

УДК 532.51:612.13

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С МЕХАНИКОЙ ЛЕГОЧНОЙ ПАРЕНХИМЫ

ДЬЯЧЕНКО А. И., ЛЮБИМОВ Г. А.

В работе [1], которая является расширенным изложением доклада [2], обоснованы уравнения сохранения массы и импульса для задач динамики легочной паренхимы. Ниже эта система уравнений замыкается уравнением притока тепла. Как и в [1, 2], уравнение притока тепла получается на основе методов механики гетерогенных сред [3] и анатомических данных о строении легочной паренхимы.

1. Паренхимой называется основная функциональная ткань газообменной части легких. Часто под термином «паренхима» понимают не только тканевую структуру, но и объем основных газообменных единиц — альвеол, стенки которых образуют паренхимой. Если принять такое определение паренхимы, то на основе оценок [4] можно заключить, что объем легких на 90% заполнен паренхимой. Остальные 10% объема легких заняты непаренхиматозными структурами, к которым относят соединительную ткань, плевру, междольковые перегородки, крупные воздухоносные пути и кровеносные сосуды и др.

В настоящее время методы и уравнения механики сплошной среды используются только для решения задач о статическом поведении легочной паренхимы и она при этом рассматривается как упругая среда (см., например, [5, 6]).

Будем моделировать паренхиму многофазной сплошной средой. Введем в рассмотрение две объемные фазы: фазу 1, к которой отнесем газ, содержащийся в альвеолах и мелких дыхательных путях, и фазу 2, к которой отнесем тканевые структуры (стенки альвеол, мелких дыхательных путей и кровеносных сосудов, соединительную ткань и т. д.), а также кровь, содержащуюся в мелких кровеносных сосудах. Обмен массой, импульсом и энергией между фазами 1 и 2 осуществляется на межфазной поверхности S_{12} .

Будем считать, что в фазе 1 содержится поверхностная (двумерная) фаза 3. Эта фаза представляет собой многосвязную поверхность S_{13} , состоящую из совокупности поперечных сечений входов в дыхательные пути. Через фазу 3 (поверхность S_{13}) осуществляется газообмен между альвеолами (фаза 1) и атмосферой.

Будем считать, что в фазе 2 содержится поверхностная (двумерная) фаза 4. Эта фаза представляет собой многосвязную поверхность S_{24} , состоящую из совокупности поперечных сечений входов в крупные кровеносные сосуды — артерии и вены ($S_{24} = S_{24}^a + S_{24}^v$, S_{24}^a , S_{24}^v — артериальные и венозные части поверхности S_{24}). Через фазу 4 осуществляется кровоснабжение элемента паренхимы.

В силу анатомического строения легких поверхности S_{12} , S_{13} , S_{24} не пересекаются.

2. Так как характерный размер альвеол $l_1 \sim 10^{-2}$ см, а характерная длина свободного пробега в газе $l \sim 10^{-5}$ см, то распределение параметров в пределах первой фазы можно описывать уравнениями сплошной среды. Минимальный характерный размер во второй фазе определяется толщиной межальвеолярной стенки и составляет величину $l_2 \gtrsim 10^{-3}$ см.

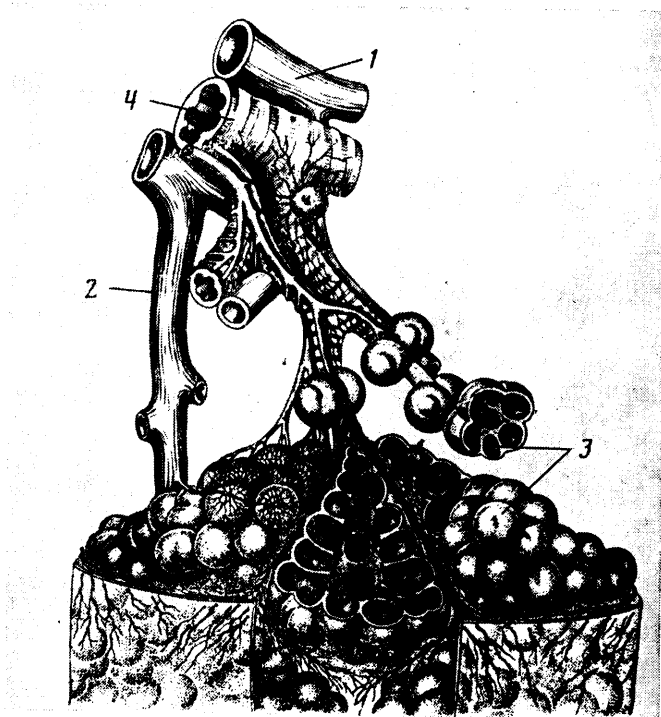
При этом локальное распределение параметров в пределах второй фазы также можно описывать уравнениями сплошной среды. В общем случае, не конкретизируя физических свойств фаз, уравнения сохранения массы, импульса и уравнение притока тепла можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho_i^{\circ'}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i^{\circ'} \mathbf{v}_i^{\circ'}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i^{\circ'} \mathbf{v}_i^{\circ'}) + \operatorname{div} \{ \rho_i^{\circ'} v_i^{k'} v_i^{l'} \} = \operatorname{div} \{ \sigma_i^{kl'} \} + \rho_i^{\circ'} \mathbf{g}_i \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i^{\circ'} u_i^{\circ'}) + \operatorname{div}(\rho_i^{\circ'} u_i^{\circ'} \mathbf{v}_i^{\circ'}) = \sum_k^3 \sum_l^3 \sigma_i^{kl'} \nabla^k v_i^{l'} + \operatorname{div} \mathbf{q}_i^{\circ'} \quad (2.3)$$

