МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1988

УДК 532.59:530.182

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИСПЕРСИЯ ДЛИННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

КШЕВЕЦКИЙ С. П., ЛЕБЛЕ С. Б.

Рассматривается распространение длинных слабонелинейных волн в атмосферном волноводе. Выводится модельная система уравнений Кадомцева – Петвиашвили [1], описывающая распространение таких волн. В случае одной возбужденной волновой моды система модельных уравнений переходит в уравнение Кадомцева – Петвиашвили, в котором, однако, переменные x и t меняются местами. Выясняются причины возникшего несоответствия. В двумерном случае строится приближенное решение модельных уравнений, рассматриваются стационарные нелинейные волны и их взаимодействие при столкновении. Приводятся результаты численной проверки устойчивости приближенных стационарных решений и решения задачи о распаде волны на квазисолитоны.

Модельные уравнения, приближенно описывающие процесс распространения длинных слабонелинейных волн на ограниченном интервале времени, можно получить путем упрощения системы фундаментальных уравнений гидродинамики [2]. В частности, для волноводного распространения внутренних гравитационных волн в атмосфере или океане предложен метод [3–5], который можно назвать нелинейным фурье-анализом; он обобщает процедуру Галеркина [3] в том смысле, что движение вдоль одной из координат описывается суперпозицией базисных функций этой координаты с коэффициентами, зависящими от других. Для этих коэффициентов и выводится система модельных уравнений.

Рассмотрим распространение внутренних волн в атмосферном волноводе. Эволюция параметров среды в этом случае определяется уравнениями

$$\begin{gathered}
\frac{d\rho'}{dt'}+\rho'\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)=0\\
\rho'\frac{du'}{dt'}=-\frac{\partial P'}{\partial x'},\qquad \rho'\frac{dv'}{dt'}=-\frac{\partial P'}{\partial y'}\\
\rho'\frac{dw'}{dt'}=-\frac{\partial P'}{\partial z'}-\rho' g,\qquad P'=\frac{\rho'}{\mu}RT'\\
c_V\frac{dT'}{dt'}=-RT'\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)
\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь u', v', w' – компоненты массовой вдоль осей x', y', z', ρ' – плотность, P' – давление, T' – температура, μ – средний молекулярный вес, c_v, R – газовые постоянные, g – ускорение свободного падения. Ось z' направлена вверх.

Пусть атмосфера стратифицирована экспоненциально, и длина волны в направлении распространения (вдоль оси x') порядка λ_x, а безразмерная амплитуда имеет порядок σ. Высоту однородной атмосферы обозначим через H. Тогда основные предположения развиваемой ниже теории сводятся к соотношениям $H/\lambda_x=\beta\ll 1$, $\sigma\ll 1$. Кроме того, допустим, что длина волны вдоль третьего измерения (оси y') много больше λ_x: $\lambda_x/\lambda_y=\varepsilon\ll 1$.

При переходе к безразмерным переменным, учитывая квазидвухмерность модели ($\varepsilon \ll 1$), можно воспользоваться двумерной теорией. Имеем

$$t' = \sqrt{\frac{H}{g}}\frac{t}{\beta}, \quad x' = \frac{xH}{\beta} \quad z' = zH, \quad T' = T_0(1+\sigma T)$$

$$u' = \sigma\sqrt{gH}u, \quad w' = \sigma\beta\sqrt{gH}, \quad \rho' = \rho_0(z - \sigma H\delta) \tag{2}$$

где T_0, $\rho_0(z)$ — температура и плотность невозмущенной среды. В трехмерной задаче положим также $y' = Hy/(\varepsilon\beta)$. Оценить масштаб скорости v' можно с помощью линейного соотношения

$$\rho_0 v_{t'}' = -gH\rho_{y'}' - gH\rho_0 T_{y'}'/T_0 \tag{3}$$

следующего из третьего уравнения системы (2). Пусть $v' = \alpha\sqrt{gH}v$, где α — амплитудный параметр, который нужно выбрать. Переходя в (3) к безразмерным переменным, видим, что v будет порядка единицы, если положить $\alpha \equiv \varepsilon$. В новых переменных система (1) принимает вид

