**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
**№ 3 · 1988**

УДК 532.58.011

# НАКЛОННЫЙ ВХОД ЗАТУПЛЕННОГО КОНТУРА В ИДЕАЛЬНУЮ ЖИДКОСТЬ

КОРОБКИН А. А.

Рассматривается плоское неустановившееся движение идеальной несжимаемой жидкости, вызванное погружением в нее затупленного контура под заданным углом атаки. На начальной стадии процесса, когда глубина погружения относительно мала, задача исследуется методами асимптотического анализа. Причем роль малого параметра играет безразмерное время $t$. Показано, что с точностью до $O(t^2)$ при $t \to 0$ поле перемещений жидких частиц не зависит от угла атаки и определяется решением задачи о вертикальном входе контура. Найдены асимптотики главного вектора и главного момента сил, действующих на контур со стороны жидкости, при малых временах. При этом асимптотика главного момента сил пропорциональна расстоянию, пройденному телом вдоль поверхности жидкости.

1. Рассматривается плоское неустановившееся движение идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей в начальный момент ($t'=0$) полупространство $y'<0$ и покоящейся (здесь и далее штрихом обозначаются размерные переменные). Линия $y'=0$ при $t'=0$ является свободной границей. Поверхностным натяжением и массовыми силами пренебрегается.

Пусть $R$, $V$ и $\delta$ — положительные постоянные. При фиксированном $t'$ уравнение

$$y'=(2R)^{-1}(x'+\delta Vt')^2-Vt' \tag{1.1}$$

определяет параболу на плоскости $x'$, $y'$, которую будем отождествлять с твердым недеформируемым контуром. При $t'=0$ этот контур касается свободной границы в точке $x'=0$. Соотношение (1.1) задает движение контура вдоль оси $y'$ со скоростью $V$ и вдоль оси $x'$ со скоростью $\delta V$. Требуется найти возникающее при этом движение жидкости, считая, что на плоскости лагранжевых координат $\xi'$, $\eta'$ область, занятая жидкостью, заранее известна — это полуплоскость $\eta'<0$.

Процесс наклонного входа ($\delta\neq 0$) различных тел в жидкость изучен в настоящее время еще недостаточно, причем большинство результатов получено экспериментальным путем. Основные достижения в этой области представлены в [1, 2]. Так, в [1] рассматривается плоская задача о наклонном входе тонкого тела в идеальную несжимаемую жидкость, а в [2] предлагается способ вычисления сил, действующих на тупой конус и сферу со стороны жидкости. Предполагается, что давление вдоль каждой образующей конуса распределено так же, как у симметрично погружающегося конуса с углом конусности, равным углу наклона образующей к горизонтальной плоскости. Результаты расчета по этой методике согласуются с экспериментальными данными.

Примем за масштаб длины радиус кривизны $R$ параболы (1.1) в точке $x'=0$, а за масштаб времени — величину $RV^{-1}$ и перейдем к безразмерным переменным (обозначение безразмерных переменных отличается отсутствием штриха). В переменных Лагранжа искомыми функциями будут безразмерные координаты $x$, $y$ жидкой частицы, занимающей в момент $t=0$ положение $\xi$, $\eta$. Удобнее иметь дело не с координатами, а с перемещениями $X(\xi, \eta, t)$, $Y(\xi, \eta, t)$ частиц жидкости, определяемыми равенствами $X=x(\xi, \eta, t)-\xi$, $Y=y(\xi, \eta, t)-\eta$.

Функции $X$, $Y$ удовлетворяют следующим соотношениям [3]:

$$X_{\eta t}-Y_{\xi t}+X_\xi X_{\eta t}+Y_\xi Y_{\eta t}-X_\eta X_{\xi t}-Y_\eta Y_{\xi t}=0 \tag{1.2}$$

$$X_\xi+Y_\eta+X_\xi Y_\eta-X_\eta Y_\xi=0 \quad (\eta<0) \tag{1.3}$$

$$X_{tt}+X_\xi X_{tt}+Y_\xi Y_{tt}=0 \quad (\eta=0,\ \xi<-b(t),\ \xi>a(t)) \tag{1.4}$$

$$Y={}^1/_2(\xi+X+\delta t)^2-t \quad (\eta=0,\ -b(t)<\xi<a(t)) \tag{1.5}$$

$$X=Y=Y_t=X_t=0 \quad (t=0) \tag{1.6}$$

$$\int_{\Omega_0}|\mathbf{X}_t|^2\,d\Omega<+\infty \quad (t>0), \qquad \Omega_0=\{\xi,\eta\,|\,\eta<0, \quad -\infty<\xi<+\infty\} \tag{1.7}$$