Здесь $\rho_i^{\circ'}$ — истинная плотность фаз; $\mathbf{v}_i^{\circ'}$ — скорость в соответствующей фазе; $\{ \sigma_i^{kl'} \}$ — тензор напряжений в фазах; $\mathbf{q}_i^{\circ'}$ — вектор потока тепла; $u_i^{\circ'}$ — внутренняя энергия фаз; \mathbf{g}_i — вектор массовых сил. Штрихом обозначены локальные значения параметров в соответствующих фазах; фигурные скобки здесь и далее обозначают тензорные величины.



Решение конкретных задач на основе уравнений (2.1)–(2.3), по-видимому, практически невозможно благодаря сложности внутренней структуры легких. В связи с этим, как это обычно делается в механике гетерогенных сред [3], введем в рассмотрение средние по некоторому макрообъему величины и получим на основе (2.1)–(2.3) уравнения, описывающие распределение этих средних величин.

Выберем в качестве анатомического аналога для объема осреднения легочную дольку. Характерный размер легочных долек $L \sim 10^{-1} - 1$ см. Долька (см. фигуру) является следующей по размеру после альвеол микроструктурной единицей легкого. С одной стороны, долька состоит

из большого количества относительно обособленных альвеол (3 на фиг.), воздухоснабжение которых осуществляется через один бронх (4), а кровоснабжение — через одну артерию и одну вену (1 и 2). С другой стороны, в легких содержится несколько тысяч легочных долек, так что характерный размер легких $L_0 \geq 10$ см намного превосходит характерный размер долек $L_0 \gg L$.

Таким образом, при анализе средних по объемам долек параметров можно получать достаточно детерминированную информацию (с характерным разрешением порядка 1 см). В то же время введение таких средних допускает моделирование легких в их терминах на основе уравнений сплошной среды.

3. Будем обозначать объем, по которому производится осреднение через dV , а содержащиеся в нем объемы фаз — через dV_1 и dV_2 соответственно, так что $dV = dV_1 + dV_2$. Поверхность dS , ограничивающая объем dV , состоит из сечений фаз dS_1 и dS_2 , так что $dS = dS_1 + dS_2$. Обозначим через dS_{12} межфазную границу в объеме dV ; dS_{13} и dS_{24} — поверхности двумерных фаз 3 и 4 в объеме dV .

Введем обозначения

$$s_{12} = \frac{dS_{12}}{dV}, \quad s_{13} = \frac{dS_{13}}{dV}, \quad s = \frac{dS_{24}}{dV} \quad (3.1)$$

Будем рассматривать величины, средние по объемам фаз, по межфазной границе S_{12} и поверхностным фазам S_{13} , S_{24} .

$$\langle \varphi' \rangle_i = \frac{1}{dV_i} \int_{dV_i} \varphi' dV, \quad \langle \varphi' \rangle_{ij} = \frac{1}{dS_{ij}} \int_{dS_{ij}} \varphi' ds \quad (3.2)$$

$$i=1, 2; j=2, 3 \ (i=1), 1, 4 \ (i=2)$$

Величина φ в формулах (3.2) — любая скалярная, векторная или тензорная функция.

