

УДК 532.62:532.135

О ЗАКРУЧЕННЫХ ПЛЕНКАХ НЬЮТОНОВСКИХ И УПРУГОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

КЕСТЕНБОЙМ Х. С., ШАРЧЕВИЧ Л. И., ЯРИН А. Л.

Свободные закрученные пленки жидкости широко используются для диспергирования топлива в форсунках [1]. Они также находят применение в современной энергетической технологии [2]. Как правило, приходится иметь дело с пленками в форме цилиндрической или конической поверхности. Для таких пленок можно выделить два основных механизма, нарушающих совершенство формы. Первый из них связан с неустойчивостью и ростом изгибных возмущений пленки вследствие динамического действия газа, в котором она движется или который движется внутри нее. Этот механизм связан как с поступательным движением пленки относительно окружающего газа, так и с ее закруткой и неоднократно исследовался [4-7]. В работе [3] особое внимание уделяется исследованию развития неосесимметричных возмущений, обусловленного закруткой пленки. Второй механизм искажения совершенной формы пленки обусловлен исключительно закруткой жидкости вокруг оси пленки. Вследствие конкуренции центробежной и поверхностной сил пленка приобретает волнообразную форму даже в случае, когда течение в ней устойчиво (скажем, если пленка распространяется в вакууме или в спутном потоке газа, движущемся практически с той же скоростью, что и пленка).

Из работ, посвященных закрученным пленкам, отметим также [8, 9], где задача об осесимметричном течении закрученной кольцевой струи вязкой жидкости решается в приближении пограничного слоя и исследуется влияние закрутки, а также трения о воздух на стационарную конфигурацию пленки и эволюцию начального профиля скорости в ней.

Численному и экспериментальному исследованию устойчивых волнообразных форм свободных пленок идеальных жидкостей посвящена работа [2], в которой, однако, пренебрегается влиянием сил поверхностного натяжения на продольное движение жидкости в пленке. В настоящей работе это допущение снято и с помощью асимптотического анализа и численных расчетов изучены стационарные волнообразные конфигурации свободных пленок, а также влияние на них вязкости и упругости жидкости.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать свободную закрученную пленку жидкости, вытекающую из кольцевого насадка (фиг. 1), полагая, что разрушение пленки происходит достаточно далеко вниз по течению. Движение естественно описывать на основе квазидвумерных уравнений динамики тонких пленок [10, 11] для осредненных по толщине пленки величин, имеющих в рассматриваемом случае осесимметричного стационарного течения вид

$$hRV_\tau = h_0 R_0 V_{\tau 0}$$

$$\rho \left(hRV_\tau \frac{dV_\tau}{ds} - V_0^2 h \sin \psi \right) = \frac{d\sigma_{\tau\tau} R h}{ds} - h\sigma_{\theta\theta} \sin \psi + g\rho R h \cos \psi \quad (1.1)$$

$$\rho (hRV_\tau^2 k - V_0^2 h \cos \psi) = \sigma_{\tau\tau} h R k - h\sigma_{\theta\theta} \cos \psi + 2\alpha_1 (Rk - \cos \psi) - g\rho R h \sin \psi$$

$$\rho \left(hRV_\tau \frac{dV_0}{ds} + V_0 V_\tau h \sin \psi \right) = \frac{d\sigma_{\tau\theta} R h}{ds} + \sigma_{\tau\theta} h \sin \psi$$

Первым в (1.1) приведено уравнение неразрывности; остальные уравнения (1.1) представляют собой проекции уравнения количества движения на направления касательной τ и нормали θ к срединной поверхности

пленки, а также на направление изменения угловой (азимутальной) координаты θ на срединной поверхности.

В (1.1) введены обозначения: R — радиус срединной поверхности пленки; h — толщина пленки; V_τ и V_θ — продольная и вращательная компоненты вектора скорости жидкости; индексом ноль отмечены значения величин на срезе насадка; ρ — плотность жидкости; s — координата, отсчитываемая вдоль образующей срединной поверхности пленки; ψ — угол между касательной τ и осью симметрии пленки x ; α_1 — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; $k = d\psi/ds$ — кривизна образующей срединной поверхности пленки; g — ускорение силы тяжести g , которая направлена вдоль оси симметрии пленки x ; $\sigma_{\tau\tau}$, $\sigma_{\tau\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ — компоненты тензора напряжений в присоединенной к срединной поверхности пленки системе координат, определяемые для ньютоновской жидкости (с учетом условия отсутствия напряжений на поверхностях пленки) соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_{\tau\tau} &= 2\mu \left(2 \frac{dV_\tau}{ds} + \frac{V_\tau \sin \psi}{R} \right), \\ \sigma_{\tau\theta} &= \mu \left(\frac{dV_\theta}{ds} - \frac{V_\theta \sin \psi}{R} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{dV_\tau}{ds} + \frac{2V_\tau \sin \psi}{R} \right)\end{aligned}\quad (1.2)$$

где μ — вязкость жидкости.