Здесь (1.3) есть уравнение неразрывности, (1.2) — условие отсутствия вихрей (движение возникает из состояния покоя и внешние силы отсутствуют). Функции $b(t)$, $a(t)$ задают прообразы в лагранжевых координатах соответственно левой и правой точек контакта поверхности твердого тела со свободной границей. Естественно предположить, что $a(t)\to 0$, $b(t)\to 0$ при $t\to 0$. Функции $a(t)$, $b(t)$ подлежат определению вместе с решением сформулированной задачи. Соотношение (1.4) есть условие постоянства давления $p$ на свободной границе, оно следует из уравнения импульса [3]

$$X_{tt}+X_\xi X_{tt}+Y_\xi Y_{tt}=-p_\xi \quad (\eta\leqslant 0) \tag{1.8}$$

Условие непротекания (1.5) задается на прообразе пятна контакта $-b(t)<\xi<a(t)$, $\eta=0$. Требуется найти решение системы (1.2), (1.3) в области $\eta<0$, $0<t<T$ при граничных условиях (1.4), (1.5), начальных условиях (1.6) и дополнительном условии (1.7). Условие (1.7) означает, что рассматриваются только течения, обладающие конечной кинетической энергией [3].

Спецификой задачи (1.2)—(1.7) является несимметричность условия непротекания (1.5) по переменной $\xi$, что существенно усложняет анализ. Так, если в симметричном случае [3] прообраз пятна контакта описывается одной функцией времени, то теперь — двумя: $a(t)$, $b(t)$.

Есть основание утверждать, что задача (1.2)—(1.7) является корректной, хотя доказать это пока не удалось. Пусть для достаточно малого $T$ решение указанной задачи при $0<t<T$ существует и единственно. Тогда первым шагом на пути к исследованию начального этапа погружения является построение формального асимптотического разложения, которое удовлетворяет соотношениям (1.2)—(1.6) с точностью $O(t^\alpha)$ при $t\to 0$ равномерно по пространственным переменным и параметрам задачи, где $\alpha$ — любое наперед заданное положительное число.

2. Задачу (1.2)—(1.7) будем исследовать при малых $t$. Так как при $t\to 0$ пятно контакта стягивается в точку, то для получения информации о начальном этапе проникания необходимо произвести растяжение пространственных переменных

$$\xi=c(t)\lambda+k(t), \quad \eta=c(t)\mu$$

$$c(t)={}^1/_2[a(t)+b(t)], \quad k(t)={}^1/_2[a(t)-b(t)]$$

где $c(t)$ характеризует размер пятна контакта, $k(t)$ — несимметричность его расположения относительно начала координат.

Предполагаем, что при $t\to 0$ асимптотические разложения искомых функций имеют вид

$$\mathbf{X}(\xi,\eta,t)=c^2(t)\mathbf{X}^{(0)}(\lambda,\mu)+c^3(t)\mathbf{X}^{(1)}(\lambda,\mu)+\ldots \tag{2.1}$$

$$p(\xi,\eta,t)=c^{-1}(t)p^{(0)}(\lambda,\mu)+p^{(1)}(\lambda,\mu)+\ldots$$

$$c(t)=c_0t^{1/2}+c_1t+\ldots,\ k(t)=k_0t^{1/2}+k_1t+\ldots$$

Указанные разложения следует рассматривать как «внешние» по отношению к точкам контакта. В окрестности $U$ этих точек краевые условия (1.4), (1.5) не согласованы между собой, поэтому можно ожидать, что решение в этих узких зонах имеет более тонкую структуру, чем (2.1). Для однозначного определения членов «внешнего» асимптотического разложения (2.1) условие (1.7) необходимо использовать в ослабленном виде: $|\mathbf{X}_t|$ имеет минимально возможную особенность в $U$ и

$$\int\limits_{\Omega_0\setminus U} |\mathbf{X}_t|^2\,d\Omega<+\infty \qquad (t>0) \tag{2.2}$$

