

УДК 532.59.013

О ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ ДАЛЬНЕГО ПОЛЯ
ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СЛОЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ
ЖИДКОСТИ, ЛЕЖАЩЕМ НА ОДНОРОДНОМ СЛОЕ

БОРОВИКОВ В. А., БУЛАТОВ В. В., КЕЛЬБЕРТ М. Я.

Рассматривается поле внутренних волн, возбужденное неподвижным и движущимся источником в слое стратифицированной жидкости конечной глубины h , лежащем на однородном слое толщины H . Показано, что при $H \rightarrow \infty$ асимптотика поля движущегося источника выражается через интеграл Френеля. При конечных H асимптотика поля, выражающаяся через интеграл Френеля, является промежуточной — она справедлива на расстояниях $h \ll r \leq L$, асимптотика, выражающаяся через функцию Эйри, верна при $r \geq L$, где промежуточный масштаб $L = \text{const } H^3/h^2$. В случае неподвижного источника промежуточная асимптотика выражается через функцию параболического цилиндра, дальняя асимптотика выражается через квадрат функции Эйри. Численно исследуется переход между промежуточной и дальней асимптотикой.

Ввиду больших трудностей точного решения задачи обтекания в стратифицированной жидкости наиболее распространенным способом является моделирование тела системой источников и стоков [1]. В силу линейности задачи достаточно изучить поле, порожденное одним источником массы.

Случай источника, движущегося в безграничной жидкости с постоянным распределением частоты Брента — Вайсяля $N(z)$, рассмотрен в [2, 3]. Было показано, что поле установившихся волн зависит от переменных ξ, y, z , где $\xi = x + Vt$, V — скорость источника. Волновым фронтом в случае прямолинейного движения источника является плоскость $\xi = 0$. Можно показать, что асимптотика поля вблизи плоскости $\xi = 0$ выражается через интеграл Френеля.

Внутренние волны в конечном слое стратифицированной жидкости для различных распределений $N(z)$ рассматривались в [4, 4–10]. Для гармонической волны однозначно определяются дисперсионные кривые $\omega_n(k)$ и вертикальные собственные функции $\varphi_n(z, k)$. В [4] была доказана полнота и ортонормированность с весом $N^2(z)$ системы функций $\varphi_n(z, k)$. В [5, 6] исследовались дальние поля внутренних волн от неподвижного источника. В [7–10] исследовалось дальней поле внутренних волн, возбужденное движущимся источником. В этом случае волновое поле n -й моды заключено внутри n -го угла Маха. В [10] рассматривалось дальней поле внутренних волн, возбуждаемое источником, движущимся в тонком термоклине толщины d , заключенном между двумя однородными слоями толщин h_1 и h_2 , причем $h_2 \gg h_1 \gg d$.

Пусть W — вертикальная компонента скорости поля внутренних волн, возбужденного неподвижным точечным источником. На дне $z = -h - H$ и поверхности $z = 0$ используется приближение «твердой крышки»: $W = 0$. Решение для W имеет вид [5, 8]

$$W = \sum_n W_n$$

$$W_n = \frac{e^{\pi i/4}}{4\pi^{1/2}\sqrt{2r}} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} k^{-1/2} \exp[ikr - i\omega_n(k)t] g_n(k, z, z_0) dk \quad (1)$$

$$g_n(k, z, z_0) = \omega_n(k) k^{-1} \varphi_n(z, k) \varphi_n(z_0, k)$$

где z_0 — глубина погружения источника. Дисперсионные кривые $\omega_n(k)$ и собственные функции $\varphi_n(z, k)$ определяются из задачи в слое $-h \leq z \leq 0$,

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + k^2 \left[\frac{N^2(z)}{\omega_n^2(k)} - 1 \right] \varphi_n = 0 \quad (2)$$

$$\varphi_n = 0 \quad (z=0), \quad \partial \varphi_n / \partial z = k \varphi_n \operatorname{cth} kH \quad (z=-h) \quad (3)$$