Кроме средних по объему фаз величин (3.2) удобно рассматривать средние по объему осреднения величины

$$\langle \varphi_i' \rangle = \frac{1}{dV} \int_{dV} \varphi_i' dV = \frac{dV_i}{dV} \langle \varphi_i' \rangle_i = \alpha_i \langle \varphi_i' \rangle_i, \quad \alpha_i = \frac{dV_i}{dV} \quad (3.3)$$

Здесь α_i — объемная доля фазы. В частности, наряду со средней истинной плотностью $\rho_i^{\circ} = \langle \rho_i^{\circ} \rangle_i$ удобно рассматривать среднюю по объему среды плотность фазы

$$\rho_i = \langle \rho_i^{\circ} \rangle = \alpha_i \langle \rho_i^{\circ} \rangle_i \quad (3.4)$$

Наряду со средними по объему величинами будем рассматривать среднемассовые величины

$$\varphi_i = \frac{\langle \rho_i^{\circ} \varphi_i' \rangle_i}{\rho_i^{\circ}} = \frac{\langle \rho_i^{\circ} \varphi_i' \rangle}{\rho_i} \quad (3.5)$$

Используя введенные определения, осредним уравнения (2.1) — (2.3) по объему dV . Процедура осреднения уравнений аналогична стандартной процедуре [3], за исключением учета дополнительно влияния фаз 3 и 4. Формулы преобразования средних от производных, учитывающие наличие поверхностных фаз 3 и 4, приведены в [1].

Выберем в качестве макроскопических параметров среды среднюю по объему dV плотности фаз ρ_i , среднемассовую скорость v_i и внутреннюю энергию единицы массы фазы u_i . Для этих параметров осредненные уравнения (2.1) — (2.3) имеют вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \mathbf{v}_i = \sum_j I_{ji}, \quad I_{ji} = s_{ji} \langle \xi_{ji}' \rangle_i, \quad (3.6)$$

$$j=2,3 \quad (i=1), \quad j=1,4 \quad (i=2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \mathbf{v}_i) + \operatorname{div} \{ \rho_i v_i^h v_i^l \} = \operatorname{div} \{ \sigma^{hl} \}_i + \sum_j \mathbf{P}_{ji} + \rho_i \mathbf{g}_i, \quad (3.7)$$

$$\{ \sigma^{hl} \}_i = \alpha_i [\langle \{ \sigma_i^{hl'} \} \rangle_i - \langle \rho_i \sigma' \Delta v_i^{h'} \Delta v_i^{l'} \rangle_i]$$

$$\mathbf{P}_{ji} = s_{ji} (\langle \{ \sigma_i^{hl'} \} \mathbf{n}_{ji}' \rangle_{ji} + \langle \xi_{ii}' \mathbf{v}_i' \rangle_{ji})$$

$$j=2,3 \quad (i=1); \quad j=1,4 \quad (i=2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u_i) + \operatorname{div} \rho_i u_i \mathbf{v}_i = \alpha_i \left\langle \sum_h \sum_l \sigma_i^{hl'} \nabla^h v_i^{l'} \right\rangle_i - \quad (3.8)$$

$$- \operatorname{div} \mathbf{q}_i - \operatorname{div} \Gamma_i - s_{12} (\langle q_i^{h'} n_{ij}^{h'} \rangle_{12} - \langle \xi_{ij}' u_i' \rangle_{12}) + s_{i\beta} (\langle \xi_{i\beta}' u_i' \rangle_{i\beta} - \langle q_i^{h'} n_{i\beta}^{h'} \rangle_{i\beta}),$$

$$\mathbf{q}_i = q_i^h \mathbf{e}^h, \quad q_i^h = \alpha_i \langle q_i^{h'} \rangle_i, \quad \Gamma_i = \Gamma_i^h \mathbf{e}^h, \quad \Gamma_i^h = \alpha_i \langle \rho_i \sigma' \Delta u_i^h \Delta v_i^{h'} \rangle_i$$

$$\beta=3 \quad (i=1); \quad \beta=4 \quad (i=2)$$

$$\xi_{ij}' = -\rho_i \sigma' (\mathbf{v}_i' - \mathbf{N}_{ij}') \mathbf{n}_{ij}'$$

Здесь ξ_{ij}' — величина локального притока массы к поверхности S_{ij} , \mathbf{N}_{ij}' — скорость перемещения элемента поверхности S_{ij} , \mathbf{n}_{ij}' — нормаль к поверхности S_{ij} , направленная в сторону фазы j ($\mathbf{n}_{ij}' = -\mathbf{n}_{ji}'$), символом Δ обозначена флуктуация соответствующей величины относительно ее среднемассового значения $\Delta \varphi_i = \varphi_i' - \varphi_i$.

