

УДК 532.5.013.4:537.84

**ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА РАЗВИТИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПРИ МАЛОЙ ЗАКРИТИЧНОСТИ**

РУДЕРМАН М. С.

Исследование магнитогиродинамической неустойчивости Кельвина — Гельмгольца имеет важное значение для понимания процессов, происходящих в космической и лабораторной плазме. Магнитогиродинамическая неустойчивость Кельвина — Гельмгольца в линейном приближении для несжимаемой жидкости исследована в [1, 2]. Затем в работах многочисленных авторов исследовалось влияние сжимаемости.

Изучение нелинейной стадии развития магнитогиродинамической неустойчивости Кельвина — Гельмгольца в сжимаемой среде проводилось с помощью численного решения двумерной нестационарной граничной задачи (см., например, [3]). При этом, естественно, расчеты выполнялись для ограниченного набора параметров, что затрудняет полное понимание происходящих процессов.

Представляется разумным в качестве следующего шага после построения линейной теории исследовать развитие неустойчивости при слабой закритичности, когда слабая нелинейность может конкурировать с неустойчивостью.

В настоящей работе исследована нелинейная стадия развития возмущений на тангенциальном магнитогиродинамическом разрыве в слабых до- и закритических режимах. Предполагается, что жидкость несжимаема и разрыв терпят не только скорость, но также плотность и магнитное поле. Получено уравнение, описывающее эволюцию нелинейных возмущений малой амплитуды. Для периодических возмущений это уравнение сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд фурье-гармоник. С помощью обрезания система сводится к конечной и затем интегрируется численно. Расчеты показывают, что эволюция первоначально синусоидального возмущения всегда заканчивается появлением в профиле волны бесконечной производной, которое происходит либо в виде образования бесконечно острого пика (острия), либо в виде опрокидывания волны.

1. Основные уравнения. Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость с бесконечной проводимостью, описываемая уравнениями магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad \nabla \mathbf{v} = 0; \quad \nabla \mathbf{B} = 0$$

Здесь \mathbf{v} — скорость, \mathbf{B} — магнитная индукция, p — давление, ρ — плотность.

Введем декартову систему координат x, y, z . В невозмущенном состоянии магнитное поле и скорость направлены вдоль оси x . Плотность, скорость и магнитное поле терпят разрыв при $z=0$, причем $\rho=\rho_+$, $u=U$, $B_x=-B_+$ при $z>0$, $\rho=\rho_-$, $u=-U$, $B_x=B_-$ при $z<0$ (u — x -компонента скорости). В дальнейшем полагаем, что возмущения не зависят от y и y -компоненты скорости и магнитного поля равны нулю. Кроме того, предполагается, что $\rho_+ V_+ \neq \rho_- V_-$, где $V_{\pm}^2 = B_{\pm}^2 / 4\pi\rho_{\pm}$.

На возмущенной поверхности разрыва, задаваемой уравнением $z = \eta(x, t)$, выполняются следующие граничные условия:

$$w_{\pm} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{\pm} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \left[p + \frac{B^2}{8\pi} \right] = 0 \quad (1.2)$$

где w — z -компонента скорости, а квадратные скобки обозначают скачок величины.

Вводя векторные потенциалы для возмущений скорости и магнитного поля, перепишем уравнения (1.1) в виде

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_y (\nabla \psi \times \nabla \Delta \psi) = V \Delta \frac{\partial \chi}{\partial x} + \mathbf{e}_y (\nabla \chi \times \nabla \Delta \chi) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = V \frac{\partial \psi}{\partial x} - U_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} + \mathbf{e}_y (\nabla \chi \times \nabla \psi)$$

$$\mathbf{v} = U_0 \mathbf{e}_x - \nabla \times (\psi \mathbf{e}_y); \quad \mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_x - \nabla \times (\chi \mathbf{e}_y)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — единичные векторы осей x и y , $V = V_+$, $U_0 = U$, $B_0 = B_+$ при $z > 0$, $V = V_-$, $U_0 = -U$, $B_0 = B_-$ при $z < 0$.

