**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1988**

УДК 533.6.011.72:524.35

О ЦЕНТРАЛЬНОМ ВЗРЫВЕ В НЕОДНОРОДНОМ ШАРЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В РАВНОВЕСИИ В СОБСТВЕННОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

ЧИЛАЧАВА Т. И.

Широкое распространение получило численное моделирование задач о процессах, происходящих в недрах звезд, для выяснения явлений вспышек сверхновых [1–4]. При этом обычно основное внимание уделяется физическим процессам, связанным с термоядерными реакциями и распространением нейтринного излучения, и в меньшей степени – газовой динамике в целом. Долгое время считалось, что нейтрино, образующиеся при электронном захвате и излучаемые центральным ядром звезды, должны передавать радиальную компоненту своего импульса внешним слоям звезды и тем самым вызывать взрыв сверхновой. Однако от такого механизма взрыва пришлось отказаться, когда в слабом взаимодействии были открыты (и теоретически и экспериментально) нейтральные токи, которые способствуют удержанию нейтрино внутри ядра звезды [5].

Ниже изложенный подход исходит из того, что разлет первоначально неоднородной звезды осуществляется ударной волной, которая возникает при взрыве ядра звезды, например в результате гравитационного коллапса центральных областей звезды до плотности, превышающей ядерную плотность. Будем предполагать, что звезда сферически-симметрична или, другими словами, пренебрежем влиянием вращения. Насколько это оправдано для всех или большинства звезд, не известно. Однако сферическая симметрия является простейшим предположением, и оно, по-видимому, дает удовлетворительное объяснение возникновению выходящей из звезды ударной волны. Полученные в этом приближении результаты могут также служить отправной точкой для учета последующих поправок на вращение. В рамках этого подхода, рассмотрена неавтомодельная задача о распространении детонационной взрывной волны в однородном гравитирующем шаре с последующим разлетом в пустоту [6].

В настоящей работе рассматривается неавтомодельная задача о центральном взрыве неоднородного газового шара, находящегося в равновесии в собственном гравитационном поле. Для решения задачи применяется асимптотический метод тонкого ударного слоя.

1. Будем использовать уравнения адиабатического сферически-симметричного движения гравитирующего совершенного газа в лагранжевой форме

$$\ddot{r}+4\pi r^2 p' + \frac{km}{r^2} = 0, \quad p=(\gamma-1)f(m)\rho^\gamma \tag{1.1}$$

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2 r'}, \quad \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad r' = \frac{\partial r}{\partial m}$$

Здесь m – масса шара радиуса $r(m, t)$, k – гравитационная постоянная, γ – показатель адиабаты, $f(m)$ – функция, связанная с распределением энтропии по лагранжевой координате m.

Интегральное уравнение энергии для слоя газа, заключенного между поверхностями $m=0$ и $m=M(t)$, имеет вид

$$T+U+V=E+\int\limits_0^t \left[\dot{M}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}+\frac{p}{(\gamma-1)\rho}-\frac{M}{R}\right)-4\pi R^2\dot{r}p\right]_- d\tau \tag{1.2}$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^M \dot r^2\,dm,\quad U=\frac{1}{\gamma-1}\int_0^M \frac{p\,dm}{\rho},\quad V=-k\int_0^M \frac{m\,dm}{r}$$

здесь T, U, V — соответственно кинетическая, внутренняя и потенциальная (гравитационная) энергия газа, E — энергия взрыва, происходящего при $t=0$; $m=M(t)$ — закон движения ударной волны по массе, $R=r(M, t)$. Знаком минус обозначено состояние газа перед ударной волной.

Условия на разрыве, разрешенные относительно параметров газа за ударной волной, отмеченные знаком плюс, имеют вид

$$\rho_+=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_-\left[1+\frac{2a_-^2}{(\gamma-1)(\dot R-\dot r_-)^2}\right]^{-1} \tag{1.3}$$

$$a_-^2=\frac{\gamma p_-}{\rho_-},\qquad p_+=\frac{2}{\gamma+1}\rho_-(\dot R-\dot r_-)^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}p_-$$

$$\dot r_+-\dot R=(\dot r_--\dot R)\,\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[1+\frac{2a_-^2}{(\gamma-1)(\dot R-\dot r_-)^2}\right]$$

При этом радиус ударной волны определяется функцией $r=R(t)$ и следует также учитывать непрерывность эйлеровых и лагранжевых переменных.