В случае упруговязкой жидкости используем реологическое определяющее соотношение Максвелла с верхней конвективной производной [12], пригодное для описания течений концентрированных полимерных систем при растяжении. В результате с учетом условия отсутствия напряжений на поверхности пленки имеем вместо (1.2) следующие соотношения для упруговязкой жидкости:

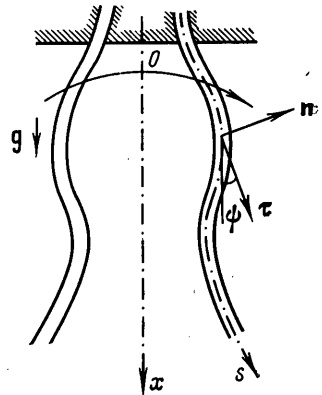
$$\begin{aligned}V_\tau \frac{d\tau_{nn}}{ds} &= \left(2\tau_{nn} + \frac{2\mu}{\lambda} \right) \left(-\frac{dV_\tau}{ds} - \frac{V_\tau \sin \psi}{R} \right) - \frac{\tau_{nn}}{\lambda} \\ V_\tau \frac{d\tau_{\tau\tau}}{ds} &= \left(2\tau_{\tau\tau} + \frac{2\mu}{\lambda} \right) \frac{dV_\tau}{ds} - \frac{\tau_{\tau\tau}}{\lambda} \\ V_\tau \frac{d\tau_{\theta\theta}}{ds} &= \left(2\tau_{\theta\theta} + \frac{2\mu}{\lambda} \right) \frac{V_\tau \sin \psi}{R} + 2\tau_{\tau\theta} \left(\frac{dV_\theta}{ds} - \frac{V_\theta \sin \psi}{R} \right) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{\lambda} \\ V_\tau \frac{d\tau_{\tau\theta}}{ds} &= \tau_{\tau\theta} \left(\frac{dV_\tau}{ds} + \frac{V_\tau \sin \psi}{R} \right) + \left(\tau_{\tau\tau} + \frac{\mu}{\lambda} \right) \left(\frac{dV_\theta}{ds} - \frac{V_\theta \sin \psi}{R} \right) - \frac{\tau_{\tau\theta}}{\lambda}\end{aligned}\quad (1.3)$$

$$\sigma_{\tau\tau} = \tau_{\tau\tau} - \tau_{nn}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta} - \tau_{nn}, \quad \sigma_{\tau\theta} = \tau_{\tau\theta}$$

Здесь τ_{nn} , $\tau_{\tau\tau}$, $\tau_{\theta\theta}$ и $\tau_{\tau\theta}$ — компоненты дивергента тензора напряжений (τ_{nn} действует на площадке срединной поверхности пленки по нормали к ней); время релаксации обозначено λ .

Обратимся к уравнениям движения в пленке вязкой жидкости. Выбрав в качестве масштабов для R и s величину R_0 , для V_τ и V_θ — $V_{\tau 0}$, для h — h_0 , для напряжений — $\mu V_{\tau 0}/R_0$, получаем с использованием (1.1) и (1.2) следующую замкнутую систему безразмерных уравнений:

$$\frac{dV_\tau}{ds} = \frac{V_\theta^2}{V_\tau R} \sin \psi + \varepsilon \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\sigma_{\tau\tau}}{V_\tau} \right) - \frac{\sigma_{\theta\theta} \sin \psi}{V_\tau R} \right] + \frac{1}{Fr} \frac{\cos \psi}{V_\tau}$$



Фиг. 1

$$\frac{d\psi}{ds} = (V_\tau - WR - \varepsilon \sigma_{\tau\tau} / V_\tau)^{-1} \left[\cos \psi \left(\frac{V_\theta^2}{RV_\tau} - W - \varepsilon \frac{\sigma_{\theta\theta}}{V_\tau R} \right) - \frac{1}{Fr} \frac{1}{V_\tau} \sin \psi \right] \quad (1.4)$$

$$\frac{dV_\theta}{ds} + \frac{V_\theta}{R} \sin \psi = \varepsilon \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\sigma_{\tau\theta}}{V_\tau} \right) + \frac{\sigma_{\tau\theta}}{RV_\tau} \sin \psi \right]$$

$$\frac{dR}{ds} = \sin \psi, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \psi$$

$$\sigma_{\tau\tau} = 2 \left(2 \frac{dV_\tau}{ds} + \frac{V_\tau \sin \psi}{R} \right), \quad \sigma_{\tau\theta} = \frac{dV_\theta}{ds} - \frac{V_\theta \sin \psi}{R}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2 \left(\frac{dV_\tau}{ds} + \frac{2V_\tau \sin \psi}{R} \right) \quad (1.5)$$

