворяющих (2.2), отыскивается та, которая наиболее плавно меняется на промежутке $[\gamma_1, \gamma_2]$. Решение этой вариационной задачи имеет вид

$$T(\gamma) = -a_1 \cos \gamma + a_2 \sin \gamma + \frac{1}{2} a_3 \gamma^2 + a_4 \gamma + a_5 \quad (2.3)$$

где коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 однозначно определяются из системы уравнений, полученной путем подстановки (2.3) в (2.2). Наиболее просто они определяются в случае $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 2\pi$

$$a_2 = C_2/\pi, \quad a_3 = 3[2C_1 + C_3]/[2\pi(6 - \pi^2)], \quad a_4 = -\pi a_3, \quad a_1 = a_5 = 2a_3 - C_1/\pi$$

Если в этом же случае снять ограничение $T(0) = 0$ и потребовать дополнительно, чтобы $\min J_1(Q; S) = J_1(S_*, S)$, то получим $T(\gamma)$ в виде

$$T(\gamma) = \pi^{-1}(C_3/2 + C_1 \cos \gamma + C_2 \sin \gamma)$$

Этот результат эквивалентен результату [1] и совпадает с квазирешением, построенным для функционала J_1 .

3. Выбор гидродинамически целесообразного распределения скорости.

При решении основной обратной задачи краевой задачи аэрогидродинамики исходное распределение $v(s)$ нужно выбирать с учетом требований используемой модели течения и ограничений, предъявляемых при аэродинамическом проектировании профилей. Поэтому выбор $v(s)$ нужно осуществлять так, чтобы на всей поверхности профиля течение оставалось дозвуковым и безотрывным, а соответствующая $v(s)$ форма контуров была физически реальна.

Возможность использования при задании распределения скорости для решеток профилей известных критериев отрыва пограничного слоя (ПС) была реализована в [9] при профилировании лопаток турбомашин по методу годографа скорости, а сам метод подробно описан в [10] (критерий безотрывности выполняется последовательными приближениями). В частном случае одиночного профиля в несжимаемой жидкости в предположении, что ПС является чисто турбулентным, а в распределении скорости имеется «полка» $v = v_0 = \text{const}$, из условий отрыва, приведенных в [10], получается указанная Г. Ю. Степановым простая приближенная формула для безотрывного распределения на участке торможения

$$v(s) = v_0 [1 + K(s - s_0)]^{-m}, \quad s_0 \leq s \leq 1 \quad (3.1)$$

$$K = 0,025 [\delta_0^{**} (1 - s_0)]^{-1}, \quad \delta_0^{**} = \delta^{**}(s_0), \quad m = 0,20 - 0,25$$

где $\delta^{**}(s)$ — толщина потери импульса. В качестве целесообразного условия для задания $v(s)$ на диффузорном участке можно брать условие постоянства специальным образом построенного формпараметра f из однопараметрического метода Кочина — Лойцянского. Это условие позволяет получить безотрывное распределение скорости на диффузорном участке как точное решение интегродифференциального уравнения.

Пусть на верхней поверхности профиля $[s_*, 1]$ имеются участок разгона $[s_*, s_0]$ и участок торможения $[s_0, 1]$ (фиг. 1, б). Обозначим

$$f(s) = av'(s)v^{-b}(s) \left[\int_{s_0}^s v^{b-1}(s) ds + C_0 \right], \quad s_0 \leq s \leq 1 \quad (3.2)$$

где функция $v(s)$ предполагается гладкой на интервале $[s_0, 1]$, a, b

и C_0 — фиксированные постоянные. Критерием безотрывности является неравенство $f(s) \geq f_0$, причем для ламинарного ПС $a=a_1=0,45$; $b=b_1=5,35$; $f_0=f_{01}=-0,0681$, а для турбулентного ПС $a=a_2=1,17$; $b=b_2=4,75$; $f_0=f_{02}=-6$. В предельном случае $f(s)=f_0$ из (3.2) получаем интегродифференциальное уравнение, решением которого является функция (3.1), где