Асимптотика интеграла (1) при $r, t \rightarrow \infty$ определяется поведением дисперсионных кривых $\omega_n(k)$ вблизи нуля. В области $k \ll H^{-1} \ll 1$ граничное условие при $z = -h$ можно приближенно записать в виде

$$\varphi_n - H \partial \varphi_n / \partial z = 0 \quad (4)$$

В этом случае обычный подсчет по теории возмущений дает для $\omega_n(k)$ разложение

$$\omega_n(k) = c_n k - \beta_n k^3 + \dots \quad (5)$$

$$\beta_n = c_n^3 \int_{-h}^0 \chi_n^2(z) dz \left[\int_{-h}^0 N^2(z) \chi_n^2(z) dz \right]^{-1}$$

где $c_n, \chi_n(z)$ — собственные числа и собственные функции задачи

$$\frac{d^2 \chi_n}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{c_n^2} \chi_n = 0$$

$$\chi_n = 0 \quad (z=0), \quad \chi_n - H d\chi_n/dz = 0 \quad (z=-h)$$

В области $k \sim H^{-1} \ll 1$ граничные условия при $z = -h$ можно записать в виде

$$\partial \varphi_n / \partial z - k \varphi_n = 0 \quad (6)$$

В этой области дисперсионная кривая $\omega_n(k)$ допускает разложение

$$\omega_n(k) = c_n^* k - \gamma_n k^3 + \dots \quad (7)$$

$$\gamma_n = c_n^{*3} \psi_n^2(-h) \tau \left[\int_{-h}^0 N^2(z) \psi_n^2(z) dz \right]^{-1}$$

где $\tau = \operatorname{cth} kH \sim 1$, а c_n^* и $\psi_n(z)$ — собственные числа и собственные функции задачи

$$\frac{d^2 \psi_n}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{c_n^{*2}} \psi_n = 0$$

$$\psi_n = 0 \quad (z=0), \quad d\psi_n/dz = 0 \quad (z=-h) \quad (8)$$

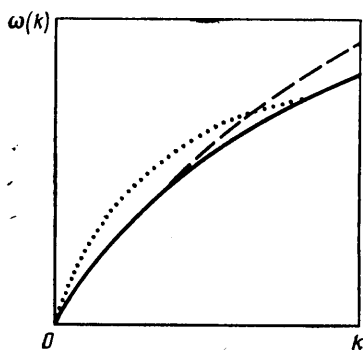
Характерный вид дисперсионных кривых, получаемых из задачи (2) при различных граничных условиях, приведен на фиг. 1. Сплошная, штриховая, пунктирная линии — дисперсионные кривые, полученные при граничных условиях (3), (4), (6) соответственно.

Конкретный вид асимптотики определяется разложением $\omega_n(k)$ вблизи нуля. Если дисперсионная кривая допускает разложение (5), т. е. $k \ll$

$\ll H^{-1} \ll 1$, то асимптотика поля выражается через функцию Эйри для движущегося источника или через квадрат функции Эйри для неподвижного источника. Условие $k \ll H^{-1}$ дает

$$k \sim (\beta_n t)^{-1/2} \ll H^{-1}, \quad r \gg \text{const } H^3/h^2 = L$$

В случае, когда дисперсионная кривая допускает разложение (7), т. е. $k \sim H^{-1} \ll 1$, асимптотика поля выражается через функцию параболического цилиндра для неподвижного источника и через интеграл Френеля для движущегося источника.



Фиг. 1

Действительно, вблизи фронта импульса $r = c_n t$, сохраняя линейный и кубичный члены разложения (5), находим асимптотику поля при $r \gg L$ [5, 8]

$$W_n \approx \frac{\chi_n(z) \chi_n(z_0) c_n}{2^{3/2} (3\beta_n t)^{1/2}} v^2 \left[2^{-3/2} \frac{r - c_n t}{(3\beta_n t)^{1/2}} \right]$$