Последние два равенства в (1.4) выражают очевидные геометрические соотношения. В (1.4) введены следующие критерии подобия (обратные числа Вебера и Рейнольдса, число Фруда):

$$W = \frac{2\alpha_1}{\rho h_0 V_{\tau 0}^2}, \quad \varepsilon = \frac{\mu}{\rho R_0 V_{\tau 0}}, \quad Fr = \frac{V_{\tau 0}^2}{g R_0}$$

Система уравнений (1.4), (1.5) требует постановки краевых условий на ближнем и дальнем концах пленки. На срезе насадка имеем

$$s=0, \quad x=0, \quad R=1, \quad V_\tau=1, \quad V_\theta=V_*, \quad \psi=\psi_* \quad (1.6)$$

Влияние граничных условий на дальнем конце кольцевой струи при $x=L$, как это указывалось в [13], существенно проявляется лишь в узком пограничном слое и при достаточно малых ε не распространяется вверх по течению (см. также разд. 2). В связи с этим здесь ищется внешнее решение системы уравнений (1.4) и (1.5), удовлетворяющее условиям (1.6).

В случае упруговязкой жидкости, приводя уравнения (1.3) к безразмерному виду, получаем

$$V_\tau \frac{d\tau_{nn}}{ds} = -2 \left(\tau_{nn} + \frac{1}{\Lambda} \right) \left(\frac{dV_\tau}{ds} + \frac{V_\tau \sin \psi}{R} \right) - \frac{\tau_{nn}}{\Lambda}$$

$$V_\tau \frac{d\tau_{\tau\tau}}{ds} = 2 \left(\tau_{\tau\tau} + \frac{1}{\Lambda} \right) \frac{dV_\tau}{ds} - \frac{\tau_{\tau\tau}}{\Lambda}$$

$$V_\tau \frac{d\tau_{\theta\theta}}{ds} = 2 \left(\tau_{\theta\theta} + \frac{1}{\Lambda} \right) \frac{V_\tau \sin \psi}{R} + 2\tau_{\tau\theta} \left(\frac{dV_\theta}{ds} - \frac{V_\theta \sin \psi}{R} \right) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{\Lambda} \quad (1.7)$$

$$V_\tau \frac{d\tau_{\tau\theta}}{ds} = \tau_{\tau\theta} \left(\frac{dV_\tau}{ds} + \frac{V_\tau \sin \psi}{R} \right) + \left(\tau_{\tau\tau} + \frac{1}{\Lambda} \right) \left(\frac{dV_\theta}{ds} - \frac{V_\theta \sin \psi}{R} \right) - \frac{\tau_{\tau\theta}}{\Lambda}$$

$$\sigma_{\tau\tau} = \tau_{\tau\tau} - \tau_{nn}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta} - \tau_{nn}, \quad \sigma_{\tau\theta} = \tau_{\tau\theta}, \quad \Lambda = \lambda V_{\tau 0} / R_0$$

Для исследования течения в пленках упруговязких жидкостей вместо выражений для напряжений (1.5) используются реологические соотношения (1.7). При этом возникает эволюционная задача с начальными условиями (1.6), к которым добавляются условия на компоненты девиатора тензора напряжений:

$$s=0, \quad \tau_{nn} = \tau_{\tau\tau} = \tau_{\theta\theta} = \tau_{\tau\theta} = 0 \quad (1.8)$$

В закрученных пленках идеальной, а также вязкой жидкостей зависимости R , V_τ , V_θ и ψ от x являются, вообще говоря, периодически колеблющимися функциями. Причиной этого является конкуренция между центробежной силой, стремящейся расширить закрученную пленку, и силами

поверхностного натяжения, стремящимися сузить ее. Периодические колебания в зависимости $R=R(x)$ наблюдались для устойчивых пленок воды в экспериментах [2].

В закрученных пленках упруговязких жидкостей роль силы, стремящейся сузить пленку, играет сила энтропийной упругости жидкости. Поэтому даже в тех случаях, когда вклад поверхностного натяжения жидкости мал, можно ожидать периодических колебаний в зависимости $R=R(x)$ вследствие конкуренции центробежной и упругой сил.

Влияние вязких напряжений, естественно, всегда ведет к постепенному затуханию колебаний.