Уравнения (3.7), (3.9) содержат ряд величин, пропорциональных s_{ij} . Эти величины имеют разную физическую природу, но все они соответствуют осреднению по поверхностям. Величины, соответствующие осреднению по фазам 3 и 4, выражают собой потоки массы, импульса и энергии, которые покидают фазы 1 или 2. Эти величины при решении задач должны быть связаны с параметрами воздухоносного тракта или системы кровообращения. Эти соотношения зависят от постановки конкретной задачи и здесь рассматриваться не будут.

Величины, соответствующие осреднению по межфазной границе S_{12} , должны удовлетворять некоторым соотношениям, выражающим законы сохранения массы, импульса и энергии на межфазной границе. Эти соотношения можно получать либо феноменологически (как это делается в [3]), либо предельным переходом из уравнений (3.6)–(3.8). Будем следовать по второму пути.

Для того чтобы получить осредненные уравнения сохранения на межфазной границе S_{12} , рассмотрим «поверхностную фазу», заключенную в объеме V_{Σ} , который ограничен двумя поверхностями, расположенными на расстоянии h сколько угодно близко ($h \rightarrow 0$) от поверхности S_{12} по обе ее стороны, а также «торцевой» поверхностью, которая расположена либо на поверхности dS , либо на границах фаз 3 и 4. Будем обозначать осредненные по объему dV величины, относящиеся к поверхностной фазе, индексом Σ .

Введем понятия средних поверхностных массы, импульса и энергии

$$\rho_{\Sigma S} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{dS_{12}} \int_{V_{\Sigma}} \rho^{\sigma'} dV, \quad \rho_{\Sigma S} \mathbf{v}_{\Sigma S} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{dS_{12}} \int_{V_{\Sigma}} \rho^{\sigma'} \mathbf{v}' dV$$

$$U_{\Sigma S} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{dS_{12}} \int_{V_{\Sigma}} \rho^{\sigma'} u' dV \quad (3.9)$$

При этом средние по объему dV значения величин для поверхностной фазы связаны со средними по поверхности (3.9) соотношениями

$$\rho_{\Sigma} = s_{12} \rho_{\Sigma S}, \quad v_{\Sigma} = v_{\Sigma S}, \quad U_{\Sigma} = s_{12} U_{\Sigma S}$$

В (3.9) плотность в микродвижении ρ° , скорость v' и внутренняя энергия u' принимают одно из значений в фазе 1 или 2 в зависимости от расположения точки по отношению к поверхности S_{12} . Если подынтегральные функции в (3.9) ограничены в объеме V_{Σ} , то соответствующие поверхностные средние равны нулю. Соответствующие функции могут принимать неограниченные значения на поверхности S_{12} , если поверхность раздела фаз моделирует некоторые материальные слои, обладающие специальными свойствами. Например, при исследовании легких к поверхности раздела фаз 1 и 2 (S_{12}) можно относить слой покрывающей альвеолы жидкости, обладающей благодаря наличию снижающего поверхностное натяжение сурфактанта весьма сложными механическими свойствами. Аналогичным образом можно ввести локальные поверхностные величины и для микродвижения. Для этого в интегралах (3.9) вместо V_{Σ} надо ввести объем $\delta V_{\Sigma} = h \delta S_{12}$, представляющий собой элемент объема V_{Σ} , который выделен около рассматриваемой точки и опирается на элемент поверхности δS_{12} . Естественно, что средние (3.9) будут совпадать со средними по поверхности dS_{12} внутри объема dV от соответствующих локальных поверхностных величин.

На границе жидкой и газообразной фаз в общем случае необходимо учитывать силы поверхностного натяжения. Будем описывать силы поверхностного натяжения тензором $\{\sigma_{\Sigma*}^{kl'}\}$, компоненты которого неограниченно возрастают в точках поверхности S_{12} , но так, что остаются конечными величинами

$$\sigma_{\Sigma S}^{kl'} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S_{12}} \int_{\delta V_{\Sigma}} \sigma_{\Sigma*}^{kl'} dV \quad (3.10)$$

Величины (3.10) представляют собой компоненты поверхностного тензора напряжений, связанных с поверхностным натяжением (в этом тензоре отличны от нуля только четыре компоненты, соответствующие проекциям напряжений на координатные оси, лежащие в касательной плоскости к поверхности S_{12}). Очевидно, что будут ограничены также величины, определенные соотношениями типа (3.10), в которых под интегралом стоит произведение $\sigma_{\Sigma*}^{kl'}$ на ограниченную вблизи поверхности S_{12} величину.

