**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1988**

УДК 532.546

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ОРОШЕНИИ

КОПРИНСКИ С. Ц.

С использованием результатов [1] рассматривается движение подземных вод при фильтрации из оросительного канала. Поверхность грунтового потока обычно имеет бугристую форму, так как на одних участках осуществляется полосообразный полив, на других может происходить испарение или выпадение дождя. Колебания уровня воды в канале считаются известными. Определяется дальнейшее изменение уровня грунтовых вод. Значительный их подъем влечет засоление или заболачивание почвы.

Рассмотрим уравнение Буссинеска (см. [2]) для неустановившегося движения грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью в случае горизонтального водоупора и плоскопараллельного движения

$$\frac{\partial(\sigma h)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(kh\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\varepsilon(x,t) \tag{1}$$

Здесь эффективная пористость грунта σ и коэффициент фильтрации k постоянны, а $\varepsilon(x, t)$ — разность между интенсивностью инфильтрации и эвапотранспирации (транспирации растений и испарения с поверхности почвы).

Линеаризуем уравнение (1) следующим образом. Возьмем тождество

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{1}{2h}\frac{\partial h^2}{\partial t}$$

Пусть h_0 — некоторое среднее значение h. Тогда

$$\frac{\partial h}{\partial t}\approx\frac{1}{2h_0}\frac{\partial h^2}{\partial t}$$

и уравнение (1) записывается в виде

$$\frac{1}{2h_0}\frac{\partial h^2}{\partial t}=\frac{k}{2\sigma}\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{1}{\sigma}\varepsilon(x,t) \tag{2}$$

Если обозначим

$$\frac{h^2}{2h_0}=u(x,t)$$

то вместо (2) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{\sigma}\varepsilon(x,t),\qquad a=\frac{kh_0}{\sigma} \tag{3}$$

где a — коэффициент уровнепроводности [2]. Если найдем $u(x, t)$, тогда для уровня $h(x, t)$ получим соотношение

$$h(x,t)=\sqrt{2h_0u(x,t)} \tag{4}$$

Рассмотрим уравнение

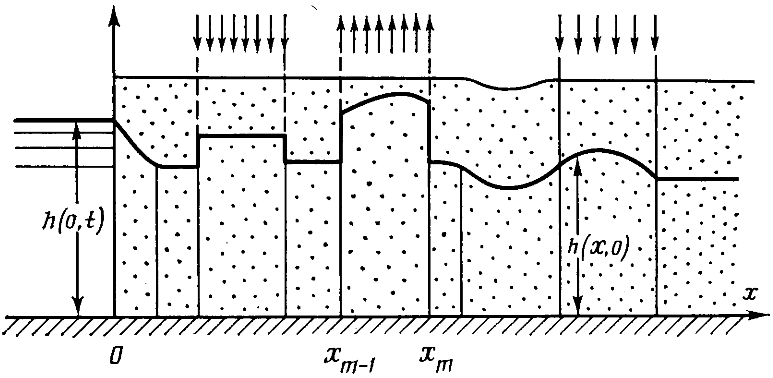
$$a\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{1}{\sigma}\varepsilon(x,t)=\frac{\partial h^2}{\partial t} \qquad (5)$$

с начальным и краевым условиями

$$h(x,0)=f(x), \quad 0\leqslant x<\infty$$

$$kh(0,t)\frac{\partial h(0,t)}{\partial x}=-q(t), \quad 0\leqslant t<\infty$$

где функция $q(t)$ описывает водоотдачу на границе. Так как $^1/_2 h^2/h_0=u$, то



теперь надо решить следующую задачу:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{\sigma}\varepsilon(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (6)$$

$$u(x,0)=\frac{1}{2h_0}f^2(x), \quad 0\leqslant x<\infty$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=-\frac{1}{kh_0}q(t), \quad 0\leqslant t<\infty$$

Рассмотрим случай, когда начальное значение уровня кусочно аппроксимируется параболами (см. фигуру)

$$f(x)=(A_1x^2+B_1x+C_1)\sigma_0(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}[(A_{i+1}-A_i)x^2+(B_{i+1}-B_i)x+C_{i+1}-C_i]\sigma_0(x-x_i), \quad x\geqslant 0 \qquad (7)$$

где существуют пределы A_i, B_i, C_i при $i\to\infty$ или с некоторого номера i эти константы равны нулю, а $\sigma_0(x)$ — функция Хевисайда: $\sigma_0(x)=0$ при $x<0$, $\sigma_0(x)=1$ при $x\geqslant 0$.