2. Асимптотический анализ. Рассмотрим пленки ньютоновских жидкостей, пренебрегая влиянием силы веса ($Fr=\infty$). Как следует из (1.4) и (1.6), при определенном значении скорости закрутки на срезе насадка $V_* = W^{1/2}$ и $\psi_* = 0$ для идеальной жидкости ($\varepsilon=0$) колебания отсутствуют, а $R=1$; следовательно, срединная поверхность пленки имеет цилиндрическую форму.

Если начальная скорость закрутки и угол истечения пленки таковы, что

$$V_* = W^{1/2} + \beta_*, \quad \beta_* \ll W^{1/2}, \quad \psi_* \ll 1 \quad (2.1)$$

то должны иметь место малые колебания основных параметров пленки вдоль оси x , причем наличие вязкости не может качественно изменить эту картину. Поэтому, предполагая неравенства (2.1) выполненными, представим искомые величины в виде

$$V_r = 1 + \alpha(s), \quad V_\theta = W^{1/2} + \beta(s), \quad R = 1 + \gamma(s) \quad (2.2)$$

где α и γ малы в сравнении с единицей, а β — в сравнении с $W^{1/2}$.

Представление (2.2) для R не вызывает сомнения при $\psi_* = 0$; в случае $0 < \psi_* \ll 1$ также можно ожидать периодически колеблющегося вблизи $R=1$ решения, которое далее будет построено.

В линейном приближении $s \approx x$ и

$$\psi \approx \sin \psi \approx \text{tg } \psi = \frac{dR}{dx} = \frac{d\gamma}{dx} \ll 1 \quad (2.3)$$

Подставляя равенства (2.2) и (2.3) в (1.4) и (1.5), после линеаризации по α , β и γ (для любого ε) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} &= W \frac{d\gamma}{dx} + \varepsilon \left(4 \frac{d^2\alpha}{dx^2} + 2 \frac{d^2\gamma}{dx^2} \right) \\ \frac{d^2\gamma}{dx^2} &= (1-W)^{-1} \left[W \left(2 \frac{\beta}{W^{1/2}} - \gamma - \alpha \right) - \varepsilon \left(2 \frac{d\alpha}{dx} + 4 \frac{d\gamma}{dx} \right) \right] \\ \frac{d\beta}{dx} &= -W^{1/2} \frac{d\gamma}{dx} + \varepsilon \left(\frac{d^2\beta}{dx^2} - W^{1/2} \frac{d^2\gamma}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

С учетом (1.6), (2.3) и равенства (2.1) находим, что решения системы (2.4) должны удовлетворять условиям

$$x=0, \quad \alpha=\gamma=0, \quad \beta=\beta_*, \quad \frac{d\gamma}{dx} = \psi_* \quad (2.5)$$

Интегрируя первое и третье уравнения (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= W\gamma + C_1 + \varepsilon \left(4 \frac{d\alpha}{dx} + 2 \frac{d\gamma}{dx} \right) \\ \beta &= D_1 - W^{1/2}\gamma + \varepsilon \left(\frac{d\beta}{dx} - W^{1/2} \frac{d\gamma}{dx} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь C_1 и D_1 — неопределенные постоянные.

Подставляя (2.6) во второе уравнение (2.4), приходим, пренебрегая величинами $O(\varepsilon^2)$, к уравнению

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \gamma \frac{W(3+W)}{1-W} = \frac{2W^{1/2}D_1 - WC_1}{1-W} - \frac{4\varepsilon(W+1)^2}{1-W} \frac{d\gamma}{dx} \quad (2.7)$$

Это уравнение решим в случае достаточно малой вязкости ($\varepsilon \ll 1$) с помощью асимптотического метода многих масштабов [14]. Отметим, что при типичных значениях параметров $\rho = 10^3$ кг/м³, $R_0 = 10^{-2}$ м, $V_{\infty} = 1$ м/с значение ε даже для глицерина с вязкостью 10^{-1} кг/(м·с) достаточно мало: $\varepsilon = 10^{-2}$. Поскольку существенное влияние малой вязкости может проявиться только на достаточно больших расстояниях вдоль пленки, введем «медленную» переменную $X = \varepsilon x = O(1)$, локально независимую от x . Представляя решение в виде асимптотического ряда $\gamma = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1$, получаем из (2.7), сохраняя члены, не меньшие чем порядка ε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\gamma_0 + \varepsilon\gamma_1) + 2\varepsilon \frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x \partial X} + \frac{W(3+W)}{1-W}(\gamma_0 + \varepsilon\gamma_1) = \\ = \frac{2W^{1/2}D_1 - WC_1}{1-W} + \frac{\varepsilon}{1-W} \left[-4(W+1)^2 \frac{\partial\gamma_0}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выделяя из (2.8) главные члены, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2} + \gamma_0 \frac{W(3+W)}{1-W} = \frac{2W^{1/2}D_1 - WC_1}{1-W}$$

решением которого будет

$$\begin{aligned} \gamma_0 = A(X) \exp(imx) + B(X) \exp(-imx) + \gamma_r, \quad m = \left[\frac{W(3+W)}{1-W} \right]^{1/2}, \\ \gamma_r = \frac{2W^{1/2}D_1 - WC_1}{W(3+W)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Предполагается, как это имеет место на практике, что $0 < W < 1$.