Примем теперь, что объем осреднения в уравнениях (3.6)–(3.8) совпадает с V_{Σ} , и перейдем в этих уравнениях к пределу при $h \rightarrow 0$. Воспользовавшись определениями (3.9), (3.10) и тем, что члены, связанные с осреднением по объему V_{Σ} от ограниченных величин, будут стремиться к нулю при $h \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial \rho_{\Sigma}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_{\Sigma} v_{\Sigma} = \langle \langle \xi_{12}' \rangle_{12} + \langle \xi_{21}' \rangle_{12} \rangle s_{12} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\Sigma} v_{\Sigma}) + \operatorname{div} \{ \rho_{\Sigma} v_{\Sigma}^k v_{\Sigma}^l \} = \operatorname{div} \{ \sigma_{\Sigma}^{kl} \} + \operatorname{div} \{ \Pi_{\Sigma}^{kl} \} - s_{12} \langle \langle \sigma_i^{kl'} \rangle_{12} \rangle_{12} + \\ + \langle \langle \sigma_2^{kl'} \rangle_{21} \rangle_{12} + \langle \xi_{12} v_1' \rangle_{12} + \langle \xi_{21} v_2' \rangle_{12} + \rho_{\Sigma} g_{\Sigma}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{\Sigma}^{kl} \equiv \frac{s_{12}}{dS_{12}} \int_{dS_{12}} \sigma_{\Sigma S}^{kl'} ds, \quad \Pi_{\Sigma}^{kl} = -s_{12} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{dS_{12}} \int_{V_{\Sigma}} \rho^{\circ} \Delta v^k \Delta v^{l'} dV$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\Sigma}}{\partial t} + \operatorname{div} (U_{\Sigma} v_{\Sigma}) = A_{\Sigma} - s_{12} \langle \langle \xi_{12}' u_1' \rangle_{12} - \langle q_1^{kl} n_{12}^{kl'} \rangle_{12} + \\ + \langle \xi_{21}' u_2 \rangle_{12} - \langle q_2^{kl} n_{21}^{kl'} \rangle_{12} \rangle - \operatorname{div} \Gamma_{\Sigma} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$A_{\Sigma} = \frac{s_{12}}{dS_{12}} \int \sum_k \sum_l \sigma_{\Sigma}^{kl'} \nabla^k v_{\Sigma}^{l'} ds, \quad \Gamma_{\Sigma} = \frac{s_{12}}{dS_{12}} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{V_{\Sigma}} \rho^{o'} \Delta u' \Delta v' dV$$

Здесь учтено, что внешняя нормаль к поверхности объема V_{Σ} противоположна по направлению внешним нормальям к поверхностям фаз 1 и 2 в точках поверхности S_{12} ; члены, пропорциональные $s_{i\beta}$, опущены, так как, по определению, объем не пересекается с фазами 3 и 4.

Отметим, что если поверхностная плотность отсутствует, $\rho_{\Sigma}=0$ (например, поверхность раздела представляет собой геометрическую поверхность), то $\Pi_{\Sigma}^{kl}=0$, $\Gamma_{\Sigma}=0$ и соотношения (3.11), (3.12) перейдут в соответствующие соотношения работы [3]. Запись уравнения притока тепла в форме (3.13) представляется более удобной по сравнению с [3], так как левая часть этого уравнения имеет естественную дивергентную форму.

Если считать, что поверхность раздела фаз представляет собой геометрическую поверхность, на которой отсутствует масса, или пренебречь относительным движением поверхностной массы, то в микродвижении скорость поверхностной фазы v_{Σ}' будет совпадать со скоростью перемещения поверхности S_{12} : $v_{\Sigma}' = N_{12}'$. Отсюда следует, что в данном случае соответствующие среднемассовые по макрообъему скорости также будут совпадать: $v_{\Sigma} = N_{12}$.