$$\begin{gathered}
\delta_t - w + w_z + u_x = -\sigma(\delta_x u + \delta_z w) - \varepsilon^2 v_y \\
u_t + \delta_x - T_x = -\sigma(uu_x + wu_z + T\delta_x) \\
v_t + \delta_y + T_y = 0 \\
\delta_z + T_z - T = \sigma T\delta_z - \beta^2 w_t \\
T_t + (\gamma-1)(u_x + w_z) = -\sigma[T_x u + T_z w + (\gamma-1)(Tu_x + Tw_z)] - \varepsilon^2(\gamma-1)v_y
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь оставлены слагаемые только первого порядка по ε^2, β^2, σ. Первое и пятое уравнения системы завязаны с третьим, но лишь через малые порядка ε^2, поэтому в третьем уравнении можно ограничиться линейными вкладами.

Для определенности будем предполагать, что канал задается граничными условиями

$$T(0) = 0, \quad T_z(h) = 0 \tag{5}$$

где $z=0$, $z=h$ — границы волновода. Волновод такого вида качественно моделирует распространение внутренних волн в атмосфере Земли на термосферных высотах (5).

Вывод модельных уравнений из системы (4) приводится по методике [4—7]. Решение задачи (4), (5) ищется в виде разложения

$$T = \sum_{n=1,2,\ldots} [\Theta^n(x,t) + \Theta^{-n}(x,t)]\varphi^n(z)$$

$$\varphi^n(z) = \frac{1}{P_n} e^{-(z-h)/2} \sin K_n z$$

$$P_n^2 = \int_0^h \sin^2 K_n z\, dz, \qquad \operatorname{tg}(K_n h) = -2K_n$$

по полному набору собственных функций краевой задачи

$$\varphi_{zz}^n - \varphi_z^n + \frac{\gamma-1}{\gamma c_n^2}\varphi^n = 0, \qquad \varphi^n(0) = \varphi_z^n(h) = 0$$

получающейся при разделении переменных в линейной волновой задаче с $\sigma = \beta^2 = \varepsilon^2 = 0$ [4, 5]. После выделения однонаправленных волн Θ^n и Θ^{-n} из первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (4) с точностью до малых порядка σ, β^2, ε^2 получим систему уравнений, определяющих эволюцию коэффициентов разложения $\Theta^n(x, t)$

$$\Theta_t^n + c_n\Theta_x^n + \frac{\sigma}{2}\sum_{m,k} F_{km}{}^n\Theta^m\Theta_x^k + \frac{\beta^2}{2}\sum_k M_k{}^n\Theta_{xxx}^k + \varepsilon^2\frac{c_n^2}{2}\int_0^h e^{-z}\varphi^{|n|}v_{yz}\,dz = 0$$

$$c_n^2 = \frac{4\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{1+4K_n^2}, \qquad c_{-n} = -c_n \tag{6}$$

$$M_k{}^n = \begin{cases} 0, & |n| \neq |k| \\ \dfrac{\gamma - c_n c_k}{\gamma-1}c_n c_k^2, & |n| = |k| \end{cases}$$

$$n,\ m,\ k = \pm1,\ \pm2, \ldots$$

В системе (6) c_n — скорости распространения волновых мод, а K_n — вертикальные компоненты волновых векторов. Постоянные $F_{km}{}^n$ определяют вклад нелинейных членов и для рассматриваемой задачи приведены в [5]; подробные формулы для $F_{km}{}^n$ при различных граничных условиях приведены также в [7]. Если v_z представить в виде

$$v_z = \sum_{n=1}^{\infty} f^n(x,t)\varphi^n(z)$$

то из (6) и третьего уравнения системы (4) получим

$$\Theta_t^n + c_n\Theta_x^n + \frac{\sigma}{2}\sum_{m,k} F_{mk}{}^n\Theta^k\Theta_x^m + \frac{\beta^2}{2}\sum_k M_k{}^n\Theta_{xxx}^k + \frac{1}{2}\varepsilon^2 c_n^2 f_y^n = 0$$

$$f_t^n + (\Theta_y^n + \Theta_y^{-n}) = 0,\ f^{-n} = f^n\ (n,\ m,\ k = \pm1,\ \pm2, \ldots) \tag{7}$$