Чтобы определить неизвестные функции A и B , входящие в (2.9), рассмотрим члены следующего порядка из (2.8)

$$\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x^2} + m^2\gamma_1 = \frac{1}{1-W} \left[-4(W+1)^2 \frac{\partial\gamma_0}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x \partial X} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) в правую часть (2.10) и требуя отсутствия секулярных решений типа $\gamma_1 \sim x \exp(\pm imx)$, недопустимых в асимптотическом ряду, получаем, что

$$A = A_0 \exp(-PX), \quad B = B_0 \exp(-PX), \quad P = \frac{2(W+1)^2}{1-W} \quad (2.11)$$

где A_0 и B_0 — произвольные постоянные.

Обрывая асимптотический ряд, получаем с помощью (2.9) и (2.11)

$$\gamma = A_0 \exp(-PX + imx) + B_0 \exp(-PX - imx) + \gamma_r \quad (2.12)$$

В соответствии с условиями для γ в (2.5) из (2.12) получаем

$$A_0 = \frac{\psi^*}{2im} - \frac{1}{2} \gamma_r, \quad B_0 = -\frac{\psi^*}{2im} - \frac{1}{2} \gamma_r \quad (2.13)$$

Последние формулы с учетом (2.12) дают

$$\gamma = \gamma_r [1 - \exp(-PX) \cos mx] + \frac{\psi^*}{m} \exp(-PX) \sin mx \quad (2.14)$$

С помощью (2.14), опуская в (2.6) несущественные слагаемые порядка ε , получаем

$$\alpha = \gamma_r W [1 - \exp(-PX) \cos mx] + \frac{\psi_* W}{m} \exp(-PX) \sin mx + C_1 \quad (2.15)$$

$$\beta = D_1 - \gamma_r W^{1/2} [1 - \exp(-PX) \cos mx] - \frac{\psi_* W^{1/2}}{m} \exp(-PX) \sin mx$$

С использованием граничных условий (2.5) для α и β находим из (2.15)

$$C_1 = 0, \quad D_1 = \beta_*$$

С учетом этих равенств находим с помощью (2.2), (2.9), (2.11), (2.14) и (2.15)

$$\begin{aligned} R &= 1 + \frac{2\beta_*}{W^{1/2}(3+W)} [1 - \exp(-PX) \cos mx] + \frac{\psi_*}{m} \exp(-PX) \sin mx \\ V_\tau &= 1 + \frac{2\beta_* W^{1/2}}{3+W} [1 - \exp(-PX) \cos mx] + \frac{\psi_* W}{m} \exp(-PX) \sin mx \\ V_0 &= W^{1/2} + \frac{\beta_*(1+W)}{3+W} + \frac{2\beta_*}{3+W} \exp(-PX) \cos mx - \frac{\psi_* W^{1/2}}{m} \exp(-PX) \sin mx \\ \psi &= \frac{2\beta_*}{W^{1/2}(3+W)} m \exp(-PX) \sin mx + \psi_* \exp(-PX) \cos mx \\ X &= \varepsilon x, \quad m = \left[\frac{W(3+W)}{1-W} \right]^{1/2}, \quad P = \frac{2(W+1)^2}{1-W}, \quad W < 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Толщина пленки вычисляется с использованием уравнения неразрывности как $h = 1/(RV_\tau)$.

Отметим также, что общее решение системы (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma &= \exp(-PX) (F_1 \sin mx + F_2 \cos mx) + \gamma_r + O(\varepsilon) \\ \alpha &= C_2 \exp\left(-\frac{L-x}{4\varepsilon}\right) + W \exp(-PX) (F_1 \sin mx + F_2 \cos mx) + \gamma_r W + C_1 + O(\varepsilon) \\ \beta &= D_2 \exp\left(-\frac{L-x}{\varepsilon}\right) - W^{1/2} \exp(-PX) (F_1 \sin mx + F_2 \cos mx) - \\ &\quad - \gamma_r W^{1/2} + D_1 + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.17)$$