4. В [1] на основе оценок, опирающихся на особенности анатомической структуры дольки (объема осреднения) и характерные значения параметров, оцененные по экспериментальным данным, показано, что для задач, характерное время которых $\tau \geq 10^{-3}$ с, легочную паренхиму можно описывать односкоростной и однотемпературной сплошной средой

$$v_1 = v_2 = v, \quad T_1 = T_2 = T \quad (4.1)$$

В этих условиях для решения широкого круга механических задач удобно использовать уравнения для среды в целом. Введем средние для среды величины

$$\rho = \alpha_1 \rho_1^o + \alpha_2 \rho_2^o + s_{12} \rho_{\Sigma} = \rho_1 + \rho_2 + s_{12} \rho_{\Sigma} \quad (4.2)$$

$$\rho U = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + U_{\Sigma}$$

Примем дополнительно, что относительная скорость поверхностной фазы равна нулю и что

$$v_{\Sigma} = N_{12} = v \quad (4.3)$$

Уравнения для среды в целом при условиях (4.1), (4.3) получаются суммированием соответствующих уравнений для объемных (3.6)–(3.8) и поверхностных (3.11)–(3.13) фаз. Приведенные в [1] оценки позволяют представить уравнения неразрывности и импульса для среды в целом в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = I_{31} + I_{42} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}\{\rho v^k v^l\} = & \operatorname{div}\{\sigma^{kl}\} + \operatorname{div}(\{\Pi\}_1 + \{\Pi\}_2 + \\ & + \{\Pi\}_{\Sigma}) + \rho g + s_{24}^a \rho_2^o (v^a)^2 n^a + s_{24}^v \rho_2^o (v^v)^2 n^v \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\{\sigma^{kl}\} = \alpha_1 \{\langle \sigma_1^{kl'} \rangle_1\} + \alpha_2 \{\langle \sigma_2^{kl'} \rangle_2\} + \{\sigma_{\Sigma}^{kl}\}$$

$$\{\Pi\}_i = \alpha_i \{\langle \rho_i^{o'} \Delta v_i^{k'} \Delta v_i^{l'} \rangle_i\}$$

Здесь s_{24}^a , s_{24}^v — отнесенные к величине объема осреднения dV площади поперечного сечения дольковой артерии и вены соответственно; v^a , v^v — средние скорости крови в артерии и вене; n^a , n^v — векторы нормали к поперечному сечению дольковых артерии и вены.

Для получения уравнения притока тепла для среды в целом сложим уравнения (3.8) для фаз 1, 2 ($i=1, 2$) и уравнение (3.13). В результате сложения уравнений с учетом (4.2), (4.3) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho U + \operatorname{div}(\rho U \mathbf{v}) &= A - \operatorname{div} \mathbf{q} + \sum_{i=1}^2 \operatorname{div} \Gamma_i + \operatorname{div} \Gamma_z + \\ &+ \sum_{i=1}^2 s_{i\beta} (\langle \xi_{i\beta}' u_i' \rangle_{i\beta} - \langle q_i^{k\beta} n_{i\beta}^k \rangle_{i\beta}) \\ &\quad \beta=3 \quad (i=1), \quad \beta=4 \quad (i=2) \\ A &= \sum_{i=1}^2 \alpha_i \left\langle \sum_k \sum_l \sigma_i^{kl'} \nabla^k v_i^{l'} \right\rangle_i + A_z \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь U , A , \mathbf{q} — внутренняя энергия единицы объема для среды в целом (4.3); суммарная работа внутренних поверхностных сил и суммарный вектор потока тепла.

По порядку величины поверхностные силы, определяемые тензором $\{\sigma_z^{kl}\}$, не превосходят величины альвеолярного давления. Следовательно, величина A_z не превосходит по порядку величины работы внутренних поверхностных сил в объеме среды.

Оценим члены в уравнении (4.6) для условий спокойного и форсированного дыхания, для которых характерны значения параметров $t_* \geq 0,1$ с, $l_* \sim 10$ см, $v_* \leq 1$ см/с.

В литературе отсутствуют достаточные данные о реологических свойствах паренхимы. При решении статических задач часто используется связь между тензорами деформаций и напряжений, присущая упругому телу (например, [5-7]). Оценка вязкостных свойств паренхимы в литературе практически отсутствует. В связи с этим для оценок будем считать, что тензор напряжений состоит из двух частей — давления и вязкоупругой части, характерной для тела Фойхта, а для внутренней энергии и вектора потока тепла примем простейшие соотношения

$$\sigma^{kl} = -p_1 \delta^{kl} + k \operatorname{div} u \delta^{kl} + 2\mu \left(u^{kl} - \frac{1}{3} \operatorname{div} u \delta^{kl} \right) + \xi \delta^{kl} \operatorname{div} \dot{u} + 2\eta \left(\dot{u}^{kl} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \dot{u} \delta^{kl} \right) \tag{4.7}$$

$$U = cT, \quad q = \lambda \operatorname{grad} T \tag{4.8}$$

В этих соотношениях p_1 — давление в газовой фазе (принимается, что среднее давление $p = p_1$), k , μ — модули объемного сжатия и сдвига (зависят от объема легких); ξ , η — коэффициенты вязкости в паренхиме; u — вектор перемещения; u^{kl} , \dot{u}^{kl} — компоненты тензоров деформаций и скоростей деформаций; c , λ — теплоемкость и теплопроводность паренхимы.