Дифференцируя второе граничное условие (1.2) по x и исключая ∇p с помощью (1.1), перепишем граничные условия в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(U_0 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= 0 \\ \left[\rho \left\{ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + U_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta \psi - V \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta \chi + 1 \left(\Delta \psi \nabla \psi - \right. \right. \right. & \\ \left. \left. - \Delta \chi \nabla \chi - \frac{1}{2} \nabla (\nabla \psi)^2 + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \chi)^2 - U_0 \nabla \frac{\partial \psi}{\partial z} + V \nabla \frac{\partial \chi}{\partial z} \right\} \right] &= 0 \\ l = (1; 0; \partial \eta / \partial x) & \end{aligned} \quad (1.4)$$

Производные функций ψ, χ должны стремиться к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Кроме того, в дальнейшем предполагается, что ψ, χ и η либо периодические функции x , либо стремятся к постоянным значениям при $x \rightarrow \pm \infty$.

Уравнения (1.3) с граничными условиями (1.4) используются для вывода уравнения, описывающего нелинейную эволюцию неустойчивости Кельвина — Гельмгольца.

2. Уравнение для нелинейных возмущений малой амплитуды. Линейная теория неустойчивости Кельвина — Гельмгольца тангенциального магнитогидродинамического разрыва построена в [1, 2]. Согласно [1], для возмущений вида $f(z) \exp(ikx - i\omega t)$ имеет место дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{k} &= c \pm \gamma; \quad c = \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-} U \\ \gamma^2 &= \frac{\rho_+ V_+^2 + \rho_- V_-^2}{\rho_+ + \rho_-} - \frac{4\rho_+ \rho_- U^2}{(\rho_+ + \rho_-)^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Неустойчивость возникает при $\gamma^2 < 0$, т. е. при выполнении условия

$$U^2 > U_c^2 \equiv \frac{\rho_+ + \rho_-}{4\rho_+ \rho_-} (\rho_+ V_+^2 + \rho_- V_-^2)$$

Теперь можно пояснить смысл условия $\rho_+ V_+ \neq \rho_- V_-$. Это условие означает, что при $U = U_c$ скорость распространения волны относительно верхней и нижней сред не равна V_+ и V_- соответственно, т. е. отсутствует резонанс между поверхностными и альфвеновскими волнами.

В дальнейшем считаем, что U близко U_c и полагаем $\gamma = \varepsilon \gamma_*$, $\varepsilon \ll 1$, $\gamma_* \sim U$. Нелинейность также считаем слабой. В линейном приближении в соответствии с (2.1) для описания эволюции возмущений имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \eta - \varepsilon^2 \gamma_*^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2)$$

Предположим, что нелинейность квадратична. Тогда для того, чтобы нелинейность конкурировала с неустойчивостью, описываемой последним членом в (2.2), безразмерная амплитуда возмущений должна быть порядка ε^2 .

Эволюция возмущений будет выглядеть следующим образом. Возмущение переносится как целое со скоростью c и медленно меняет свою форму под действием неустойчивости и нелинейности за время порядка $\varepsilon^{-1} t_0$, где t_0 — характерный период возмущения. В соответствии с этим вводим переменные $\xi = x - c_0 t$ и $\tau = \varepsilon t$, где $c_0 = U_c (\rho_+ - \rho_-) / (\rho_+ + \rho_-)$. В новых переменных уравнения (1.3) и граничные условия (1.4) принимают вид

$$\begin{aligned} & \Delta \left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - c_0 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \kappa U_c (1 - \varepsilon^2 \gamma_0^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \\ & + \mathbf{e}_y (\nabla \psi \times \nabla \Delta \psi) = V \Delta \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \mathbf{e}_y (\nabla \chi + \nabla \Delta \chi) \\ & \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \tau} - c_0 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = V \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \kappa U_c (1 - \varepsilon^2 \gamma_0^2) \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \mathbf{e}_y (\nabla \chi \times \nabla \psi) \\ & \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - c_0 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \kappa U_c (1 - \varepsilon^2 \gamma_0^2) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \\ & \left[\rho \left\{ c_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial z} - \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial z} - c \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} + \right. \right. \\ & + \kappa U_c (1 - \varepsilon^2 \gamma_0^2) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \Delta \psi - V \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \Delta \chi + \mathbf{l} (\nabla \psi \Delta \psi - \nabla \chi \Delta \chi - \frac{1}{2} \nabla (\nabla \psi)^2 + \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \chi)^2 + V \nabla \frac{\partial \chi}{\partial z} - \kappa U_c (1 - \varepsilon^2 \gamma_0^2) \nabla \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \right] = 0 \\ & \mathbf{l} = \left(1; 0; \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right), \quad \gamma_0^2 = \frac{(\rho_+ + \rho_-) \gamma_*^2}{2(\rho_+ V_+^2 + \rho_- V_-^2)}, \quad \kappa = \text{sgn } z \end{aligned} \quad (2.3)$$