Для сравнения полученной системы уравнений с уравнением Кадомцева — Петвиашвили, выведенным применительно к теории внутренних волн в [2, 8], систему (7) удобно представить с той же точностью в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\Theta_t^n + c_n\Theta_x^n - \frac{\sigma}{2}\sum_{m,k} F_{km}{}^n\Theta^m\Theta_t^k\frac{1}{c_k} - \frac{\beta^2}{2}\sum_k M_k{}^n\frac{1}{c_k^3}\Theta_{ttt}^k\right] -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}c_n^2(\Theta_{yy}^n + \Theta_{yy}^{-n}) = 0 \tag{8}$$

Если возбуждена только одна мода θ^n и взаимодействием ее с остальными можно пренебречь ($\Theta^i = 0$ при $i \neq n$), то приходим к уравнению Кадомцева — Петвиашвили для одной возбужденной волновой моды

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\Theta_t^n + c_n\Theta_x^n - \frac{\sigma}{2}F_{nn}{}^n\Theta^n\Theta_t^n\frac{1}{c_n} - \frac{\beta^2}{2}M_n{}^n\frac{1}{c_n^3}\Theta_{ttt}^n\right] - \frac{\varepsilon^2}{2}c_n^2\Theta_{yy}^n = 0 \tag{9}$$

В этом смысле система (8) обобщает уравнение (9) на случай нескольких взаимодействующих между собой волн. Заметим, что по сравнению с традиционным вариантом уравнения КП для внутренних волн [2, 3, 8] в уравнении (9) переменные x и t поменялись местами. Обычное уравнение КП получается, если только начальные условия удовлетворяют дополнительному ограничению

$$\frac{\partial u'}{\partial y'}-\frac{\partial v'}{\partial x'}\approx 0$$

В этом случае $f_t^n\approx -c_n f_x^n$ и можно воспользоваться традиционной процедурой вывода уравнения КП.

Таким образом, уравнение КП в форме (9) описывает более широкий класс волновых явлений. С математической точки зрения уравнение (9) и обычное уравнение КП эквивалентны, так что для построения аналитических частных решений (9) достаточно в известных решениях обычного уравнения КП поменять местами x и t и совершить масштабные преобразования для согласования констант уравнений.

В [5] было изучено распространение очень длинных внутренних волн при $\beta^2=\varepsilon^2=0$. В частности, было показано, что нелинейность приводит к эффекту опрокидывания волн, характерному для решений некоторых нелинейных эволюционных уравнений. Дополним имеющиеся в [5] результаты исследованием распространения внутренних волн при $\varepsilon^2=0$, $\beta^2\neq 0$. Приближенное решение системы (7) (при $\varepsilon^2=0$) в принципе можно построить методами теории возмущений. Пригодное при больших временах разложение можно получить выбирая в качестве «затравочного» нулевого приближения решения $\Theta^{l(0)}(x, t)$ уравнений Кортевега — де Фриза (КдФ)

$$\Theta_t^{l(0)}+c_l\Theta_x^{l(0)}+{}^1/_2\sigma F_{ll}{}^l\Theta^{l(0)}\Theta_x^{l(0)}+{}^1/_2\beta^2 M_l{}^l\Theta_{xxx}^{l(0)}=0$$
$$\Theta^{l(0)}(x,\ 0)=\Theta^l(x,\ 0) \tag{10}$$

Тогда следующее приближение не содержит вековых членов и имеет вид

$$\Theta^l(x,t)=\Theta^{l(0)}(x,t)-\int_0^t\Big[\frac{\sigma}{2}\sum_{\substack{n\\ n\neq m=l}}\sum_{m}F_{nm}{}^l\Theta^{m(0)}\times$$
$$\times(x-c_l(t-t'),t')\,\Theta_x^{n(0)}(x-c_l(t-t'),t')\Big]dt' \tag{11}$$

При записи (11) учтено, что для внутренних волн матрица $M_k{}^n$ отлична от нуля только при $|n|=|k|$, а взаимодействием с противоположно направленными волнами пренебрегается.