В качестве начальных данных (фон) рассмотрим точное решение задачи о равновесии неоднородного самогравитирующего газового шара (звезды), где гравитационная постоянная, плотность на поверхности шара и радиус шара приняты за основные единицы измерения

$$r=\left(\frac{m}{4\pi\alpha}\right)^{\alpha},\qquad p=\frac{2\pi\alpha}{1-\omega}\left(1-r^{2(1-\omega)}\right),\qquad \rho=\frac{1}{r^{\omega}},\qquad \alpha=\frac{1}{3-\omega} \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что на поверхности шара ($r=1$), давление равно нулю, т. е. сфера $r=1$ является границей между звездой и межзвездной средой, так как плотность межзвездного газа $\sim 10^{-24}$ г/см^3.

Условия конечности массы и начальной энергии тела дают ограничения

$$0\leqslant\omega<2{,}5,\qquad \omega\neq 1 \tag{1.5}$$

Введем малый параметр $\varepsilon=(\gamma-1)/(\gamma+1)$ [7], причем для релятивистского полностью вырожденного электронного газа $\varepsilon={}^1/_7$, а для нерелятивистского $\varepsilon={}^1/_4$.

Будем считать, что при $\varepsilon\to 0$ в основном приближении для закона движения среды реализуется асимптотика решения Л. И. Седова задачи о сильном точечном взрыве в газе с переменной плотностью [8].

Анализ интегрального уравнения энергии и условия существования сильной ударной волны до момента ее выхода на поверхность тела ((1.2)–(1.5)) приводит к условию $E=E_0/\varepsilon^2$, $E_0=O(1)$.

При этом время движения ударной волны до выхода на поверхность шара будет порядка $\varepsilon^{1/2}$, поэтому удобно произвести дополнительное растяжение времени $\tau=t/\varepsilon^{1/2}$.

2. Анализ уравнений движения и краевых условий показывает, что решение в окрестности за ударной волной можно искать в виде

$$r=R_0(\tau)+\varepsilon H(m,\tau)+\ldots,\qquad R(\tau)=R_0(\tau)+\varepsilon R_1(\tau)+\ldots \tag{2.1}$$

$$p=\frac{p_0(m,\tau)}{\varepsilon}+p_1(m,\tau)+\ldots,\qquad \rho=\frac{\rho_0(m,\tau)}{\varepsilon}+\rho_1(m,\tau)+\ldots$$

Однако вблизи центра симметрии разложение (2.1) оказывается нерегулярным [6, 9]. В этой области для регуляризации решения применим метод последовательных приближений, который состоит в следующем:

в нулевом приближении в выражении для плотности удержим члены порядка ε; далее из уравнения неразрывности с использованием граничного условия в центре $r(0, \tau)=0$ и вида нулевого приближения найдем следующее (первое) приближение для закона движения среды и ударной волны; из уравнений движения и адиабатичности определим соответственно p_1, ρ_1.

В нулевом приближении решение задачи имеет вид

$$p_0=R_0^{-\omega}R_0'^2+\frac{R_0''}{4\pi R_0^2}(M_0-m), \qquad M_0=4\pi\alpha R_0^{1/\alpha} \tag{2.2}$$

$$\rho_0=p_0^{1/\gamma}\left[1+\frac{a_-^2(m)}{R_0'^2(T_0)}\right]^{-1}[R_0'^2(T_0)]^{-1/\gamma}[R_0(T_0)]^{-\omega(\gamma-1)/\gamma}$$

$$R_0=\left[\frac{3(5-\omega)^2E_0\tau^2}{4\pi}\right]^{1/(5-\omega)}$$

$$a_-^2(m)=\frac{2\pi\alpha}{1-\omega}\left(\frac{m}{4\pi\alpha}\right)^{\omega\alpha}\left[1-\left(\frac{m}{4\pi\alpha}\right)^{2(1-\omega)\alpha}\right]$$

$$T_0(m)=\left[\frac{4\pi}{3(5-\omega)^2E_0}\right]^{1/2}\left(\frac{m}{4\pi\alpha}\right)^{(5-\omega)\alpha/2}$$

Здесь $T_0(m)$ — момент времени, в который ударная волна проходит через частицу с лагранжевой координатой m.

В следующем приближении определение плотности (см. (1.1)) в окрестности ударной волны дает

$$\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{4\pi R^3}{3}-\int_m^M\frac{\varepsilon\,dm}{\rho_0(m,\tau)} \tag{2.3}$$

Для определения закона движения ударной волны в первом приближении потребуем выполнение граничного условия в центре: $r=0$ при $m=0$ [6. 9]. По существу это условие эквивалентно удовлетворению интегрального уравнения энергии (1.2) в первом приближении, которое, однако, требует дополнительного вычисления распределения давления [7].