Подставляя разложения (2.1) в соотношения (1.2)–(1.6) и удерживая члены старшего порядка при $t\to 0$, получим

$$X_\lambda{}^{(0)}+Y_\mu{}^{(0)}=0,\ X_\mu{}^{(0)}-Y_\lambda{}^{(0)}=0 \quad (\mu<0) \tag{2.3}$$

$$\mu=0:\ Y^{(0)}={}^1/_2(\lambda+k_0)^2-c_0{}^{-2}(|\lambda|<1),\quad X^{(0)}=0\ (|\lambda|>1)$$

Решение краевой задачи (2.3) дает главный член начальной асимптотики искомых функций. Это решение может быть выписано с помощью формул Келдыша – Седова [4], при этом условие (2.2) дает $k_0=0$, $c_0=2$ и

$$W(\omega)={}^1/_4(\omega-\sqrt{\omega^2-1})^2 \tag{2.4}$$

где $W=Y^{(0)}+iX^{(0)}$, $\omega=\lambda+i\mu$, функция $\sqrt{\omega^2-1}$ принимает положительные значения при вещественных $\omega>1$. Решение (2.4) описывает течение с конечной кинетической энергией [3], а главный член начальной асимптотики давления, действующего на погружающееся тело, имеет интегрируемую особенность в точках контакта

$$p^{(0)}(\lambda,\ 0)=2(1-\lambda^2)^{-1/2}\ \ (|\lambda|<1)$$

3. Краевая задача для первого приближения много сложнее

$$\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-2\right)(X_\mu^{(1)}-Y_\lambda^{(1)})=\left(\mu\frac{\partial}{\partial\lambda}-\lambda\frac{\partial}{\partial\mu}\right)|\nabla X^{(0)}|^2 \tag{3.1}$$

$$X_\lambda^{(1)}+Y_\mu^{(1)}=|\nabla X^{(0)}|^2$$

$$\left(\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}-3\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+3\right)X^{(1)}=\lambda Y_\lambda^{(0)}(Y_\lambda^{(0)}-\lambda Y_{\lambda\lambda}^{(0)}) \qquad (\mu=0,\ |\lambda|>1)$$

$$Y^{(1)}=\lambda(k_1+\delta)c_0{}^{-2}+\lambda X^{(0)}+2c_1c_0{}^{-4} \quad (\mu=0,\ |\lambda|<1)$$

Решение этой задачи может быть выписано в квадратурах, если известно решение неоднородного уравнения Клеро

$$\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-2\right)\Phi_0(\lambda,\mu)=\left(\mu\frac{\partial}{\partial\lambda}-\lambda\frac{\partial}{\partial\mu}\right)|\nabla X^{(0)}|^2\ \ (\mu<0,\ -\infty<\lambda<+\infty) \tag{3.2}$$

убывающее на бесконечности. При этом задача (3.1) распадается на две. Сначала определяется векторное поле по заданным его дивергенции и ротору [5], затем с помощью формул Келдыша – Седова решается смешанная краевая задача для аналитической в нижней полуплоскости функции. Формула (2.4) показывает, что $|\nabla X^{(0)}|^2=O(r^{-4})$ при $r\to\infty$ $(r=(\lambda^2+\mu^2)^{1/2})$, поэтому условие (2.2) для первого приближения будет выполняться только тогда, когда $k_1=-\delta$. Следовательно, с точностью до $O(t^2)$ при $t\to 0$ поле перемещений $\mathbf{X}(\xi,\eta,t)$ не зависит от величины $\delta$ и определяется решением задачи о вертикальном погружении симметричного контура.

Условие на свободной границе в первом приближении может быть проинтегрировано

$$X^{(1)}(\lambda,0)=\frac{1}{2}\lambda\int\limits_{\lambda}^{\infty}[Y_v^{(0)}(v,0)]^2\frac{dv}{v}\qquad(\lambda>1)\tag{3.3}$$

Эта формула дает главный член начальной асимптотики горизонтальной составляющей вектора перемещений для жидких частиц свободной границы. Важно отметить, что $X^{(1)}(\lambda,\ 0)>0$ при $\lambda>1$, т. е. жидкие частицы с течением времени удаляются от погружающегося контура, $X^{(1)}(\lambda,\ 0)=O(\lambda^{-3})$ при $\lambda\to+\infty$ и $X^{(1)}(\lambda,\ 0)=O(\ln[1/(\lambda-1)])$ при $\lambda\to1+0$. Полное исследование задачи (3.1) возможно только на основе численных расчетов. Однако для их корректного проведения необходимо регуляризовать задачу, выделив особенность решения в окрестности точек контакта.