Решение (10), (11) показывает, что для нелинейных внутренних волн характерны многие свойства, присущие решениям уравнения КдФ, в частности образование уединенных волн — квазисолитонов. В качестве примера рассмотрим классическую задачу о распространении одной первоначально возбужденной моды внутренних волн

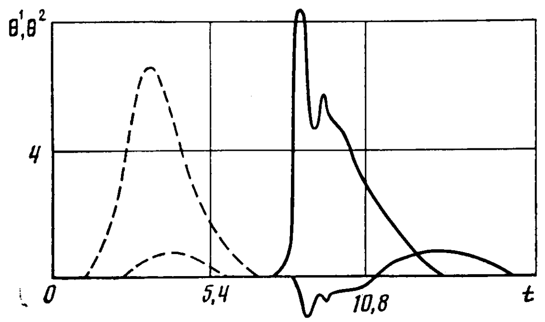
$$\Theta^l(x,\ t=0)=\Theta_0(x),\ \ \Theta^i(x,\ t=0)=0$$

Подобного рода задача рассматривалась, например, в [2], но без учета эффектов нелинейного взаимодействия мод. Эволюция моды Θ^l в рассматриваемом приближении определяется уравнением (10), а $\Theta^i(x, t)$ при $i\neq l$ выражается через $\Theta^l(x, t)$ и $\Theta_0(x)$

$$\Theta^i(x,t)=\frac{1}{c_l-c_i}\frac{\sigma}{4}F_{ll}{}^i\{[\Theta^l(x,t)]^2-[\Theta_0(x-c_it)]^2\} \tag{12}$$

Этот результат дополняет известный вывод [2] о том, что эволюция одной возбужденной моды внутренних волн описывается уравнением КдФ, и дает явные выражения для возмущений, вызываемых выбранной модой l в остальных модах. Видно, что мода l возбуждает в остальных модах $i\neq l$ как возмущения, сопровождающие волну в моде l, так и возмущения, распространяющиеся с характерными для мод i скоростями c_i. Обратим также внимание на то, что процесс возбуждения остальных мод насыщается и после разделения «сопровождающих» и свободно распространяющихся возмущений в модах с $i \neq l$ обмен энергией между модами прекращается.

Однако выражения (12) имеют смысл только при $\sigma/|c_l - c_i| \ll 1$. Поскольку для внутренних волн характерно $|c_i - c_{i-1}| \to 0$ при $i \to \infty$, то при соответствующем выборе номера l первоначально возбужденной моды даже при малых σ могут быть существенны эффекты воздействия мод $i \neq l$ на моду l. Это впервые отмечено в [9]. Наиболее существенным эффектом, естественно, является взаимодействие моды l с «сопровождающими»



возмущениями в модах $i \neq l$. Учитывая это обстоятельство, приходим к эволюционному уравнению для моды l

$$\theta_t^l + c_l\theta_x^l + \frac{1}{2}\sigma\left[F_{ll}^l\theta^l + \frac{1}{2}\sigma A_{ll}^l(\theta^l)^2\right]\theta_x^l + \frac{\beta^2}{2}M_l^l\Theta_{xxx}^l = 0$$

$$A_{ll}^l = \frac{1}{2}\sum_{n \neq l}(F_{ln}^l + 2F_{nl}^l)F_{ll}^n\frac{1}{c_l - c_n} \tag{13}$$

Примечательно, что уравнение (13) — тоже уравнение солитонного типа, точно интегрируемое методом обратной задачи рассеяния [10]. Используя (13), можно уточнить классические выражения теории уединенных внутренних волн. Солитонное решение (13) имеет вид

$$\Theta^l(x,t) = \left[a + \left(\frac{\sigma F_{ll}^l}{6(V_l - c_l)} - 2a\right)\mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{V_l - c_l}{2\beta^2 M_l^l}}(x - V_l t)\right]^{-1}$$

$$a = \frac{\sigma F_{ll}^l}{6(V_l - c_l)} - \sqrt{\frac{\sigma F_{ll}^l}{12(V_l - c_l)} - \frac{\sigma^2 A_{ll}^l}{24(V_l - c_l)}} \tag{14}$$

где V_l — скорость распространения солитона. При $A_{ll}^l = 0$ взаимодействие различных мод не учитывается и (14) переходит в солитон КдФ. Возмущения остальных мод ($i \neq l$) определяются соотношением

$$\Theta^i(x,\ t) = {}^1/_4\sigma(c_l - c_i)^{-1}F_{ll}^i[\Theta^l(x,\ t)]^2 \tag{15}$$

Многосолитонные решения уравнения (13) совместно с (15) описывают также процесс взаимодействия нескольких квазиодномодовых уединенных волн, но таких, которые в главном порядке теории возмущений по параметру σ принадлежат одной и той же моде.