Подробные вычисления в соотношении (2.3) приводят к следующим формулам для закона движения газа и ударной волны:

$$\begin{gathered}
r=R_0\xi^{2\varepsilon\alpha}\left(1-\frac{2\varepsilon}{3}\ln 2(1+\xi)^{3\alpha}\right)+\frac{R_0\pi\varepsilon\alpha}{3E_0(1-\omega)}\left(\left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{\omega\alpha}M_0^{3\alpha}G(\xi,\omega)-\right.\\
\left.-\left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{1-\alpha}M_0^{2-\alpha}F(\xi,\omega)\right)+O(\varepsilon^2)\\
R=\left(\frac{M}{4\pi\alpha}\right)^{\alpha}=R_0\left\{1+\frac{\varepsilon}{3}\left[-2(6-\omega)\alpha\ln 2+\right.\right.\\
\left.\left.+\frac{\pi\alpha}{E_0(1-\omega)}\left(\left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{\omega\alpha}M_0^{3\alpha}G(1,\omega)-\left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{1-\alpha}M_0^{2-\alpha}F(1,\omega)\right)\right]\right\}+O(\varepsilon^2)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\xi=\frac{m}{M_0}, \qquad G(\xi,\omega)=\int_0^\xi\frac{y^{\omega\alpha}\,dy}{1+y}, \qquad F(\xi,\omega)=\int_0^\xi\frac{y^{1-\alpha}\,dy}{1+y}$$

Следует отметить, что при рациональных ω интегралы G, F выражаются в элементарных функциях (интегралы от дифференциальных биномов).

Используя найденный закон движения газа за ударной волной (2.4), из уравнений движения и адиабатичности (1.1) вычислим величину p_1 и

ρ_1, что полностью заканчивает построение первого приближения

$$p_1 = R_0^{-\omega} R_0'^2 \left(\frac{2R_1'}{R_0'} - \frac{\omega R_1}{R_0} - 1 \right) + \frac{R_0'' R_0^{1-\omega}}{3} (-2(6-\omega)\alpha \ln 2 + \Lambda) + I \tag{2.5}$$

$$\Lambda \equiv \frac{\pi\alpha}{E_0(1-\omega)} (\beta^{\omega\alpha} M_0^{3\alpha} G(1,\omega) - \beta^{1-\alpha} M_0^{2-\alpha} F(1,\omega))$$

$$\beta \equiv \frac{1}{4\pi\alpha}, \quad I \equiv \frac{1}{4\pi R_0^2} \int_m^{M_0} \left(H'' - \frac{2HR_0''}{R_0} + \frac{m}{R_0^2} \right) dm$$

$$\rho_1 = \rho_0 \left[\frac{p_1}{p_0} + \frac{R_0'^2(T_0)}{R_0'^2(T_0) + a_-^2(m)} \left(1 - \frac{2R_1'(T_0) + 2R_0''(T_0) T_1(m)}{R_0'(T_0)} \right) \right]$$

$$H = \frac{R_0}{\varepsilon} (\xi^{2\varepsilon\alpha} - 1) - \frac{2}{3} R_0 \xi^{2\varepsilon\alpha} \ln 2 (1+\xi)^{3\alpha} +$$

$$+ \frac{R_0 \pi\alpha}{3E_0(1-\omega)} [\beta^{\omega\alpha} M_0^{3\alpha} G(\xi,\omega) - \beta^{1-\alpha} M_0^{2-\alpha} F(\xi,\omega)]$$

$$R_1 = \frac{R_0}{3} (-2(6-\omega)\alpha \ln 2 + \Lambda)$$

$$T_1(m) = \frac{5-\omega}{6} T_0(m) \Big[2(6-\omega)\alpha \ln 2 -$$

$$- \frac{\pi\alpha}{E_0(1-\omega)} (\beta^{\omega\alpha} m^{3\alpha} G(1,\omega) - \beta^{1-\alpha} m^{2-\alpha} F(1,\omega)) \Big]$$

Полученное решение (2.2), (2.4), (2.5) совпадает при отсутствии гравитации с точным решением задачи о сильном взрыве в газе с переменной плотностью (см. [8]) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ и имеет вид

$$r = R \left(\frac{2m}{m+M} \right)^{2\varepsilon\alpha} + O(\varepsilon^2)$$

Формулы (2.2), (2.4), (2.5) дают решение задачи при малых временах о взрыве с противодавлением в среде с переменной плотностью, если устремить к нулю гравитационную постоянную, сохранив величину начального давления в центре постоянной (1.4).