где v — функция Эйри. Аналогично при $h \ll r \leq L$, сохраняя линейный и квадратичный члены разложения (7), приходим к интегралу

$$\int_{-\infty + i\epsilon}^{\infty + i\epsilon} k^{-1/2} \exp[ik(r - c_n^* t) + i\gamma_n t k^2] dk = e^{3\pi i/8} \left(\frac{2}{\gamma_n t} \right)^{1/4} \sqrt{\pi} \exp(P) D_{-1/2}(S)$$

$$P = -i(r - c_n^* t)^2 (8\gamma_n t)^{-1}, \quad S = e^{-\pi i/4} (r - c_n^* t) (2\gamma_n t)^{-1/2}$$

где $D_{-1/2}$ — функция параболического цилиндра. Таким образом, промежуточная асимптотика импульса от неподвижного источника дается формулой

$$W_n \approx \text{Re} \left[\frac{\psi_n(z) \psi_n(z_0) c_n^* e^{5\pi i/8}}{4\pi \sqrt{r} (2\gamma_n t)^{1/2}} \exp(P) D_{-1/2}(S) \right]$$

Теперь рассмотрим случай горизонтально движущегося источника. Для n -й моды поля справедливо соотношение [8]

$$U_n = -(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) A(k, z, z_0) \mu_n^{-1}(v) \sin(\mu_n(v) \xi) dv \quad (9)$$

$$A(k, z, z_0) = \varphi_n(z, k) \varphi_n(z_0, k) \omega_n^2(k) \left[k^2 V^2 - \omega_n^2(k) \pm \right. \\ \left. + \omega_n^4(k) \int_{-h}^0 \varphi_n^2(z, k) dz \right]^{-1}, \quad \xi = x + Vt$$

где $\mu_n(\nu)$ — решение уравнения $\mu^2 V^2 = \omega_n^2 (\sqrt{\mu^2 + \nu^2})$, V — скорость источника. Результат для возвышения η_n можно получить, продифференцировав (9) по z_0 и t . Рассмотрим промежуточную зону $h \ll y$, $\xi \ll L$. При малых ν , используя (7), получим разложение для $\mu_n(\nu)$

$$\mu_n(\nu) = c_n^* a_n \nu - V^3 \gamma_n a_n^3 \nu^2 + \dots = q_n^* \nu - p_n \nu^2 + \dots$$

$$a_n = (V^2 - c_n^{*2})^{-1/2}$$

Вблизи фронта $y = q_n^* \xi$, сохраняя лишь члены, дающие вклад в асимптотику, получаем

$$\eta_n \approx -\frac{V}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\partial A}{\partial z_0} \exp[i(q_n^* \xi - y)\nu - ip_n \xi \nu^2] d\nu$$

Промежуточная асимптотика η_n выражается через интеграл Френеля

$$\eta_n \approx -\frac{c_n^{*2} \psi_n(z) \psi_n'(z_0)}{2\pi V \xi \gamma_n} F(\theta) \quad (10)$$

$$F(\theta) = \cos^2 \theta \int_{-\theta}^0 \cos t^2 dt + \sin^2 \theta \int_0^\theta \sin t^2 dt, \quad \theta = 1/2 (y - q_n^* \xi) (p_n \xi)^{-1/2}$$

Наконец, при $y, \xi \gg L$, используя разложение (5), получаем асимптотику в дальней зоне вблизи фронта [8]

$$\eta_n \approx -\frac{c_n^2 \chi_n(z) \chi_n'(z_0) V}{4\pi (V^2 - c_n^2) (3e_n \xi)^{1/2}} \nu [(y - q_n \xi) (3e_n \xi)^{-1/2}] \quad (11)$$

$$e_n = \beta_n V^4 (V^2 - c_n^2)^{-5/2}, \quad q_n = c_n (V^2 - c_n^2)^{-1/2}$$

Численный анализ проводился для случая движущегося источника. Для сравнения с точным полем, рассчитанным по формулам [9], использовались выражения для равномерных асимптотик, совпадающие с (10), (11) вблизи фронтов и переходящие в формулы стационарной фазы вдали от фронтов. Равномерная промежуточная асимптотика имеет вид

$$\eta_n \approx -\frac{VB(z, z_0, \nu^*)}{\pi \sqrt{2\xi} \mu_n''(\nu^*)} F(\theta) \quad (12)$$