Опираясь на соотношения (4.8), (4.7) и на тот факт, что плотность, теплоемкость и теплопроводность воздуха намного ниже соответствующих величин для крови и ткани, будем использовать в оценках следующие соотношения:

$$A \sim \max \left\{ p_* \frac{v_*}{l_*}, k \frac{v_*^2}{l_*^2} t_*, \xi \frac{v_*^2}{l_*^2} \right\} \tag{4.9}$$

$$\rho_* \sim \rho_2^{10^{-1}}, \quad U \sim c_2 T_*, \quad q \sim q_2 \sim \lambda_2 \frac{\Delta T_*}{l_*}, \quad p_* \sim p_1$$

Здесь ΔT_* — характерное значение разности температур; звездочкой обозначены характерные значения соответствующего параметра.

Оценим сначала, какой процесс определяет величину работы внутренних поверхностных сил A . Используем для оценок величину модуля объемного сжатия, соответствующую по данным [7] объемам легких и давлениям, характерным для спокойного

и форсированного дыхания $k \sim 5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^4$ г/см \cdot с 2 . Так как значения коэффициентов вязкости в соотношении (4.7) в литературе отсутствуют, то для оценки ξ были использованы данные по затуханию звука в легких [8, 9]. Анализ этих данных привел к оценке $\xi \sim 10^3 - 10^4$ г/см \cdot с.

Опираясь на указанные значения констант и характерные значения $p_* \sim 10^6$ г/см \cdot с 2 , $t_* \geq 0,1$ с, получим, что $kt_*/\xi \leq 1$, $p_*l_*/v_*\xi \geq 10^3$. Отсюда следует, что работа внутренних поверхностных сил

$$A \sim p_* \frac{v_*}{l_*}, \quad A = -p_1 \operatorname{div} v \quad (4.10)$$

т. е. в работу внутренних поверхностных сил основной вклад в рассматриваемой области параметров вносит работа сил давления (работой вязких и упругих сил можно пренебречь).

Воспользовавшись (4.9) и (4.10), легко показать, что изменение температуры, связанное с работой сил давления, будет составлять величину

$$\Delta T_A \sim \frac{P_*}{\rho_* c} \sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ град } (c \sim c_2 \sim 1 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{град})) \quad (4.11)$$

Для рассматриваемого круга задач – спокойное и форсированное дыхание – таким изменением температуры можно пренебречь.

Если флуктуации скорости и температуры в микродвижении малы по сравнению с их средними значениями (что естественно предположить), то члены, связанные с пульсационным движением, в (4.6) можно опустить.

Будем считать, что температура внешней по отношению к легким среды несильно отличается от температуры легких $\Delta T < 0,1 T_*$. В этих условиях изменение температуры за счет потерь на теплопроводность будет иметь порядок

$$\Delta T_q \sim \frac{\lambda t_*}{l_*^2 \rho_* c} \Delta T \approx 10^{-5} \Delta T < 10^{-6} T_*$$

(при оценке принято $v_* \sim 1$ см/с, $\rho_* = 0,1$ г/см 3 , $\lambda \sim 1,4 \cdot 10^{-3}$ кал/(см \cdot с \cdot град)). Из этой оценки очевидно, что теплообмен с внешней средой не может изменить температуру паренхимы. Из этой же оценки следует, что теплопроводность внутри легких также не может существенно изменить температуру паренхимы.

Таким образом, проведенные оценки показывают, что существенного изменения температуры паренхимы в процессе дыхания (спокойного или форсированного) можно ожидать только за счет теплообмена при массопереносе крови и воздуха через долю (последний член в уравнении (4.6)).

Количество тепла Q_b , передаваемое воздухом единице объема паренхимы в течение одного дыхательного цикла, пропорционально разности температур паренхимы и внешней среды ΔT и дыхательному объему V_g

$$Q_b \sim t_* s_{31} \langle u_1' \xi_{31} \rangle_{31} \sim \frac{\rho_1 V_g c_1 \Delta T}{V} \quad (4.12)$$

где V – объем легких.