Пусть расход жидкости на границе тоже кусочно аппроксимируется параболами

$$q(t)=(a_1+b_1t+c_1t^2)\sigma_0(t)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[a_{n+1}-a_n+(b_{n+1}-b_n)t+(c_{n+1}-c_n)t^2]\sigma_0(t-t_n), \quad t\geqslant 0 \qquad (8)$$

где существуют пределы a_n, b_n, c_n при $n\to\infty$ или с некоторого номера n эти константы равны нулю. Для $\varepsilon(x, t)$ рассмотрим случай, когда $\varepsilon(x, t)=$

$=\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(t)$, причем $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(t)$ также кусочно аппроксимируются параболами

$$\varepsilon_1(x)=(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)\sigma_0(x)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}[(\alpha_{m+1}-\alpha_m)x^2+(\beta_{m+1}-\beta_m)x+\gamma_{m+1}-\gamma_m]\sigma_0(x-x_m),\quad x\geqslant 0 \tag{9}$$

$$\varepsilon_2(t)=(\delta_1+\rho_1t+\tau_1t^2)\sigma_0(t)+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}[\delta_{p+1}-\delta_p+(\rho_{p+1}-\rho_p)t+(\tau_{p+1}-\tau_p)t^2]\sigma_0(t-t_p),\quad t\geqslant 0 \tag{10}$$

где существуют пределы δ_p, ρ_p, τ_p при $p\to\infty$ и пределы α_m, β_m, γ_m при $m\to\infty$ или с некоторых номеров p, m эти константы равны нулю.

Чтобы решить задачу (6), рассмотрим следующие задачи:

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$v(x,0)=\frac{1}{2h_0}f^2(x),\quad 0\leqslant x<\infty;\quad \frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=0,\quad 0\leqslant t<\infty \tag{11}$$

$$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial w}{\partial t} \tag{12}$$

$$w(x,0)=0,\quad 0\leqslant x<\infty;\quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=-\frac{1}{kh_0}q(t),\quad 0\leqslant t<\infty$$

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{\sigma}\varepsilon(x,t)=\frac{\partial z}{\partial t} \tag{13}$$

$$z(x,0)=0,\quad 0\leqslant x<\infty;\quad \frac{\partial z(0,t)}{\partial x}=0,\quad 0\leqslant t<\infty$$

Посредством суперпозиции их решений получим

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)+z(x,t)$$

после чего из (4) найдем $h(x,t)$.

Для решения задач (11)—(13) применим преобразование Лапласа

$$F^*(s)=\int_0^\infty \exp(-st)F(t)\,dt=L\{F(t)\},\qquad F(t)=L^{-1}[F^*(s)]$$

Для задачи (11) после преобразования Лапласа получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a\frac{\partial^2 v^*(x,s)}{\partial x^2}=sv^*(x,s)-v(x,0),\quad \frac{\partial v^*(0,s)}{\partial x}=0$$

Оно имеет общее решение вида

$$v^*(x,s)=D_1\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{a}}\right)+D_2\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{a}}\right)+v_0^*(x,s)$$

где $v_0^*(x,s)$ — некоторое частное решение. Ввиду ограниченности $h(x,t)$

или $v(x, t)$ при $x \to \infty$ выберем $D_2=0$ и тогда

$$v^*(x,s)=D_1 \exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{a}}\right)+v_0^*(x,s)$$

Из начального условия следует

$$D_1=\sqrt{\frac{a}{s}}\frac{\partial v_0^*(0,s)}{\partial x}$$

и потому

$$v^*(x,s)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{s}}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)\frac{\partial v_0^*(0,s)}{\partial x}+v_0^*(x,s)$$

В соответствии с (7) имеем

$$v(x,0)=\frac{1}{2h_0}f^2(x)=\frac{1}{2h_0}\Big\{[A_1^2x^4+2A_1B_1x^3+(B_1^2+2A_1C_1)x^2+$$

$$+2B_1C_1x+C_1^2]\sigma_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}[(A_{i+1}^2-A_i^2)x^4+2(A_{i+1}B_{i+1}-A_iB_i)x^3+$$

$$+(B_{i+1}^2+2A_{i+1}C_{i+1}-B_i^2-2A_iC_i)x^2+2(B_{i+1}C_{i+1}-B_iC_i)x+C_{i+1}^2-C_i^2]\sigma_0(x-x_i)\Big\}$$