Переменные ψ , χ и η разлагаем в ряды вида

$$\varepsilon^2 f^{(1)} + \varepsilon^3 f^{(2)} + \varepsilon^4 f^{(3)} + \dots$$

Собирая члены порядка ε^2 в (2.3) и учитывая, что из условия $\rho_+ V_+ \neq \rho_- V_-$ следует неравенство $c_0 - \kappa U_c \neq V$, получим уравнения и граничные условия

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} &= 0; \quad \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \xi} = - \frac{V}{c_0 - \kappa U_c} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \xi} &= (c_0 - \kappa U_c) \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \\ \left[\rho \left\{ (c_0 - \kappa U_c) \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial \xi \partial z} + V \frac{\partial^2 \chi^{(1)}}{\partial \xi \partial z} \right\} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вводя аналогично [4] разложения в ряды Фурье для функций, периодических по ξ , и в интеграл Фурье для функций, стремящихся к нулю на бесконечности, запишем решение (2.4) в виде

$$\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\xi}\right)_k = (c_0 - \kappa U_c) \left(\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi}\right)_k e^{-\kappa|k|z} \quad (2.5)$$

где индекс k означает преобразование Фурье.

Собирая в (2.3) члены порядка ε^3 , имеем с учетом (2.4)

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\xi} = 0; \quad \frac{\partial\chi^{(2)}}{\partial\xi} &= \frac{1}{c_0 - \kappa U_c} \left(\frac{\partial\chi^{(1)}}{\partial\tau} - V \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\xi} \right) \\ \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\xi} &= (c_0 - \kappa U_c) \frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\tau} \\ \left[\rho \left\{ (c_0 - \kappa U_c) \frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial\xi\partial z} + V \frac{\partial^2\chi^{(2)}}{\partial\xi\partial z} - \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\tau\partial\xi} \right\} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение первого уравнения (2.6) с учетом первого граничного условия (2.6) записывается в виде

$$\left(\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\xi}\right)_k = \left\{ (c_0 - \kappa U_c) \left(\frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial\xi}\right)_k - \left(\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\tau}\right)_k \right\} e^{\kappa|k|z} \quad (2.7)$$

С помощью (2.4), (2.5), (2.7) и второго уравнения (2.6) легко показать, что второе граничное условие (2.6) удовлетворяется тождественно.

Собирая в (2.3) члены порядка ε^4 и учитывая (2.4), (2.5), (2.6) и (2.7), получим

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial\xi} = 0; \quad \frac{\partial\chi^{(3)}}{\partial\xi} &= \frac{1}{c_0 - \kappa U_c} \left(\frac{\partial\chi^{(2)}}{\partial\tau} - V \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial\xi} + \frac{\kappa V U_c \gamma_0^2}{c_0 - \kappa V_c} \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\xi} \right) \\ \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial\xi} &= (c_0 - \kappa U_c) \frac{\partial\eta^{(3)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial\tau} + \kappa U_c \gamma_0^2 \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\eta^{(1)} \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} \right) \\ \left[\rho \left\{ (c_0 - \kappa U_c) \frac{\partial^2\psi^{(3)}}{\partial\xi\partial z} + V \frac{\partial^2\chi^{(3)}}{\partial\xi\partial z} - \frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial\tau\partial z} + \kappa U_c \gamma_0^2 \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\xi\partial z} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{(c_0 - \kappa U_c)^2 - V^2}{(c_0 - \kappa U_c)^2} \left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\xi\partial z} + 2(c_0 - \kappa U_c)^2 \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\eta^{(1)} \frac{\partial^2\eta^{(1)}}{\partial\xi^2} \right) \right) \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Решение первого уравнения (2.8) с учетом первого граничного условия (2.8) записывается в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial\xi}\right)_k &= \left\{ (c_0 - \kappa U_c) \frac{\partial\eta^{(3)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial\tau} + \kappa U_c \gamma_0^2 \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi} - \right. \\ &\left. - (\kappa c_0 - U_c) \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\eta^{(1)} H \left(\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi} \right) \right) \right\} e^{-\kappa|k|z} \end{aligned} \quad (2.9)$$