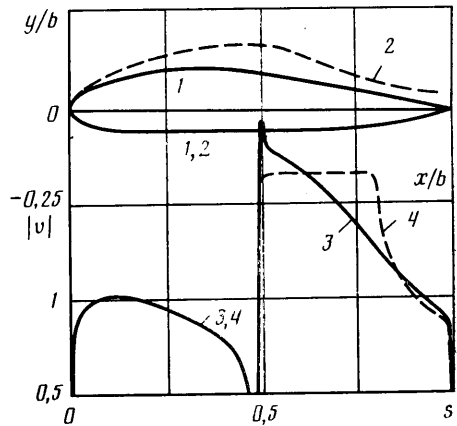
$$m = -f_0[a - f_0(b-1)]^{-1}, \quad K = v_0^{b-1}[a - f_0(b-1)](aC_0)^{-1}, \quad v_0 = v(s_0)$$

Постоянная C_0 определяется из условия непрерывности функции $\delta^{**}(s)$ в точке s_0

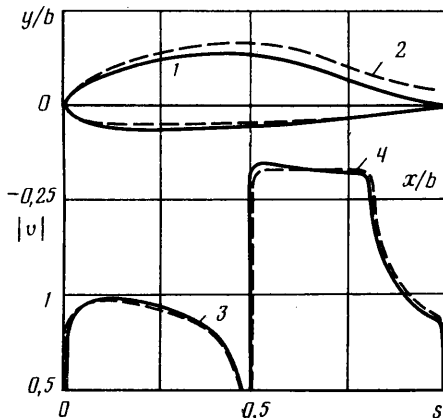
$$C_0 = 82,18 \operatorname{Re}_\infty^{-5/12} v_1^{0,8} \left[\int_{s_0}^{s_1} v^{4,35}(s) ds \right]^{7/12} + \int_{s_1}^{s_0} v^{3,75}(s) ds \quad (3.3)$$

где s_1 — дуговая абсцисса точки перехода ламинарного ПС в турбулентный, $v_1 = v(s_1)$, $\operatorname{Re}_\infty = v_\infty L/\nu$, ν — кинематический коэффициент вязкости. Таким образом, значения постоянных K и m в (3.1) могут быть определены в явном виде в зависимости от предполагаемого строения ПС с использованием формулы (3.3). Отметим, что распределение (3.1) было получено в [11] из условия постоянства параметра $H = \delta^*/\delta^{**}$ в зоне торможения (там же указан способ нахождения постоянных K и m). Здесь δ^* — толщина вытеснения ПС.

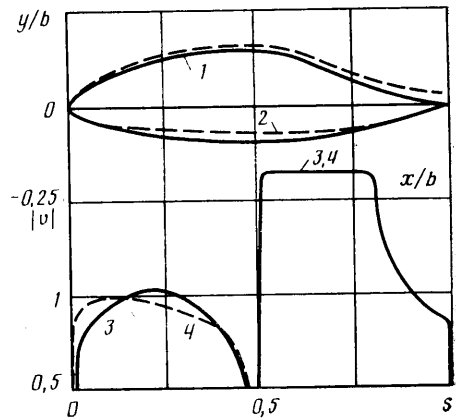
Безотрывное распределение скорости более сложного вида построено Б. Стрэтфордом (см., например, [5]). Оно состоит из двух частей, первая из которых получена на основе разбиения ПС на три подслоя и их анализа, а вторая часть имеет вид (3.1), причем значения K и m соответствуют случаю $H=2$. Расчеты показали, что распределение Стрэтфорда практически идентично (3.1) при $H \approx 1,8$. Оно использовалось при аэродинамическом проектировании высоконесущих профилей (см. [5]).



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

4. Результаты расчетов. Для иллюстрации возможностей разработанного подхода были проведены численные расчеты. Ниже приводится пример, показывающий возможность проектирования новых профилей путем улучшения известных распределений скорости.