$$B(z, z_0, \nu) = \frac{1}{2} \varphi_n(z, \nu) \frac{\partial \varphi_n(z_0, \nu)}{\partial z_0} \mu_n^2(\nu) V^2 \left[\nu^2 + V^2 \mu_n^4(\nu) \int_{-h}^0 \varphi_n^2(z, \nu) dz \right]^{-1}$$

$$\theta = [\mu_n(\nu^*) \xi - \nu^* y]^{1/2}$$

где ν^* — корень уравнения $\xi \mu_n'(\nu) = y$, $\mu_n(\nu)$ и $\varphi_n(z, \nu)$ определяются из уравнения

$$\frac{\partial \varphi_n^2}{\partial z^2} + [\mu_n^2(\nu) + \nu^2] \left[\frac{N^2(z)}{V^2 \mu_n^2(\nu)} - 1 \right] \varphi_n = 0 \quad (13)$$

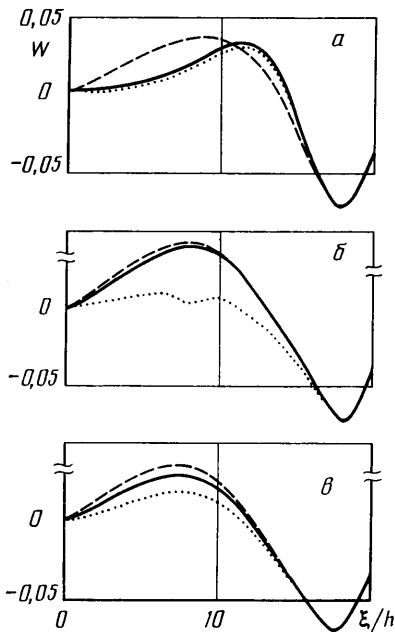
с граничными условиями (8). Равномерная асимптотика в дальней зоне имеет вид [8]

$$\eta_n \approx -V(2\pi)^{-1} B(z, z_0, \nu^*) \theta^{1/2} [2\xi \mu_n''(\nu^*)]^{-1/2} \nu(\theta) \quad (14)$$

$$\theta = \{3/2 [\mu_n(\nu^*) \xi - \nu^* y]\}^{3/2}$$

где все обозначения совпадают с предыдущими, только $\mu_n(\nu)$, $\varphi_n(z, \nu)$ определяются из уравнения (13) с граничными условиями (3).

Рассматривался слой стратифицированной жидкости толщины h с постоянной частотой Брента — Вайсяля N , лежащий на однородном слое



Фиг. 2

существует только в окрестности фронта, вдали от фронта равномерные асимптотики совпадают друг с другом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
2. Miles J. W. Internal waves generated by a horizontally moving source // *Geophys. Fluid Dynamics*. 1971. V. 2. № 1. P. 63–87.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
4. Yanovitch M. Gravity waves in a heterogeneous incompressible fluid // *Communs Pure and Appl. Math.* 1962. V. 15. № 1. P. 45–61.
5. Боровиков В. А., Кельберт М. Я. Поле вблизи фронта волны в задаче Коши — Пуассона // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1984. № 2. С. 173–174.
6. Миропольский Ю. З. О распространении импульсов в стратифицированной вращающейся жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1975. Т. 11. № 12. С. 1314–1322.
7. Keller J. B., Munk W. H. Internal wave wakes of body moving in a stratified fluid // *Phys. Fluids*. 1970. V. 13. № 6. P. 1425–1431.
8. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1984. Т. 20. № 6. С. 526–532.
9. Санников В. Ф. Дальнее поле установившихся волн, создаваемых локальными источниками возмущений в потоке стратифицированной жидкости // *ПММ*. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 987–995.
10. Gray E. P., Hart R. W., Farrell R. A. The structure of the internal wave Mach front generated by a point source moving in a stratified fluid // *Phys. Fluids*. 1983. V. 26. № 10. P. 2919–2931.

Москва

Поступила в редакцию
30.I.1987