При выводе (2.9) использованы формулы

$$\left. \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=0} = (\kappa c_0 - U_c) H \left(\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial\xi} \right) \quad (2.10)$$

$$H(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi') d\xi'}{\xi' - \xi}; \quad (H(f))_k = i f_k \operatorname{sgn} k$$

Подставляя (2.9) во второе граничное условие (2.8), после преобразований имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial \tau^2} - \gamma_*^2 \frac{\partial^2 \eta^{(1)}}{\partial \xi^2} - a \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta^{(1)} H \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) - H \left(\eta^{(1)} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} H \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial \xi} \right) \right\} = 0; \quad a = 2 \frac{\rho_+^2 V_+^2 - \rho_-^2 V_-^2}{(\rho_+ + \rho_-)^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Возвращаясь к прежним переменным и полагая $\eta = \varepsilon \eta^{(1)}$, перепишем (2.11) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \eta - \gamma^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \\ - a \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - H \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) похоже на уравнение для нелинейных поверхностных альфвеновских волн, полученное в [4]: нелинейные члены в фигурной скобке полностью совпадают с нелинейными членами уравнения, полученного в [4]. Однако существенным отличием (2.12) от уравнения для нелинейных поверхностных альфвеновских волн является то, что (2.12) имеет второй порядок по времени. Последнее обстоятельство связано с тем, что (2.12) выведено с помощью асимптотического разложения вблизи кратного корня $\omega = c_0 k$ дисперсионного уравнения.

Отметим, что без ограничения общности можно считать $a > 0$, поскольку этого можно добиться соответствующим выбором оси z .

3. Закон сохранения энергии. Введем оператор $I(\eta)$, определяемый равенством $\partial I(\eta)/\partial x = \eta$ и дополнительными условиями $I(\eta) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, если $\eta \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $\langle I(\eta) \rangle = 0$, если η — периодическая функция (угловые скобки означают среднее за период).

Применяя оператор I к (2.12), получим

$$\begin{aligned} I(\ddot{\eta}) = \gamma^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + a \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - H \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right\} \\ \dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее, применим оператор H к (2.12), умножим полученное равенство на $I(\dot{\eta})$, сложим с (3.1), умноженным на $H(\dot{\eta})$, и проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞ , если $\eta \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, и по периоду, если η — периодическая функция. В результате с помощью следующих формул получим интеграл уравнения (2.12):

$$\begin{aligned} H(fg) = H(H(f)H(g)) + fH(g) + gH(f) \\ \int fH(g) dx = - \int gH(f) dx; \quad H^2(f) = -f \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\int \left\{ I(\dot{\eta})H(\eta) + \gamma^2 \eta H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2a \frac{\partial \eta}{\partial x} H(\eta) H \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right\} dx = \text{const}$$

В (3.2) интеграл берется в пределах от $-\infty$ до ∞ , если $\eta \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, и в пределах от 0 до L , если η — периодическая функция (L — период).

4. Генерация второй гармоники. Рассмотрим случай $\gamma^2 > 0$. В линейном приближении уравнение (2.12) имеет решение в виде бегущей волны

$$\eta^{(0)} = \eta_0 \sin \theta, \quad \theta = \frac{2\pi}{L} \{x - (c_0 + \gamma)t\}$$

Отыскивая решение (2.12) в виде $\eta = \eta^{(0)} + \eta^{(1)}$, где $\eta^{(1)}$ — малый добавок, получим

$$\eta = \eta_0 \left(\sin \theta - \frac{\pi^2 a \eta_0 t}{L^2 \gamma} \sin 2\theta \right) \quad (4.1)$$

Как видим, имеет место резонансная генерация второй гармоники, при которой ее амплитуда линейно растет со временем.

В нелинейной акустике [5] подобное поведение свидетельствует об опрокидывании волны. По аналогии можно считать, что и в рассматриваемом случае резонансная генерация второй гармоники свидетельствует об образовании бесконечной производной в профиле волны.

