

УДК 532.51

ТРЕХМЕРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ВИХРЯ КИРХГОФА

ВЛАДИМИРОВ В. А., ИЛЬИН К. И.

Рассматривается неустойчивость вихря Кирхгофа [1–3] в линейном приближении относительно трехмерных возмущений. Используется метод последовательных приближений в форме [4–6]. Малым параметром служит эксцентриситет ядра. Анализ ограничивается вычислением двух первых приближений. Показано, что уже в первом приближении появляются экспоненциально нарастающие возмущения такого же типа, как предсказанные и наблюдавшиеся ранее во вращающихся потоках внутри сосудов эллиптического сечения [4–9]. В отличие от случая плоских возмущений [1–3], когда существует критическое значение эксцентриситета ядра завихренности, разделяющее устойчивые и неустойчивые режимы течения, здесь неустойчивость предсказывается для сколь угодно малого эксцентриситета.

1. Постановка задачи. Рассматривается точное решение уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости — вихрь Кирхгофа [10]. Во вращающейся со скоростью ζ цилиндрической системе координат r, θ, z ему соответствует стационарное поле с компонентами скорости $U(r, \theta), V(r, \theta), W=0$. Завихренность $2(\Omega - \zeta)$ постоянна в ядре вихря, которое в сечении плоскостями $z = \text{const}$ представляет собой эллипс с полуосями a, b ($a > b$)

$$r = R(\theta, \varepsilon) = (1 + \varepsilon \cos 2\theta)^{-1/2}, \quad \varepsilon = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$$

Вне ядра завихренность равна -2ζ , что в покоящейся системе координат соответствует потенциальному течению. Все величины приведены к безразмерному виду с помощью масштабов длины $L = ab\sqrt{2/(a^2 + b^2)}$ и скорости ΩL .

Задача устойчивости вихря в линейном приближении сводится к изучению решений линеаризованных уравнений движения внутри ядра вихря

$$\begin{aligned} Mu + u \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{2V}{r} v - 2\zeta v &= - \frac{\partial p}{\partial r} \\ Mv + u \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (Uv + Vu) + 2\zeta u &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$Mw = - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$M = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

и вне ядра

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1.2)$$

где u, v, w, p, φ — поля возмущений скорости, давления и потенциала скорости. Граничные условия состоят в выполнении известных кинематического и динамического условий на границе ядра. Полный вид этих условий

ввиду их громоздкости здесь не выписывается. Дополнительные требования состоят в отсутствии особенностей решений (1.1) при $r=0$ и затухании φ при $r \rightarrow \infty$. Решение ищется в виде

$$(u, v, w, p, \varphi) = (u_a, v_a, w_a, p_a, \varphi_a) \exp [i(kz - \omega t)] \quad (1.3)$$

Подстановка (1.3) в (1.1), (1.2) и в граничные условия приводит к спектральной задаче на определение собственных функций и собственных частот ω . Если существует хотя бы одно собственное значение ω с $\text{Im } \omega > 0$, то течение неустойчиво. Получившаяся спектральная задача для уравнений в частных производных очень сложна и решается методом последовательных приближений.

2. Последовательные приближения. Предполагается, что характеризующий эксцентриситет ядра завихренности параметр ε мал. Представление основного течения в виде разложений по степеням параметра ε имеет вид

$$U = -\frac{1}{2}\varepsilon r \sin 2\theta + O(\varepsilon^2), \quad V = \frac{1}{2}r(1 - \varepsilon \cos 2\theta) + O(\varepsilon^2) \quad (2.1)$$

$$P = -1 + \frac{1}{2}r^2(1 - \frac{1}{2}\varepsilon \cos 2\theta) + O(\varepsilon^2), \quad r < R(\theta, \varepsilon)$$

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad V = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \zeta r$$

$$\Phi = \theta + \frac{\varepsilon}{4r^2} \sin 2\theta + O(\varepsilon^2), \quad r > R(\theta, \varepsilon)$$

$$\zeta = 2ab/(a+b)^2 = \frac{1}{2} + O(\varepsilon^2)$$

где P — поле давления, Φ — потенциал скорости.