4. Для определения того нового, что вносится в картину течения горизонтальной компонентой скорости погружающегося тела, необходимо рассмотреть следующее, второе приближение. Задача для второго приближения (так же как и для первого) не может быть решена явно, однако она позволяет представить решение в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{X}^{(2)}(\lambda,\ \mu)=\mathbf{X}_v^{(2)}(\lambda,\ \mu)-(\delta/2)\mathbf{\Phi}(\lambda,\ \mu),\quad \mathbf{\Phi}=(\Phi,\ \varphi)$$

первое из которых есть второе приближение в задаче о вертикальном осесимметричном входе параболического контура в жидкость, а второе представляет собой поправку к основному течению, обусловленную ненулевой горизонтальной составляющей скорости контура.

Уравнения движения для поправочных функций будут иметь вид

$$\left(3-\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}-\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)(\Phi_\mu-\varphi_\lambda)=\frac{\partial}{\partial\mu}|\nabla X^{(0)}|^2+\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi_0\tag{4.1}$$

$$\Phi_\lambda+\varphi_\mu=0\quad(\mu<0)$$

где $\Phi_0(\lambda,\ \mu)$ определяется уравнением (3.2), на свободной границе и на пятне контакта

$$\lambda^2\Phi_{\lambda\lambda}-5\lambda\Phi_\lambda+8\Phi=6\lambda^{-1}X^{(1)}-2X_\lambda^{(1)}\quad(\mu=0,\ |\lambda|>1)$$

$$\varphi=-(k_2/4\delta)\lambda\quad(\mu=0,\ |\lambda|<1)$$

Действуя по плану разд. 2, 3, получим, что условие (2.2) выполняется только тогда, когда $k_2=0$. Функция $X^{(1)}(\lambda,\ 0)$ при $|\lambda|>1$ известна, поэтому условие на свободной границе может быть проинтегрировано с учетом (3.3)

$$\Phi(\lambda,0)=2\lambda^4\int\limits_{\lambda}^{\infty}X^{(1)}(v,0)\frac{dv}{v^6}=\frac{1}{2\lambda}X^{(1)}(\lambda,0)-\frac{1}{4}\lambda^4\int\limits_{\lambda}^{\infty}[Y_v^{(0)}(v,0)]^2\frac{dv}{v^5}$$

$$\Phi(-\lambda,0)=\Phi(\lambda,0)\quad(\lambda>1)\tag{4.2}$$

Соотношения (4.2) показывают, что жидкость притекает к погружающемуся контуру с правой от него стороны и оттекает с левой. Это соответствует интуитивным представлениям и экспериментальным данным о процессе наклонного входа затупленного тела в жидкость.

5. Уравнения движения (4.1) совместно с условием на свободной границе (4.2), однородным условием на пятне контакта $\varphi=0$ при $\mu=0$, $|\lambda|<1$ и условием (2.2) образуют довольно сложную краевую задачу, решение которой может быть исследовано только численно. Однако асимптотики интегральных характеристик процесса, таких, как главный вектор $\mathbf{F}(t)$ и главный момент $L(t)$ сил, действующих на тело со стороны жидкости, можно рассчитать непосредственно. Имея в виду задачу об изменении тра-

ектории свободно падающего тела при входе в жидкость, принимаем за центр приведения сил центр тяжести контура (предполагается, что он лежит на оси симметрии параболы). Тогда для идеальной жидкости

$$\mathbf{F}(t)=\int_\sigma p\mathbf{n}\,d\sigma, \qquad L_0(t)=\int_\sigma p(\mathbf{n}\times\mathbf{r})_z\,d\sigma \tag{5.1}$$

$$L(t)=-F_x d+L_0(t), \quad \mathbf{F}=(F_x,\ F_y)$$

где $\sigma$ — смоченная часть тела, $\mathbf{n}$ — нормаль к $\sigma$, направленная во внешность области течения, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор данной точки $\sigma$ относительно вершины контура, $d=d'/R$, $d'$ — расстояние от вершины до центра тяжести, $(\mathbf{n}\times\mathbf{r})_z$ — единственная ненулевая компонента векторного произведения $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$. Перейдем в (5.1) к интегралам на плоскости лагранжевых переменных

$$\mathbf{F}(t)=\int_{-b(t)}^{a(t)} p(\xi,0,t)\,(-Q,1)\sqrt{(1+X_\xi)^2+Y_\xi^2}\,\frac{d\xi}{\sqrt{1+Q^2}}$$