3. Выход ударной волны на поверхность тела происходит в момент времени t_*, который определяется из условия $R(t_*)=1$ и имеет вид ((2.1), (2.2), (2.4))

$$t_* = \frac{\varepsilon^{1/2}}{5-\omega} \left(\frac{4\pi}{3E_0} \right)^{1/2} \tag{3.1}$$

Это приводит к распаду произвольного разрыва с последующим расширением газа в пустоту. Дальнейшая детальная картина поведения волн разрежения в неоднородной среде сложна для точного аналитического расчета. Покажем, что используемый выше метод малого параметра применим и для описания процесса адиабатического разлета основной массы газа в пустоту.

Заметим, что время движения волны разрежения от внешней границы тела к центру и обратно порядка ε, т. е. мало по сравнению с характерным временем движения газа порядка $\varepsilon^{1/2}$ (3.1). Поэтому построенное ниже приближенное решение сразу описывает состояние газа при разлете в пустоту за отраженной от центра волной разрежения в области, содержащей почти всю массу газа, исключая окрестность границы тела с массой порядка $\exp[-B/\varepsilon^{1/2}]$, $B=O(1)$.

Уравнения движения газа имеют вид (1.1) с функцией $f(m)$, определяемой из решения до выхода ударной волны на поверхность шара (адиабатический разлет)

$$f(m)=6\varepsilon\alpha E\beta^{2\varepsilon\omega\alpha}m^{-1+2\varepsilon\omega\alpha}\left[1+\frac{\pi m(\beta m)^{\omega\alpha}}{6E_0(1-\omega)}-\frac{\pi m(\beta m)^{1-\alpha}}{6E_0(1-\omega)}\right]$$

В нулевом приближении из уравнения движения и граничного условия $p(M_*, t)=0$ получим

$$r=R(t),\qquad p=\frac{\ddot{R}}{4\pi R^2}(M_*-m)+\frac{1}{8\pi R^4}(M_*^2-m^2) \tag{3.3}$$

где $M_*=4\pi\alpha$ — масса тела.

Функция $R(t)$ определяется из интегрального уравнения энергии (1.2), причем в качестве начальных данных при $t=t_*$, естественно, используется решение (2.2)

$$\int_1^{R(t)}\Phi^{-1/2}\,dy=t-t_* \tag{3.4}$$

$$\Phi\equiv\frac{2E_*}{M_*}+\frac{M_*}{y}+\frac{2E_*}{M_*}\left(\frac{6\varepsilon\alpha E}{E_*}-1-\frac{M_*^2}{2E_*}\right)y^{-6\varepsilon}$$

$$E_*=E+\frac{8\pi^2\alpha}{(\gamma-1)(1-\omega)}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5-2\omega}\right)-\frac{16\pi^2}{3(5-2\omega)}$$

Из (1.2), (3.3), (3.4) следует, что для кинетической, внутренней и потенциальной энергий разлетающегося в пустоту газового шара верны соотношения

$$\frac{T}{E_*}=1-\left(1-\frac{6\varepsilon\alpha E}{E_*}\right)\frac{1}{R^{6\varepsilon}}+\frac{M_*^2}{2E_*}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R^{6\varepsilon}}\right) \tag{3.5}$$

$$\frac{U}{E_*}=\left(1-\frac{6\varepsilon\alpha E}{E_*}+\frac{M_*^2}{2E_*}\right)\frac{1}{R^{6\varepsilon}},\qquad \frac{V}{E_*}=-\frac{M_*^2}{2E_*R}$$

Анализ (3.5) показывает, что на начальной стадии разлета $R\geqslant 1$ (расстояниях порядка радиуса звезды) существенна только внутренняя энергия тела. Но уже на расстояниях $R_{cr}\simeq 2^{1/(6\varepsilon)}$ кинетическая и внутренняя энергии газового шара становятся сравнимыми, а при $R\geqslant R_{**}\simeq\varepsilon^{-1/(6\varepsilon)}$ основной вклад в уравнение энергии дает кинетическая энергия. Потенциальная энергия на всей стадии разлета меньше или порядка ε^2 по отношению к энергии взрыва.