Поля (2.1), входящие в коэффициенты уравнений (1.1) и граничные условия, представимы в виде рядов по целым степеням ε . Поэтому решения будут аналитическими функциями ε (в окрестности $\varepsilon=0$) и их можно искать в виде рядов

$$(u_a, v_a, w_a, p_a, \varphi_a, \omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} (u_{\nu}, v_{\nu}, w_{\nu}, p_{\nu}, \varphi_{\nu}, \omega_{\nu})$$

Кроме того, удобно взять $k = k_0 + \varepsilon k_1$, смысл величин k_0 и k_1 будет определен ниже. Для нулевого и первого приближений ($\nu=0; 1$) из (1.1), (1.2) следует

$$M_0 u_{\nu} - 2v_{\nu} = -\frac{\partial p_{\nu}}{\partial r} + G_{1\nu}, \quad M_0 v_{\nu} + 2u_{\nu} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_{\nu}}{\partial \theta} + G_{2\nu} \quad (2.2)$$

$$M_0 w_{\nu} = -ik_0 p_{\nu} + G_{3\nu}$$

$$\frac{\partial u_{\nu}}{\partial r} + \frac{u_{\nu}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\nu}}{\partial \theta} + ik_0 w_{\nu} = G_{4\nu}, \quad (0 < r < 1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\nu}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\nu}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{\nu}}{\partial \theta^2} - k_0^2 \varphi_{\nu} = G_{5\nu}, \quad (r > 1)$$

$$M_0 = -i\omega_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad G_{n0} = 0 \quad (n=1, 2, 3, 4, 5)$$

В уравнениях первого приближения ($\nu=1$) функции G_{n1} содержат линейно функции нулевого приближения, а при $n=1, 2, 3$ — также линейно величину ω_1 . Например

$$G_1 = i\omega_1 u_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(r \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \right) + \frac{1}{2} \cos 2\theta \frac{\partial u_0}{\partial \theta}$$

Кинематическое и динамическое граничные условия для нулевого и первого приближений при $r=1$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_0 - \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = 0, \quad i p_0 + \omega_0 \varphi_0 + \frac{i}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} = 0 \\ u_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \sin 2\theta \left(-v_0 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{2} \cos 2\theta \left(-\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} \right) \\ i p_1 + \omega_0 \varphi_1 + \frac{i}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = -\omega_1 \varphi_0 + \frac{i}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \\ + \frac{1}{2} \cos 2\theta \left(-\omega_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - i \frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial \theta} + i \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Сначала рассматривается задача (2.2), (2.3) нулевого приближения. Ее решения представляют собой инерционные волны на вихре с круговым ядром постоянной завихренности (вихре Кельвина). Для гармоник, пропорциональной $e^{im\theta}$, из (2.2) и граничных условий в нуле и на бесконечности следует

$$p_0(r, \theta) = \alpha J_m(\eta_m r) e^{im\theta}, \quad 0 < r < 1 \quad (2.4)$$

$$\varphi_0(r, \theta) = \beta K_m(k_0 r) e^{im\theta}, \quad r > 1$$

$$\eta_m^2 = k_0^2 \Delta_m / \sigma_m^2, \quad \Delta_m = 4 - \sigma_m^2, \quad \sigma_m = m/2 - \omega_0$$

где $J_m(z)$ и $K_m(z)$ — функции Бесселя и Макдональда индекса m ; α, β — комплексные постоянные. Привлечение (2.3) дает дисперсионную связь между ω_0 и k_0

$$\sigma_m \Delta_m^{-1} K_m(k_0) [\sigma_m \eta_m J_m'(\eta_m) + 2m J_m(\eta_m)] + k_0 K_m(k_0) J_m(\eta_m) = 0 \quad (2.5)$$