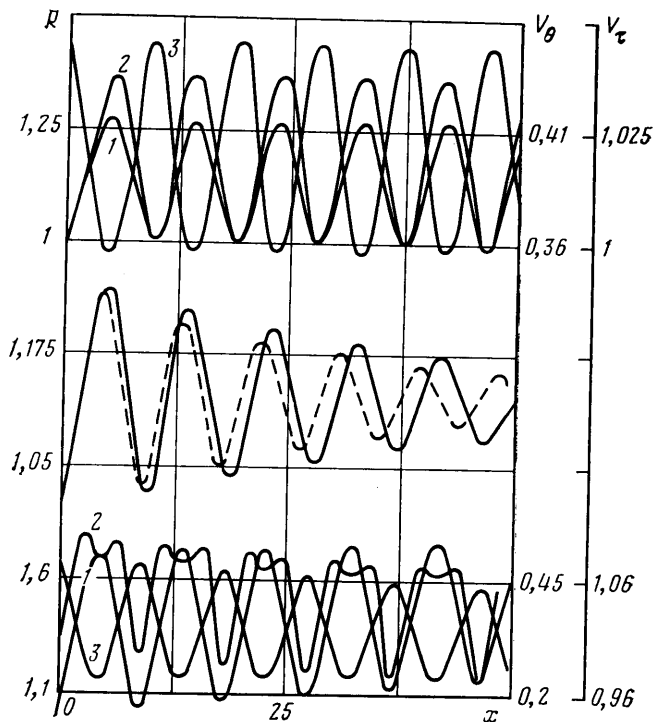
где появляются новые неопределенные постоянные F_1 , F_2 , C_2 и D_2 .

Легко видеть, что вблизи дальнего конца пленки $x=L$ имеется пограничный слой толщины $O(\varepsilon)$, в котором возмущения компонент скорости α и β подстраиваются к граничным условиям $x=L$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ (α' и β' — заданные значения). Вне этого пограничного слоя первые слагаемые в выражениях для α и β в (2.17), так же как и слагаемые порядка $O(\varepsilon)$, несущественны, и четыре постоянные F_1 , F_2 , D_1 и C_1 определяются граничными условиями (2.5); значения C_1 и D_1 совпадают с приведенными выше и, кроме того,

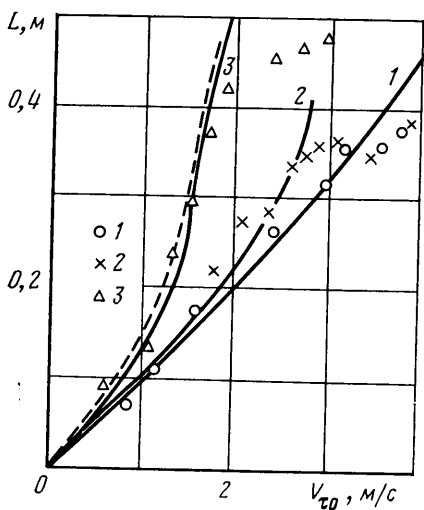
$$F_1 = \frac{\psi_*}{m}, \quad F_2 = -\frac{2\beta_*}{W^{1/2}(3+W)}$$

Соответственно из (2.17) получается асимптотическое решение (2.16), верное всюду вне узкого пограничного слоя толщины $O(\varepsilon)$ вблизи $x=L$. Граничные условия при $x=L$ определяют постоянные C_2 и D_2 .

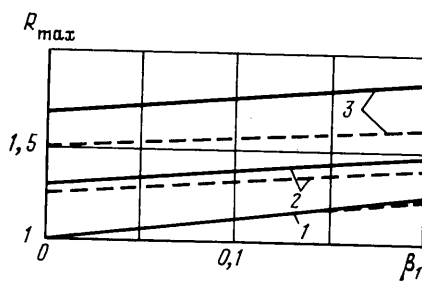
Построенное решение задачи (2.16) описывает основной эффект, обусловленный влиянием малой вязкости: на большом расстоянии вдоль



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

пленки малая вязкость дает вклад, сравнимый с амплитудой колебаний, которая вследствие этого уменьшается.

Отметим, что с помощью (2.16) легко убедиться, что в рассмотренном приближении кинетическая энергия жидкости $E = \rho(V_\tau^2 + V_\theta^2)/2$ (равно как и проекция момента количества движения на ось $x - \rho R V_\theta$) сохраняется и происходит лишь перекачка энергии из вращательного в продольное движение и наоборот, как это имеет место в отсутствие вязких напряжений.

Из (2.16) следует, что с ростом X колебания все более затухают и пленка имеет параметры, отличные от параметров на срезе насадка. Так,

при $\beta_* > 0$ пленка расширится, скорость продольного движения возрастет, а вращательного — уменьшится.