$$L_0(t)=\int_{-b(t)}^{a(t)} p(\xi,0,t)\,(-Q,1)\left(Q,\frac{1}{2}Q^2\right)\sqrt{(1+X_\xi)^2+Y_\xi^2}\,\frac{d\xi}{\sqrt{1+Q^2}}$$

$$Q(\xi,\ t)=\xi+\delta t+X(\xi,\ 0,\ t) \quad (-b(t)<\xi<a(t))$$

давление $p(\xi,\ 0,\ t)$ определяется из уравнения импульса (1.8). Подставляя в это уравнение разложения (2.1), для первого приближения давления $p^{(1)}(\lambda,\ 0)$ получим

$$p_\lambda^{(1)}(\lambda,\ 0)=-4\delta\,(X_\lambda^{(0)}-\lambda X_{\lambda\lambda}^{(0)})+(p_v^{(1)})_\lambda(\lambda,\ 0)$$

где $p_v^{(j)}$ — соответствующее приближение давления $p$ в задаче о вертикальном входе контура ($\delta=0$). Ясно, что $p_v^{(j)}(-\lambda,\ \mu)=p_v^{(j)}(\lambda,\ \mu)$ при $\mu\leqslant\leqslant 0$, $j=0,\ 1,\dots,$ отсюда, используя соответствующие формулы для $p^{(0)}(\lambda,\ 0)$, $p^{(1)}(\lambda,\ 0)$, получим $(t\to 0)$

$$F_y(t)=\int_{-1}^{1} p^{(0)}(\lambda,0)\,d\lambda\,[1+O(\sqrt{t})]=2\pi[1+O(\sqrt{t})]$$

$$F_x(t)=-4t\int_{-1}^{1}\lambda p^{(1)}(\lambda,0)\,d\lambda\,[1+O(\sqrt{t})]=4\pi\delta t[1+O(\sqrt{t})]$$

$$L(t)=-F_x d+F_x[1+O(\sqrt{t})]=4\pi\delta t(1-d)\,[1+O(\sqrt{t})]$$

Несимметричность поля давлений приводит к появлению горизонтальной составляющей силы сопротивления и моменту, который стремится повернуть тело вокруг его центра тяжести по ходу часовой стрелки при $d'<R$ и против — при $d'>R$. Причем асимптотика этих величин при $t\to 0$ пропорциональна расстоянию $\delta t$, пройденному телом в горизонтальном направлении.

Из соотношений (4.1), (4.2) следует, что для построения асимптотик поправочных функций, которые появляются при $\delta\neq 0$, достаточно знать только решение задачи для нулевого приближения (2.3). Следующее, первое приближение дает более полную информацию о картине течения, но не зависит от величины $\delta(\delta\geqslant 0)$. Причем, если $|\mathbf{X}^{(0)}|=O(r^{-2})$, то $|\mathbf{X}^{(1)}|=O(r^{-3})$ и $|\mathbf{X}^{(2)}|=O(r^{-4})$ при $r\to\infty$. Можно поэтому утверждать, что нулевое приближение верно описывает движение жидкости на больших расстояниях от тела. Однако вблизи точек контакта особенность решения при последовательных приближениях к нему указанным способом накапливается.

Это следует из анализа формул (2.4), (3.3) при $\lambda \to \pm 1$. Для уточнения такой структуры течения в этих зонах необходимо строить дополнительное «внутреннее» разложение.

Непосредственной проверкой устанавливается, что предлагаемый метод анализа исходной задачи (1.2)–(1.7) эквивалентен так называемому методу итераций по нелинейности. Причем нелинейность задачи обусловлена не только нелинейностью соотношений (1.2)–(1.6), но и наличием неизвестных заранее функций $a(t)$, $b(t)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Терентьев А. Г.* Наклонный вход тонкого тела в несжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 5. С. 16–24.
2. *Шорыгин О. П.* Погружение в жидкость тел вращения простейших форм под углом к свободной поверхности // Неустановившиеся течения воды с большими скоростями // Тр. Междунар. симпоз., Л. М.: Наука, 1973. С. 397–403.
3. *Пухначев В. В.* Линейное приближение в задаче о входе затупленного тела в воду // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1979. Вып. 38. С. 143–150.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 574 с.


**Новосибирск**


Поступила в редакцию
15.IV.1987