В качестве исходного было взято распределение скорости, рассчитанное для профиля В-16 (кривые 3 и 1 на фиг. 2) при $\beta=8,6^\circ$ ($C_v=1,15$). Так как наличие больших отрицательных градиентов скорости вблизи передней кромки может привести к отрыву ПС, то распределение скорости по верхней поверхности было заменено безотрывным, рассчитанным в предположении турбулентности ПС (кривые 4 на фиг. 2-4). Для сохранения угла в задней кромке с $\epsilon=1,86$ распределение скорости на участке $0,983 \leq s \leq 1$ было оставлено неизменным. Для повышения точности интерполяции функции $v(s)$, задаваемой таблично, угловые точки у этого распределения сглаживались по параболам на отрезках $0,49 \leq s \leq 0,51$ и $0,79 \leq s \leq 0,81$. Построенный контур получился разомкнутым (кривые 2 на фиг. 2-4), причем его нижняя часть изменилась незначительно.

Метод квазирешений для замыкания контура первоначально был применен с варьированием скорости по всей поверхности, что привело к некоторому искажению заданного безотрывного распределения (кривая 3 на фиг. 3). Соответствующий профиль с $C_v=1,29$ при $\beta=7,35^\circ$ изображен на фиг. 3 (кривая 1). С целью сохранения заданного безотрывного распределения скорости, используя возможности метода квазирешений, был построен другой профиль (кривая 1 на фиг. 4) с $C_v=1,28$ при $\beta=8^\circ$, когда скорость варьировалась только по нижней поверхности (кривая 3 на фиг. 4), а квазирешение строилось по норме $J_2(Q;S)$. Время счета одного варианта на ЭВМ ЕС-1045 при разбиении контура профиля на 200 участков составило 15 с.

5. Дозвуковой поток газа. Один из подходов к решению задачи для газа основан на приближенном учете сжимаемости за счет замены движения реального газа движением газа Чаплыгина. При этом появляется возможность построения условий разрешимости задачи и применения метода квазирешений для их удовлетворения. Аналитическое решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики в приближении газа Чаплыгина дано в [12], там же построены условия разрешимости. В [13] для удовлетворения этих условий применен численный метод [7], приведены примеры расчетов.

Решение задачи в приближении газа Чаплыгина основано на формуле перехода из плоскости w в физическую плоскость z (см., например, [10])

$$dz = e^{-\tau} dw - c^2 e^{\tau} d\bar{w}$$

где c — известная постоянная, зависящая от числа Маха M_∞ набегающего потока, которое считается заданным. Функция $\chi = S - i\theta$ является аналитической функцией комплексной переменной w (здесь θ — аргумент скорости, $S(\lambda) = \ln[2|\lambda|/(1+\sqrt{1+4c^2\lambda^2})]$, $\lambda = v/a_*$, a_* — критическая скорость звука).

Свойство аналитичности $\chi(w)$ позволяет построить решение задачи по схеме, изложенной в разд. 1. Отличие в формуле перехода из плоскости w в плоскость z приводит при этом к изменению значений B_1 , B_2 , B_3 в (1.4), (1.5)

$$B_1 = \pi(1-\epsilon) + 4\pi \sin^2 \alpha \Lambda_\infty^2 c^2 (1+c^2 \Lambda_\infty^2)^{-1}, \quad B_2 = -2\pi \sin(2\alpha) \Lambda_\infty^2 c^2 (1+c^2 \Lambda_\infty^2)^{-1}$$

$$B_3 = 2\pi \ln \Lambda_\infty, \quad \Lambda_\infty = \exp[S(\lambda_\infty)], \quad \lambda_\infty = v_\infty/a_*$$

где λ_∞ — заданное значение безразмерной скорости набегающего потока. Теперь квазирешение задачи строится аналогично изложенному выше.