3. Результаты численного решения. Для исследования течения в закрученной кольцевой струе (пленке) идеальной или упруговязкой жидкостей в разд. 1 сформулированы задачи с начальными условиями (уравнения 1.4) при $\varepsilon=0$ с условиями (1.6) и уравнения (1.4), (1.7) с условиями (1.6), (1.8) соответственно.

После преобразования системы уравнений к виду, разрешенному относительно производных, указанные задачи Коши интегрируются численно с помощью метода Рунге — Кутты.

Для расчета закрученной пленки вязкой жидкости (уравнения (1.4), (1.5) с условиями (1.6)) используется метод последовательных приближений, изложенный в [13].

Результаты расчетов представлены на фиг. 2–4. В верхней части фиг. 2 показаны рассчитанные распределения радиуса R (кривая 1) и компонент скорости V_r (кривая 2) и V_θ (кривая 3) вдоль пленки идеальной жидкости ($\varepsilon=0$, $W=0,14$, $\text{Fr}=\infty$, $\psi_*=0$, $V_* = 1,2W^{1/2} = 0,44$). Срединная поверхность пленки периодически колеблется при стационарном течении. На фиг. 3 проведено сопоставление результатов расчетов для пленки воды с экспериментальными данными [2]: показана зависимость расстояния L вдоль оси пленки до первого минимума радиуса при различных значениях скоростей истечения и закрутки. Параметры жидкости и пленки имели следующие значения: $\rho=10^3$ кг/м³, $\alpha_1=7 \cdot 10^{-2}$ кг/с², $h_0=2 \cdot 10^{-3}$ м, $\mu=10^{-3}$ кг/(м·с), $R_0=1,6 \cdot 10^{-2}$ м, $\psi_*=0$; кривой 1 отвечает $V_*=0,524 \cdot 10^{-1}$, 2 — $0,875 \cdot 10^{-1}$, 3 — $0,1763$. Сплошными линиями показаны результаты расчета настоящей работы, штриховой линией 3 — результаты расчета [2], значками — экспериментальные данные [2]. Перегиб на сплошной кривой 3 соответствует $\sqrt{W(V_{\tau 0})} = V_*$.

Отметим, что если спроецировать уравнение количества движения в пленке на ось x , то в случае идеальной жидкости получим

$$\rho R h V_r \frac{d}{ds} (V_r \cos \psi) = 2\alpha_1 \frac{d}{ds} (R \cos \psi) + \rho g R h \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) в явном виде показывает, что силы поверхностного натяжения влияют на продольное движение жидкости в пленке. В [2] этим влиянием пренебрегалось, и первый член справа в уравнении (3.1) отсутствовал (см. (2.12) в [2]), чем можно объяснить некоторое расхождение сплошной и штриховой кривых 3 на фиг. 3.

При достаточно больших скоростях истечения начинается разрушение пленки вследствие роста возмущений, чем обусловлено систематическое отклонение результатов расчетов (в верхних частях кривых 1–3) от экспериментальных данных.

Полученные в предыдущем разделе аналитические результаты имеют достаточно высокую точность далеко за пределами формальных ограничений асимптотики $\beta_* \ll 1$, $\psi_* \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$. Об этом свидетельствует сравнение решения (2.16) с результатами численного интегрирования системы (1.4), (1.5) с условиями (1.6). На фиг. 4 сравниваются результаты аналитического (с помощью (2.16); штриховые линии) и численного (сплошные линии) расчета максимальных значений радиусов срединных поверхностей пленок идеальной жидкости ($\varepsilon=0$) в случае $W=0,14$, $\text{Fr}=\infty$ при различных значениях β_1 ($\beta_* = W^{1/2} \beta_1$) и ψ_* . Значение $W=0,14$ отвечает здесь пленке воды с $\rho=10^3$ кг/м³, $\alpha_1=7 \cdot 10^{-2}$ кг/с², $h_0=10^{-3}$ м, $V_{\tau 0}=1$ м/с. Кривые 1 соответствуют $\psi_*=0$, 2 — $\pi/18$, 3 — $\pi/9$. Даже в далеко выходящем за пределы линейного приближения (2.1) случае $\beta_1=0,2$, $\psi_*=\pi/9$ аналитическое решение (2.16) воспроизводит результаты численных расчетов с расхождением не более 11–12%. Линеаризованная асимптотическая теория обладает удовлетворительной точностью при сравнительно больших значениях β_* и ψ_* прежде всего потому, что вследствие действия сил поверхностного натяжения зависимость $R=R(x)$ даже на нелинейных режимах должна быть достаточно гладкой. Следовательно, она всегда с удовлетворительной точностью может быть приближена одной гармоникой.