Выражения (11) позволяют легко рассчитать столкновение солитонов разных мод. Не вдаваясь в подробности несложных вычислений, приведем для примера результат расчета фазовых сдвигов Δx^1, Δx^2 столкнувшихся солитонов 1-й и 2-й мод

$$\Delta x^1 = -\frac{6F_{21}{}^1\beta}{(c_1-c_2)F_{22}{}^2}\sqrt{2M_2{}^2(V_2-c_2)},$$

$$\Delta x^2 = -\frac{6F_{12}{}^2\beta}{(c_2-c_1)F_{11}{}^1}\sqrt{2M_1{}^1(V_1-c_1)}$$

где V_1, V_2 — скорости сталкивающихся солитонов.

Устойчивость приближенного решения (14), (15) проверялась также путем прямого численного интегрирования системы (6) при $\varepsilon=0$. Численные решения подтвердили его высокую стабильность как при свободном распространении, так и при столкновении с другими волнами. Заметим, что если задать уединенную волну обычным образом — через солитон уравнения КдФ для одной из мод, а в остальных положить $\Theta^i(x, t=0)=0$, то такая волна сравнительно быстро распадается на солитон вида (14), (15) и дополнительные возмущения меньшей амплитуды (в согласии с аналитической формулой (12)). Таким образом, устойчивость уединенной волны достигается за счет компенсации эффектов нелинейного взаимодействия мод изменением формы волны.

На фигуре приведен один из результатов численного моделирования процесса распада двухмодового возмущения на солитоны. Нелинейные и дисперсионные постоянные при этом взяты из [5], $\sigma=0,1$, время и расстояние измеряются в реальном масштабе. Штриховой линией изображены исходные профили волн Θ^1, Θ^2, а сплошной — результат решения двухмодовой задачи о распространении внутренних волн на расстояние 3800 км от начальной точки. Кривые большей амплитуды соответствуют моде Θ^1, а меньшей — моде Θ^2. Четко видно образование квазиодномодовых солитонов внутренних волн. Пилообразные возмущения в моде Θ^2 повторяют поведение аналогичных возмущений в Θ^1. Квазипериоды первых солитонов значительно меньше квазипериода исходного возмущения и определяются главным образом амплитудой начального возмущения и постоянными уравнения (6).

В заключение отметим, что приведенные результаты относятся не только к рассмотренной проблеме распространения нелинейных внутренних волн в атмосфере, но и к волнам в жидкости (как известно, при $\gamma\to\infty$ система (1) переходит в уравнения для несжимаемой жидкости). Не принципиален также выбранный здесь вид граничных условий. Выбор другой среды распространения внутренних волн и других граничных условий задачи приведет лишь к изменению понятия волновой моды и соответственно к изменению постоянных уравнений (8); при этом все отмеченные особенности поведения нелинейных внутренних волн сохраняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 753—756.
2. *Леонов А. И.* О двухмерных уравнениях Кортевега — де Фриза в нелинейной теории поверхностных и внутренних волн // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 4. С. 820—823.
3. *Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984. 154 с.
4. *Лебле С. Б.* Об аналоге уравнения Кадомцева — Петвиашвили в теории внутренних волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 12. С. 1199—1206.
5. *Кшевецкий С. П., Лебле С. Б.* Нелинейная дисперсия крупномасштабных внутренних волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 2. С. 170—176.
6. *Манин Д. Ю., Петвиашвили В. И.* Самофокусировка магнитозвуковой волны поперек магнитного поля // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38. Вып. 9. С. 427—430.

7. *Лебле С. Б., Локтионов М. В., Шпилевой А. Н.* Генерация и распространение длинных внутренних гравитационных волн в сферическом слое. Калининград, 1985.— Деп. ВИНИТИ № 5280—85.
8. *Кшевецкий С. П., Лебле С. Б.* Уравнение Кадомцева — Петвиашвили в теории атмосферных внутренних волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 9. С. 1004—1007.
9. *Пелиновский Е. Н., Романова Н. Н.* Нелинейные стационарные волны в атмосфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 13. № 11. С. 1169—1174.
10. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980. 319 с.

Калининград

Поступила в редакцию
31.III.1987