6. Вязкая жидкость. Идея решения обратной краевой задачи аэрогидродинамики с учетом вязкости основана на следующих известных предположениях: влияние вязкости сказывается лишь в сравнительно тонком ПС; распределение давления на поверхности профиля, обтекаемого потоком вязкой жидкости, совпадает с распределением давления на поверхности полутела вытеснения, обтекаемого потоком идеальной жидкости. Это полутело получается путем наращивания на контур профиля и линию тока, сходящую с задней кромки, толщины вытеснения δ^* . Кроме этих предположений для приближенного решения задачи необ-

ходимо еще одно, определяющее форму полутела за профилем. Так, при решении обратной краевой задачи аэрогидродинамики по заданному годографу скорости (см., например, [10, § 56]) принималось, что полутело ограничено линиями тока постоянной скорости. В [14], где рассмотрена задача при заданной $v(s)$ для симметричного случая, считалось, что след ограничен двумя параллельными прямыми. Чтобы решать эту задачу для произвольных профилей, будем считать, что след ограничен двумя конгруэнтными линиями тока. Очевидно, что такой след можно считать несущим.

В рамках этих предположений решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики проводится следующим образом: по заданному распределению давления вдоль контура профиля (следовательно, по распределению скорости вдоль части поверхности полутела, получаемой наращиванием δ^* на контур профиля) решаем задачу для идеальной жидкости. В результате находим форму контура полутела, зная которую, можно построить контур профиля. Для его замкнутости необходимо, чтобы контур полутела был разомкнутым на величину $\delta_0^* = \delta_1^* + \delta_2^*$ (δ_1^* , δ_2^* — значения δ^* в точке B соответственно для верхней и нижней поверхностей профиля). Вид условий разрешимости при этом сохраняется, меняются лишь константы B_1 и B_2 . Для $\varepsilon = 2$ получается $B_1 + iB_2 = -\pi + 2\pi\delta_0^* \sin \alpha \exp[i(\alpha + \theta_0)] \Gamma^{-1}$, где θ_0 — значение θ в точке B .

Из приведенного выражения видно, что величины B_1 и B_2 зависят не только от Γ и α , но и от δ_0^* , θ_0 , которые изменяются в процессе нахождения квазирешения. Поэтому построение замкнутого контура в случае вязкой жидкости необходимо проводить итерационным методом.

Авторы благодарят Г. Ю. Степанова за неоднократные полезные обсуждения и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mangler W. Die Berechnung eines Tragflügelprofiles mit vorgeschriebener Druckverteilung // J. Deutschen Luftfahrtforschung. 1938. S. 146–153.
2. Тумашев Г. Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления // Уч. зап. Казан. ун-та. 1952. Т. 112. Кн. 3. С. 3–41.
3. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
4. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т. и др. Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 18. С. 67–124.
5. Liebeck R. H. Design of subsonic airfoil for high lift // J. Aircraft. 1978. V. 15. № 9. P. 547–561.
6. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б. Метод квазирешений в обратной краевой задаче гидроаэродинамики // Изв. вузов. Математика. 1984. № 10. С. 50–59.
7. Strand T. Exact method of designing airfoil with given velocity distribution in incompressible flow // J. Aircraft. 1973. V. 10. № 11. P. 651–659.
8. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Квазирешения обратной краевой задачи гидроаэродинамики // Докл. АН СССР. 1986. Т. 284. № 2. С. 319–322.
9. Степанов Г. Ю. Профиль лопатки турбомашин. А. с. № 155362. Заявл. 14.09.50 // Б. И. 1963. № 12. С. 66.
10. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз. 1962. 512 с.
11. Wortmann F. X. Ein Beitrag zum Entwurf von Laminarprofilen für Segelflugzeuge und Hubschrauber // Z. Flugwiss. 1955. V. 3. N. 10. S. 333–345.
12. Тумашев Г. Г. Нахождение формы профиля по заданному распределению скорости с учетом сжимаемости жидкости // Изв. Казан. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. 1945. Т. 13. Сер. 3. С. 127–132.
13. Strand T. Design method for high lift airfoils with given velocity distribution in compressible subcritical inviscid flow // Kgl. Norske Vid. Selsk. Proc. Theodorsen Collog. 1976. Trondheim. e. a., s. a., p. 114–133.
14. Лебедев Л. Л. Обратная задача теории ламинарного пограничного слоя // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983. Вып. 19. С. 103–106.