Изменение температуры паренхимы за счет теплообмена с вдыхаемым воздухом (отношение $\Delta \rho U / Q_b \sim 1$) имеет порядок

$$\Delta T_b < \frac{\rho_1 V_g c_1 \Delta T}{V \rho_* c} < \frac{\rho_1}{\rho} \frac{V_g}{V} \cdot 10^{-1} T_* < 10^{-3} T_* \quad (4.13)$$

Отсюда следует, что изменение температуры паренхимы за счет теплообмена с вдыхаемым воздухом при условии $\Delta T < 0,1 T_*$ не превосходит долей градуса даже в том случае, если пренебречь нагревом перфузируемой крови (крови, прокачиваемой через легкие за время дыхательного цикла).

Количество тепла Q_k , уносимого кровью при перфузии за время дыхательного цикла, можно оценить аналогично (4.12)

$$Q_k \sim t_* \frac{V_k}{V} s_{42} \langle u_2' \xi_{42}' \rangle_{42} \sim \rho_2 \frac{V_k}{V} c \Delta T_k$$

Изменение температуры перфузируемой крови при ее теплообмене с вдыхаемым воздухом можно оценить из условия $Q_k / Q_b \sim 1$

$$\Delta T_k < \frac{\rho_1 V_g c_1 \Delta T}{\rho_2 V_k c} < 10^{-4} T_* \quad (4.14)$$

При этой оценке принято $\rho_1 / \rho_2 \sim 10^{-3}$, $c / c_2 \sim 0,2$, $V_g / V_k \sim 1 - 10$, что соответствует реальному для легких отношению дыхательного объема к объему перфузии.

Из (4.13), (4.14) следует, что изменение температуры паренхимы и перфузируемой крови в процессе дыхания при условии $\Delta T < 0,1T_*$ составляет доли градуса.

Проведенные оценки показывают, что для задач, связанных со спокойным и форсированным дыханием, главными членами в правой части уравнения притока тепла (4.6) являются члены, выражающие работу сил давления и теплообмен с вдыхаемым воздухом и перфузируемой кровью (см. (4.11), (4.13), (4.14)). При этом уравнение притока тепла для рассматриваемых задач можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U v) = -p \operatorname{div} v + \sum_{i=1}^2 s_{i\beta} \langle \xi_{i\beta} u_i' \rangle \quad (4.15)$$

Однако если не интересоваться изменениями температур порядка долей градусов, которые описываются этим уравнением, то вместо уравнения притока тепла можно пользоваться условием изотермичности паренхимы $T = \text{const}$.

Для решения задач о динамике паренхимы в этом приближении $T = \text{const}$ необходимо пользоваться системой уравнений (4.4), (4.5), дополненной соотношениями (4.7), уравнением состояния для газовой фазы $p_1 = (R/\mu_0) \rho T$, а также соотношениями, определяющими связь потоков массы и импульса, которые покидают фазы 1 и 2. Последние соотношения определяются постановкой конкретных задач.

В реальных условиях благодаря тому что даже при дыхании очень холодным газом происходит его нагрев в верхних дыхательных путях и крупных бронхах, членом, связанным притоком тепла вместе с вдыхаемым газом, в (4.13) можно пренебречь. Член же, связанный с притоком тепла при перфузии крови, может стать существенным только при изменении (локальном или общем) кровенаполнения легких.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяченко А. И., Любимов Г. А. Уравнения динамики легочной паренхимы, рассматриваемой как многофазная сплошная среда // *Механика и научно-технический прогресс*. М.: Наука, 1987. Т. 2. С. 244–260.
2. Дьяченко А. И., Любимов Г. А. Модель динамики легочной паренхимы как многофазной сплошной среды // *Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике*, Ташкент: Нац. ком-т СССР по теорет. и прикл. механике, 1986. С. 263.
3. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
4. Вейбель Э. Р. Морфометрия легких человека. М.: Медицина, 1970. 175 с.
5. Rodarte J. R. Stress-strain analysis and the lung // *Federat. Proc.* 1982. V. 41. № 1. P. 130–135.
6. Фын Ю. Ч. Биомеханика // *Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Международ. конгр. IUTAM*. М.: Мир, 1979. С. 100–135.
7. Lai-Fook S. J. Elastic properties of lung parenchyma: The effect of pressure-volume hysteresis on the behaviour of large blood vessels // *J. Biomech.* 1979. V. 12. № 10. P. 757–764.
8. Немировский Л. И. Пульмофонография. М.: Медицина, 1981. 160 с.
9. Cegla V. H. Some aspects of pneumosonography // *Progr. Resp. Res.* Basel: Karger, 1979. V. 11. P. 235–241.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII 1987