В середине фиг. 2 представлены зависимости $R=R(x)$, рассчитанные с использованием первой формулы (2.16) (штриховая кривая) и с помощью численного интегрирования системы (1.4), (1.5) (сплошная кривая). Результаты соответствуют значениям параметров $W=0,14$, $\varepsilon=0,01$, $\text{Fr}=\infty$, $\beta_* = W^{1/2} \cdot 0,2 = 0,07$, $\psi_*=0$, отвечающим пленке глицерина с $\rho=10^3$ кг/м³, $V_{\tau 0}=1$ м/с, $\alpha_1=3 \cdot 10^{-2}$ кг/с², $h_0=0,43 \cdot 10^{-3}$ м, $\mu=10^{-1}$ кг/(м·с), причем значение β_* выходит далеко за пределы, определяемые неравенством (2.1), и составляет 20% величины $W^{1/2}$. Сопоставление асимптотики и численного расчета показывает, что даже на шестой волне колебаний асимптотическое решение (2.16) с большой точностью воспроизводит как амплитуду колебаний (с расхождением не более 1%), так и сам характер зависимости $R=R(x)$, несмотря на набирающийся постепенно из-за влияния нелинейных эффектов сдвиг по фазе.

Результаты численного интегрирования системы (1.4) и (1.7) с условиями (1.6) и (1.8), отвечающие концентрированной полимерной жидкости с параметрами $W=0$, $\varepsilon=10$, $\Lambda=10^2$, $V_*=0,5$, $\psi_*=0$, $\text{Fr}=\infty$, представлены на фиг. 2 в нижней ее части.

Наблюдаемые колебания в данном случае обусловлены исключительно конкуренцией инерционной и упругой сил, так как вклад поверхностного натяжения для подобных жидких пленок практически несуществен. Перекачка части кинетической энергии в упругую приводит в данном случае к появлению участков пленки, где одновременно уменьшаются обе компоненты скорости V_r и V_θ . Эта особенность проявляется при достаточно сильном расширении пленки в процессе колебаний, что связано с достаточно большими значениями скорости закрутки V_* и центробежной силы. С уменьшением V_* максимальное расширение пленки в процессе колебаний уменьшается, становятся меньше упругие напряжения и упругая энергия и указанная особенность в распределении $V_r = V_r(x)$ исчезает; оно становится все более подобно показанному в верхней части фиг. 2. Влияние вязкой диссипации, как обычно, ведет к затуханию колебаний.

Численные расчеты пленок с различной реологией подтверждают факт, замеченный при анализе в разд. 2: при $x \rightarrow \infty$ в пленке вырабатываются некоторые значения радиуса и скорости течения, отличающиеся от начальных.

Авторы признательны В. М. Ентову за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей // М.: Машиностроение. 1977. 207 с.
2. Баранов Г. А., Хугарев В. В. Исследование свободного кольцевого струйного течения жидкости. НИИ электрофиз. аппаратуры, Препринт № П-А-0471. М.: 1980. 57 с.
3. Епизин В. Е., Шкадов В. Я. О затягивании полости кольцевых струй, взаимодействующих с окружающей средой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 3–11.
4. Squire H. B. Investigation of the instability of a moving liquid film // Brit. J. Appl. Phys. 1953. V. 4. № 6. P. 167–169.
5. Martinon J. Instabilités d'une nappe liquide cylindrique en présence de deux écoulements gazeux // J. de Méch Théor. et Appl. 1983. V. 2. № 4. P. 629–641.
6. Biswas G., Som K., Gupta A. S. Instability of a moving cylindrical liquid sheet // J. Fluids Eng. 1985. V. 107. № 4. P. 451–454.
7. Kendall J. M. Experiments on annular liquid jet instability and on the formation of liquid shells // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 7. P. 2086–2094.
8. Епизин В. Е. О течении закрученных кольцевых струй капельной жидкости в окружающей среде // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1978. № 1. С. 74–83.
9. Епизин В. Е. О формах закрученных кольцевых струй капельной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 5. С. 144–148.
10. Ентов В. М. Динамика пленок вязких и упругих жидкостей: Препринт № 130. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1979. 47 с.
11. Entov V. M. On the dynamics of films of viscous and elastoviscous liquids // Arch. Mech. Stosow. 1982. V. 34. № 4. P. 395–407.
12. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
13. Ентов В. М., Кестенбойм Х. С., Рожков А. Н., Шарчевич Л. И. О динамической форме равновесия пленки вязкой и упруговязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 2. С. 9–18.
14. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.1.1987