С помощью (4.1) можно оценить время образования бесконечной производной t_c . В [4] с помощью численного исследования показано, что опрокидывание поверхностной альфвеновской волны происходит приблизительно в тот момент, когда амплитуда второй гармоники становится равной $1/4$ от первоначальной амплитуды первой гармоники. Считая, что аналогичное утверждение справедливо и для волн, описываемых уравнением (2.12), получим для t_c

$$t_c \approx L^2 \gamma / 4\pi^2 a \eta_0 \quad (4.2)$$

Пусть теперь $\gamma^2 < 0$. В качестве первого приближения выберем экспоненциально растущее решение (2.12) вида

$$\eta = \eta_0 e^{(2\pi/L)|\gamma|t} \sin 2\pi(x - c_0 t) / L$$

Во втором приближении имеем

$$\eta = \eta_0 e^{(2\pi/L)|\gamma|t} \sin \frac{2\pi}{L}(x - c_0 t) - \frac{\pi^2 a \eta_0^2}{L^2 |\gamma|} t e^{(4\pi/L)|\gamma|t} \cos \frac{4\pi}{L}(x - c_0 t) \quad (4.3)$$

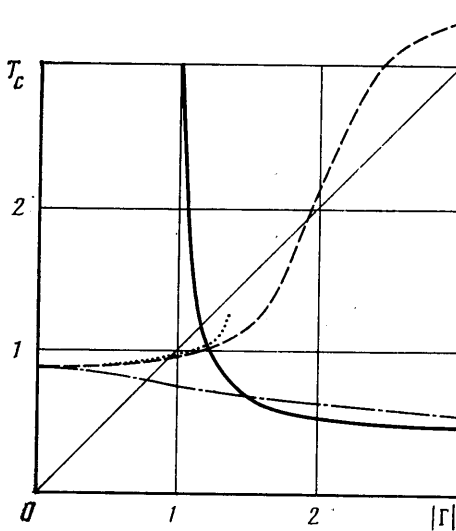
Полагая, как и прежде, что бесконечная производная появляется в тот момент, когда амплитуда второй гармоники равна $1/4$ от первоначальной амплитуды первой, и считая $|\Gamma|^2 \gg 1$, находим (Γ определяется формулами (5.2))

$$t_c \approx \frac{L}{2\pi |\gamma|} \ln \frac{|\Gamma^2|}{\ln |\Gamma^2|} \quad (4.4)$$

5. Численное исследование опрокидывания. Рассмотрим эволюцию возмущения, задаваемого при $t=0$ формулами ($\eta_0 > 0$)

$$\eta = \eta_0 \sin \frac{2\pi x}{L}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \alpha_* \cos \frac{2\pi x}{L} + \beta_* \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (5.1)$$

Вводя новые безразмерные переменные, перепишем (2.12) и (5.1) в виде



Фиг. 1

$$\frac{\partial^2 h}{\partial T^2} - \Gamma^2 \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(h H \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right) - H \left(h \frac{\partial h}{\partial X} \right) \right) + \frac{\partial h}{\partial X} H \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right) \right\} = 0$$

$$h|_{T=0} = \sin X;$$

$$\frac{\partial h}{\partial T} \Big|_{T=0} = \alpha \cos X + \beta \sin X \quad (5.2)$$

$$X = \frac{2\pi}{L}(x - c_0 t);$$

$$T = \frac{t}{t_*}; \quad h = \frac{\eta}{\eta_0}; \quad \Gamma^2 = \frac{\gamma^2 L}{2\pi a \eta_0}$$

$$\alpha = \frac{1}{\eta_0} \alpha_* t_*;$$

$$\beta = \frac{1}{\eta_0} \beta_* t_*; \quad t_* = \left(\frac{L^3}{8\pi^3 a \eta_0} \right)^{1/4}$$

Разлагая h в ряд Фурье и подставляя разложение в (5.2) и интеграл (3.2), записанный в безразмерных переменных, получим бесконечную систему уравнений, начальных условий и интеграл энергии

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(T) \cos nX + b_n(T) \sin nX)$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n = & -n^2 \Gamma^2 a_n + n^2 \sum_{m=1}^{\infty} m (a_m a_{n+m} + b_m b_{n+m}) + \\ & + \frac{n}{2} \sum_{m=1}^{n-1} m(n-m) (a_m a_{n-m} - b_m b_{n-m}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