Из (1.1) и (3.2) имеем

$$\frac{4\pi(r^3)'}{3}=\frac{1}{\rho}=\left[\frac{12E_0\alpha}{p}\beta^{2\varepsilon\omega\alpha}m^{-1+2\varepsilon\omega\alpha}\left(1+\frac{\pi m(\beta m)^{\omega\alpha}}{6E_0(1-\omega)}-\frac{\pi m(\beta m)^{1-\alpha}}{6E_0(1-\omega)}\right)\right]^{1-2\varepsilon}$$

Интегрируя (3.6), с учетом граничного условия в центре $r=0$ при $m=0$, а также соотношений (3.3) получим

$$r=(3\alpha)^{1/3}R(t)\left[\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{m}{M_*}\right)^{6\varepsilon\alpha}+1-\left(1-\frac{m}{M_*}\right)^{2\varepsilon}\right]^{1/3} \tag{3.7}$$

при этом закон движения границы расширяющегося газа определяется функцией $R_*(t)=R(t)\,[\alpha(6-\omega)]^{1/3}$.

Подставляя найденное решение для закона движения среды (3.4), (3.7) в систему (1.1), при использовании (3.2) можно определить распределения плотности и давления в следующем приближении.

Анализ полученного закона движения среды показывает, что в тонком слое с центром в $r\simeq R(t)$ и с относительной толщиной порядка $-\varepsilon\ln\varepsilon$ будет сосредоточена почти вся масса разлетающегося газа. Из (3.4) при

$R \geqslant R_{**}$ следует

$$R(t)=\left(\frac{2E}{M_*}\right)^{1/2} t\left(1-\frac{1}{2}t^{-6\varepsilon}+o(t^{-6\varepsilon})\right)$$

$$t \geqslant t_{**}=\left(\frac{2\pi\alpha}{E_0}\right)^{1/2}\varepsilon^{1-1/(6\varepsilon)}$$

В работе [7] метод тонкого ударного слоя использовался для однородного начального распределения плотности. При быстром падении начальной плотности с расстоянием тонкий ударный слой может ускоряться (при сильном падении – вплоть до релятивистских скоростей [10]), что, вообще говоря, может привести к его разрушению.

Полученное выше решение при распределении начальной плотности вида (1.4), показывает, что тонкий ударный слой не разрушается вплоть до выхода ударной волны на поверхность тела. Далее, при разлете газового шара в пустоту основная масса газа сосредоточена тоже в тонком слое, несколько смещенном от границы тела.

Таким образом, анализ полученных решений показал, что при достаточно большой энергии взрыва первоначально неоднородный самогравитирующий газовый шар (звезда) после выхода ударной волны на его поверхность будет разлетаться в пустоту (межзвездную среду) полностью, без центрального гравитационного остатка. При этом граница тела движется со скоростью в $[\alpha(6-\omega)]^{1/3}$ раз большей скорости движения основной массы газа. При достаточно больших временах $t \geqslant t_{**}$ будет иметь место разлет газа в пустоту с постоянной скоростью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Colgate S. A., White R. H.* The hydrodynamic behaviour of supernovae explosions // Astrophys. J. 1966. V. 143. № 3. P. 626–681.
2. *Иванова Л. Н., Имшенник В. С., Чечеткин В. М.* Термоядерный взрыв вырожденного углеродного ядра звезды. Препринт № 154. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1975.
3. *Nadyozhin D. K.* The collapse of iron-oxygen stars: physical and mathematical formulation of the problem and computational method // Astrophys. and Space Sci. 1977. V. 49. № 2. P. 399–425.
4. *Domogatsky G. V., Eramzhyan R. A., Nadyozhin D. K.* Production of the ligth elements due to neutrinos emitted by collapsing stellar cores // Astrophys. and Space Sci. 1978. V. 58. № 2. P. 273–299.
5. *Бете Г. А.* Теория сверхновых // Ядерная астрофизика. М.: Мир, 1986. С. 418–445.
6. *Голубятников А. Н., Чилачава Т. И.* О распространении детонационной взрывной волны в гравитирующем шаре с последующим разлетом в пустоту // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 187–191.
7. *Черный Г. Г.* Задача о точечном взрыве // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 2. С. 213–216.
8. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
9. *Голубятников А. Н., Чилачава Т. И.* О центральном взрыве вращающегося гравитирующего тела // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 825–829.
10. *Голубятников А. Н.* О выделении энергии-импульса при разгоне ударной волны до скорости света // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Нац. ком-т СССР по теорет. и прикл. механики, 1986. С. 205.

Сухуми

Поступила в редакцию
3.VI.1987