Спектр ω_0 , задаваемый (2.5), веществен и

$$1/2 m - 2 < \omega_0 < 1/2 m + 2$$

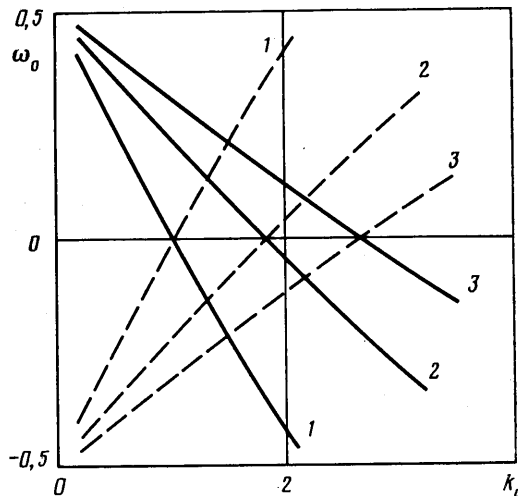
Для задачи (2.2), (2.3) первого приближения вид решений и значение ω_1 могут быть получены при помощи несложных, но громоздких вычислений. Их смысл сводится к определению поправок к инерционным волнам (2.4), обусловленных отличием геометрии от круговой. Поскольку аналогичные вычисления были выполнены в [4–6, 8, 9], здесь сразу будут изложены результаты. Оказывается, что для получения комплексных ω_1 нулевое приближение должно быть выбрано специальным образом. Так, если нулевое приближение взять в виде одной гармоники (2.4) с любым m , то величина ω_1 всегда действительна, что отвечает нейтральному поведению возмущения в первом приближении. Выделенным оказывается случай вырождения, когда возмущение нулевого приближения, характеризующееся частотой ω_0 и волновым числом k_0 , имеет вид суперпозиции двух гармоник с различными m (m_1 и m_2). В этом случае можно показать, что если $|m_1 - m_2| \neq 2$, то ω_1 опять действительна. Неустойчивость ($\text{Im } \omega_1 \neq 0$) может иметь место только при $|m_1 - m_2| = 2$. Этот результат является следствием специальной зависимости правых частей уравнений (2.2) от θ . Вырождение соответствует точкам пересечения дисперсионных кривых $\omega_0(k_0)$ для гармоник $e^{im_1\theta}$ и $e^{im_2\theta}$. Вид дисперсионных кривых для $m = \pm 1$ показан на фигуре. Сплошные линии соответствуют гармонике $e^{i\theta}$, штриховые — гармонике $e^{-i\theta}$. Приведены только по три первых из счетного набора кривых. Каждая точка пересечения обозначена парой чисел ($q; s$), соответствующих номерам пересекающихся кривых на фигуре. Точки с $q = s$ будут называться главными точками пересечения. В силу антисимметрии дисперсионной связи при замене $m \rightarrow -m$ все главные точки пересечения для гармоник с $m = \pm 1$ лежат на оси $\omega_0 = 0$.

Далее ограничимся исследованием аналитически наиболее простого и наиболее существенного [4–9]) случая $m_1=1, m_2=-1$. Вычисление величины ω , в точках пересечения дисперсионных кривых дает

$$\omega_1 = -k_0 k_1 (c_1 + c_{-1}) \pm (k_0^2 k_1^2 (c_1 - c_{-1})^2 + \omega_*^2)^{1/2} \quad (2.6)$$

$$c_m = g_m / f_m \quad (m = \pm 1), \quad \omega_*^2 = h_1 h_{-1} / f_1 f_{-1}$$

где через f_m, g_m, h_m ($m = \pm 1$) обозначены различные функции величин ω ,



k_0 , вид которых приведен в разделе 3. Из (2.6) следует, что неустойчивость ($\text{Im } \omega_1 > 0$) может иметь место, если

$$\omega_*^2 < -k_0^2 k_1^2 (c_1 - c_{-1})^2$$

Наибольший инкремент роста γ достигается при $k_1 = 0$:

$$\gamma = |\omega_*| = |h_1 h_{-1} / f_1 f_{-1}|^{1/2}$$

Неустойчивым оказывается целый интервал волновых чисел

$$|k_1| < k_* \equiv \frac{1}{k_0} \left| \frac{\omega_*}{c_1 - c_{-1}} \right|$$

Для главных точек пересечения можно показать, что $f_{-1} = -f_1, h_{-1} = h_1, g_{-1} = g_1$, и поэтому

$$\omega_1 = \pm (4k_0^2 k_1^2 c_1^2 - h_1^2 / f_1^2)^{1/2}$$

Из (2.7) видно, что для главных точек пересечения неустойчивость всегда имеет место. Результаты вычислений $k_0, \omega_0, \gamma, k_*$ для ряда точек пересечения представлены в таблице.

Для главных точек пересечения инкременты роста оказываются на порядок больше, чем для остальных. Следовательно, так же, как в [4–6, 8, 9], можно сделать вывод о доминирующей роли неустойчивостей, соответствующих главным точкам пересечения дисперсионных кривых.