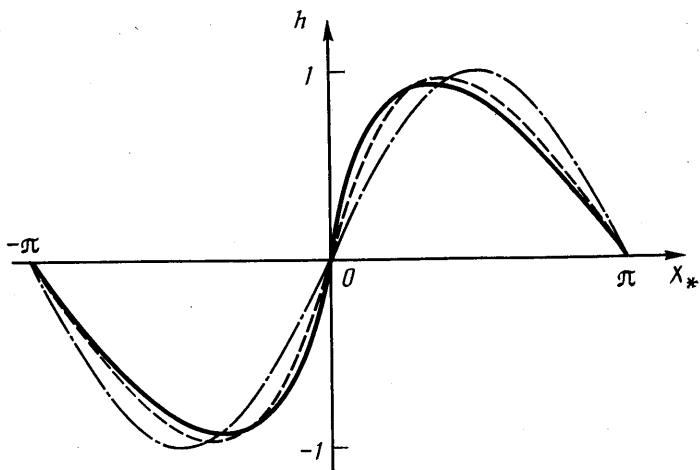
$$\begin{aligned} \dot{b}_n = & -n^2 \Gamma^2 b_n - n^2 \sum_{m=1}^{\infty} m (b_m a_{n+m} - a_m b_{n+m}) + \\ & + \frac{n}{2} \sum_{m=1}^{n-1} m(n-m) (a_m b_{n-m} + b_m a_{n-m}) \end{aligned}$$

$$a_1(0) = 0; \quad b_1(0) = 1; \quad a_n(0) = b_n(0) = 0 \quad (n \geq 2)$$

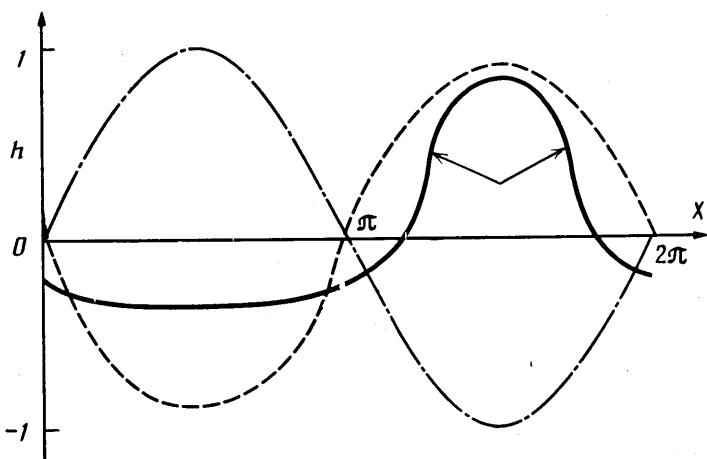
$$\dot{a}_1(0) = \alpha; \quad \dot{b}_1(0) = \beta; \quad \dot{a}_n(0) = \dot{b}_n(0) = 0 \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} (\dot{a}_n^2 + \dot{b}_n^2) + n \Gamma^2 (a_n^2 + b_n^2) - \sum_{m=1}^n m(n-m) (a_n a_m a_{n-m} + \right. \\ \left. + b_n b_m a_{n-m} + b_n a_m b_{n-m} - a_n b_m b_{n-m}) \right\} = \text{const} \end{aligned}$$

где точка означает производную по T . Интеграл энергии использовался для контроля точности вычислений.



Фиг. 2



Фиг. 3

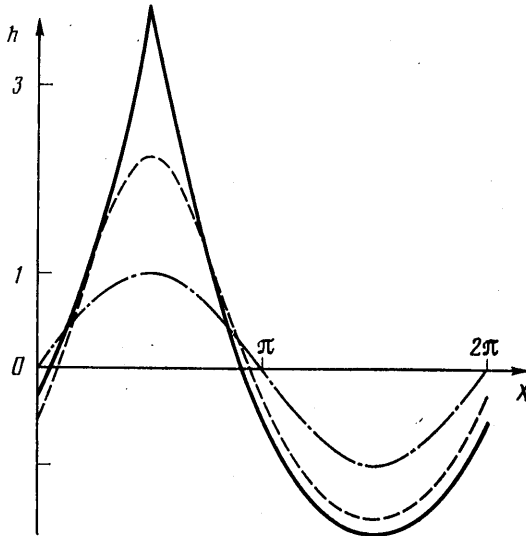
В разложении h в ряд Фурье отсутствует аддитивная функция времени, поскольку из (5.2) следует, что эта функция тождественно равна нулю.

При $\Gamma^2 \geq 0$ исследовались решения, являющиеся в линейном приближении либо волной, бегущей вправо, либо стоячей волной.