Частное решение $v_0^*(x,s)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$a\frac{\partial^2 v^*(x,s)}{\partial x^2}-sv^*(x,s)=-\frac{1}{2h_0}[A_i^2x^4+2A_iB_ix^3+(B_i^2+2A_iC_i)x^2+2A_iB_ix+C_i^2],$$

$$x_{i-1}\leqslant x<x_i \quad (i=1,2,\ldots),\quad x_0=0$$

ищем в виде

$$v_0^*(x,s)=\frac{1}{2h_0}(E_ix^4+F_ix^3+G_ix^2+M_ix+N_i)$$

Методом неопределенных коэффициентов найдем

$$v_0^*(x,s)={}^1/_2h_0^{-1}\{[A_i^2x^4+2A_iB_ix^3+(B_i^2+2A_iC_i)x^2+2B_iC_i+C_i^2]s^{-1}+$$
$$+2a(6A_i^2x^2+6A_iB_ix+B_i^2+2A_iC_i)s^{-2}+24a^2A_i^2s^{-3}\}$$

откуда получаем

$$\frac{\partial v_0^*(0,s)}{\partial x}=\frac{1}{2h_0}\left(2B_1C_1\frac{1}{s}+12aA_1B_1\frac{1}{s^2}\right)$$

Окончательно имеем

$$v^*(x,s)=\frac{\sqrt{a}}{h_0}s^{-3/2}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{a}}\right)(B_1C_1+6aA_1B_1s^{-1})+v_0^*(x,s).$$

В [1] получена формула для оригинала $\Phi_j(t, \varkappa)$ оператора

$$\Phi_j^*(s,\varkappa)=\frac{\exp(-\varkappa\sqrt{s})}{s^{j+1}\sqrt{s}},\quad \varkappa=\frac{x}{\sqrt{a}}\geqq 0,\quad j=0,1,2,\ldots$$

и показано, что

$$\Phi_j(t,\varkappa)=\sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^m t^{j-m}}{m!(j-m)!}E_{m+1}$$

$$E_{m+1}=\frac{2}{2m+1}\left[t^m\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{\varkappa^2}{4t}\right)-\frac{\varkappa^2}{4}E_m\right],\quad m=0,1,2,\ldots$$

$$E_0=\frac{2}{\varkappa}\operatorname{erfc}\left(\frac{\varkappa}{2\sqrt{t}}\right)$$

Поэтому решение $v(x, t)$ уравнения (11) принимает вид

$$v(x,t)=\frac{1}{2h_0}\left\{2B_iC_i\left[2\sqrt{\frac{at}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)-x\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]+\right.$$

$$+12aA_iB_i\left[\frac{1}{3}\left(4t+\frac{x^2}{a}\right)\sqrt{\frac{at}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-x\left(t^2+\frac{x^2}{6a}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]+v_0(x,t)\right\}$$

$$v_0(x,\ t)=12a^2A_i^2t^2+2a(6A_i^2x^2+6A_iB_ix+B_i^2+2A_iC_i)t+(A_ix^2+B_ix+C_i)^2$$

$$x_{i-1}\leqslant x<x_i\quad (i=1,\ 2,\ldots),\quad x_0=0$$

Для задачи (12) после преобразования Лапласа получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a\frac{\partial^2w^*(x,s)}{\partial x^2}=sw^*(x,s)-w(x,0),\qquad \frac{\partial w^*(0,s)}{\partial x}=-\frac{1}{kh_0}q^*(s)$$

Решение соответствующего однородного уравнения с условием ограниченности решения при $x\to\infty$ имеет вид

$$w^*(x,s)=D_1\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{a}}\right),\qquad D_1=\frac{\sqrt{a}}{kh_0}\frac{1}{\sqrt{s}}q^*(s)$$

и, следовательно

$$w^*(x,s)=\frac{1}{kh_0}\sqrt{\frac{a}{s}}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{a}}\right)q^*(s)\tag{14}$$