Таким образом, имеет место трехмерная неустойчивость вихря Кирхгофа того же типа, что и в ряде хорошо изученных задач о резонансной неустойчивости вращающихся течений с линиями тока, слабо отличающимися от окружностей [4–9].

q	s	k_0	ω_0	γ	k_*
1	1	1,0350	0	0,1986	0,5038
2	2	1,8655	0	0,2002	0,8863
3	3	2,6844	0	0,2011	1,2661
4	4	3,4997	0	0,2018	1,6457
5	5	4,3134	0	0,2024	2,0260
2	1	1,3365	0,1381	0,0167	0,0543
1	2	1,3365	-0,1381	0,0167	0,0543
3	1	1,5089	0,2145	0,0133	0,0490
1	3	1,5089	-0,2145	0,0133	0,0490
3	2	2,2054	0,0861	0,0143	0,0748
2	3	2,2054	-0,0861	0,0143	0,0748

3. Расчетные формулы. Для функций f_m , g_m , h_m справедливы представления

$$f_m = \sigma_m^{-2} \int_0^1 r J_m(\eta_m r) F_m dr + \frac{1}{\sigma_m} \left[\frac{z_m(1)}{\Delta_m} J_m(\eta_m) - \varkappa_m K_m(k_0) \lambda_m(1) \right]$$

$$g_m = \sigma_m^{-2} \int_0^1 r [J_m(\eta_m r)]^2 dr + \int_1^\infty r [\varkappa_m K_m(k_0 r)]^2 dr$$

$$h_m = \sigma_m^{-2} \int_0^1 r J_m(\eta_m r) H_m dr + \frac{J_m(\eta_m)}{\sigma_m} \left[Q_{-m} - \frac{X_{-m}}{\Delta_m} \right] + \frac{\lambda_m(1) \Psi_{-m}}{\sigma_m}$$

$$F_m = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \lambda_m - \Delta_m^{-1} \left[\sigma_m \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) - \frac{2m}{r} \right] z_m$$

$$H_m = -Y_{-m} + \Delta_m^{-1} \left[\sigma_m \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) - \frac{2m}{r} \right] X_{-m}$$

$$X_m = 2b_m - \sigma_{-m} a_m, \quad Y_m = -mr^{-1} b_m + k_0 c_m$$

$$z_m = 2\mu_m - \sigma_m \lambda_m, \quad a_m = \frac{m}{4} \left(r \frac{d}{dr} + 2 \right) \lambda_m$$

$$b_m = \frac{1}{4} \left(2\lambda_m + mr \frac{d\mu_m}{dr} \right), \quad c_m = -\frac{m}{4} \frac{k_0}{\sigma_m} \left(r \frac{d}{dr} + 1 \right) J_m(\eta_m r)$$

$$\lambda_m = -\Delta_m^{-1} \left[\sigma_m \frac{dJ_m(\eta_m r)}{dr} + \frac{2m}{r} J_m(\eta_m r) \right]$$

$$\mu_m = \Delta_m^{-1} \left[2 \frac{dJ_m(\eta_m r)}{dr} + \frac{m\sigma_m}{r} J_m(\eta_m r) \right]$$

$$Q_m = \frac{1}{4} \left[\varkappa_m k_0^2 K_m''(k_0) - 2\varkappa_m K_m(k_0) - \frac{d\lambda_m(1)}{dr} - 2m\mu_m(1) \right]$$

$$\Psi_m = \frac{1}{4} \left[\eta_m J_m'(\eta_m) - \sigma_{-m} \varkappa_m k_0 K_m'(k_0) + m \varkappa_m K_m(k_0) \right]$$

$$\varkappa_m = J_m(\eta_m) / [\sigma_m K_m(k_0)]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Love A. E. H. On the stability of certain vortex motions // Proc. London Math. Soc. 1893. V. 25. № 1. P. 18-42.
2. Петров А. Г. Устойчивость цилиндрических вихрей // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1981. Вып. 53. С. 103-116.

3. *Перепелкин В. В., Петров А. Г.* Динамика эллиптического вихря // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 55–60.
4. *Tsai C.-Y., Widnall S. E.* The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field // J. Fluid Mech. 1976. V. 73. Pt 4. P. 721–733.
5. *Владимиров В. А.* К устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью в эллиптическом цилиндре // ПМТФ. 1983. № 4. С. 118–124.
6. *Владимиров В. А., Тарасов В. Ф.* Резонансная неустойчивость вращающихся слабо деформированных течений // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1983. Вып. 59. С. 39–61.
7. *Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М.* Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
8. *Владимиров В. А., Рыбак Л. Я., Тарасов В. Ф.* Экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости линейного вихря с деформированным ядром // ПМТФ. 1983. № 3. С. 61–69.
9. *Владимиров В. А., Вострецов Д. Г.* Неустойчивость стационарных течений с постоянной завихренностью в сосудах эллиптического сечения // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 369–377.
10. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
22.IX.1986