Решению в виде бегущей волны соответствует $\alpha = -\Gamma$, $\beta = 0$. Момент времени, когда возникает бесконечная производная в профиле волны, будем обозначать T_c . На фиг. 1 штриховая кривая изображает зависимость T_c от Γ для бегущей волны. Асимптотическая зависимость (4.2), принимающая в безразмерных переменных вид $T_c = \Gamma$, изображена сплошной линией. Видно, что при $\Gamma > 2$ асимптотическая формула (4.2) является вполне удовлетворительной, хотя и дает несколько заниженные значения T_c . Отметим, что при $\Gamma < 1$ эволюция волны качественно совпадает с изображенной на фиг. 4 эволюцией неустойчивой волны, только образующееся острие является несимметричным. При $\Gamma > 1,5$ происходит опрокидывание волны. На фиг. 2 изображена эволюция волны при $\Gamma = 3$. По оси абсцисс отложена величина $X_* = X - \Gamma T$. Таким образом, волна перемещается вдоль оси X как целое и медленно изменяет свою форму за характерное время порядка Γ . Штрихпунктирная, штриховая и сплошная кривые соответствуют $T = 0$; $2,1$ и $3,3 \approx T_c$ соответственно. Фигура 2 качественно совпадает

с фигурой работы [4], где изображена эволюция нелинейной поверхностной альфвеновской волны.

Решению в виде стоячей волны соответствует $\alpha = \beta = 0$. При $\Gamma \leq 1,37$ в волне в течение первого полупериода образуется острие. При этом эволюция волны качественно совпадает с эволюцией неустойчивой волны. При $\Gamma \geq 1,38$ эволюция волны носит качественно иной характер. Эволюция



Фиг. 4

стоячей волны при $\Gamma = 1,38$ изображена на фиг. 3. Бесконечная производная образуется в течение второго полупериода в окрестностях точек, указанных стрелками. Штрихпунктирная, штриховая и сплошная кривые соответствуют $T=0$; 2,3 (полупериод равен 2,274) и 3,0 (это несколько меньше T_c). Расчеты, проведенные для $\Gamma = 1,5$, показывают качественно такую же картину эволюции. Для других значений $\Gamma \geq 1,38$ расчеты не проводились, поскольку они связаны с очень большими затратами машинного времени.

На фиг. 1 пунктирная кривая изображает зависимость T_c от Γ в случае стоячей волны для $\Gamma \leq 1,37$.

В случае $\Gamma^2 < 0$ исследовались решения, в линейном приближении экспоненциально растущие по времени, что соответствует $\alpha = 0$, $\beta = |\Gamma|$. При всех $|\Gamma|$ качественный характер эволюции волны один и тот же. При $T = T_c$ образуется острие. На фиг. 4 изображена эволюция волны при $\Gamma^2 = -1$. Штрихпунктирная, штриховая и сплошная кривые соответствуют $T=0$; 0,6 и $0,76 \approx T_c$. Зависимость T_c от $|\Gamma|$ изображена на фиг. 1 штрихпунктирной кривой. Сплошной кривой изображена асимптотическая зависимость (4.4), которая в безразмерных переменных имеет вид

$$T_c = \frac{1}{|\Gamma|} \ln \frac{|\Gamma^2|}{\ln |\Gamma^2|}$$

Видно, что (4.4) дает вполне приемлемую оценку для T_c .

Результаты численных расчетов показывают, что за конечное время в некоторой точке профиля волны производная становится бесконечной. В зависимости от величины Γ^2 и от начальных условий это происходит в результате либо образования острия, либо опрокидывания. Таким образом, при T , близком к T_c , нарушается основное предположение, принятое в работе, о малости амплитуды возмущений, которое фактически означает

малую крутизну профиля волны. Поэтому при T , близки к T_c , использование уравнения (2.12) неправомерно: необходимо либо использовать полную систему уравнений, либо учитывать диссипативные процессы, способные остановить увеличение крутизны профиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика // УФН. 1957. Т. 62. Вып. 3. С. 247–303.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
3. Miura A. Nonlinear evolution of the magnetohydrodynamic Kelvin – Helmholtz instability // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. № 11. P. 779–782.
4. Рудерман М. С. Распространение нелинейных альфвеновских поверхностных волн по тангенциальному магнитогидродинамическому разрыву в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 98–105.
5. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.VI.1987