В соответствии с (8) заранее найдем $q^*(s)$. Из [3], где доказано, что

$$L\{t^j\sigma_0(t-t_0)\}=e^{-t_0s}\sum_{n=0}^{j}\frac{V_j^nt_0^{j-n}}{s^{n+1}}$$

$$V_j^n=j(j-1)\ldots(j-n+1),\qquad V_j^0=1$$

следуют формулы

$$L\{\sigma_0(t)\}=s^{-1},\qquad L\{t\sigma_0(t)\}=s^{-2},\qquad L\{t^2\sigma_0(t)\}=2s^{-3}$$

$$L\{\sigma_0(t-t_n)\}=s^{-1}e^{-t_ns},\qquad L\{t\sigma_0(t-t_n)\}=s^{-1}(t_n+s^{-1})e^{-t_ns}$$

$$L\{t^2\sigma_0(t-t_n)\}=s^{-1}(t_n^2+2t_ns^{-1}+2s^{-2})e^{-t_ns}$$

Имеем

$$q^*(s)=\frac{a_1}{s}+\frac{b_1}{s^2}+\frac{2c_1}{s^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_{n+1}-a_n)\frac{e^{-t_ns}}{s}+(b_{n+1}-b_n)\left(\frac{t_n}{s}+\frac{1}{s^2}\right)e^{-t_ns}+\right.$$

$$\left.+(c_{n+1}-c_n)\left(\frac{t_n^2}{s}+\frac{2t_n}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)e^{-t_ns}\right]=a_1\frac{1}{s}+b_1\frac{1}{s^2}+2c_1\frac{1}{s^3}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[a_{n+1}-a_n+t_n(b_{n+1}-b_n)+t_n^2(c_{n+1}-c_n)]\frac{e^{-t_ns}}{s}+\right.$$

$$\left.+[b_{n+1}-b_n+2t_n(c_{n+1}-c_n)]\frac{e^{-t_ns}}{s^2}+2(c_{n+1}-c_n)\frac{e^{-t_ns}}{s^3}\right\}$$

Для $w^*(x, s)$ из (14) теперь получаем

$$w^*(x,s)=\frac{\sqrt{a}}{kh_0}\left\{a_1+\frac{b_1}{s}+\frac{2c_1}{s^2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_{n+1}-a_n+t_n(b_{n+1}-b_n)+t_n^2(c_{n+1}-c_n)]e^{-t_ns}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}[b_{n+1}-b_n+2t_n(c_{n+1}-c_n)]e_s^{-t_ns}+2\sum_{n=1}^{\infty}(c_{n+1}-c_n)\frac{e^{-t_ns}}{s^2}\right\}s^{-1/2}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)$$

Тогда из доказанной в [1] формулы находим решение

$$w(x,t)=\frac{\sqrt{a}}{kh_0}\left\{\left[a_1\Phi_0\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)+b_1\Phi_1\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)+2c_1\Phi_2\left(t,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right]\sigma_0(t)+\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[a_{n+1}-a_n+t_n(b_{n+1}-b_n)+t_n^2(c_{n+1}-c_n)]\Phi_0\left(t-t_n,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\sigma_0(t-t_n)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n+2t_n(c_{n+1}-c_n)]\Phi_1\left(t-t_n,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\sigma_0(t-t_n)+$$

$$\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}(c_{n+1}-c_n)\Phi_2\left(t-t_n,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\sigma_0(t-t_n)\right\}$$

Для задачи (13)

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{\sigma}\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(t)=\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$z(x,0)=0,\qquad 0\leqslant x<\infty;\qquad \frac{\partial z(0,t)}{\partial x}=0,\qquad 0\leqslant t<\infty$$

после преобразования Лапласа получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a\frac{\partial^2 z^*(x,s)}{\partial x^2}+\frac{1}{\sigma}\varepsilon_1(x)\varepsilon_2^*(s)=sz^*(x,s)-z(x,0),\qquad \frac{\partial z^*(0,s)}{\partial x}=0$$

Решение неоднородного уравнения

$$a\frac{\partial^2 z^*(x,s)}{\partial x^2}-sz^*(x,s)=-\frac{1}{\sigma}\varepsilon_2^*(s)\varepsilon_1(x)\tag{15}$$

при условии ограниченности решения на бесконечности имеет вид

$$z^*(x,s)=D_1\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)+z_0^*(x,s)$$

где $z_0^*(x, s)$ — частное решение, которое ищем в виде

$$z_0^*(x,s)=\frac{1}{\sigma}\varepsilon_2^*(s)\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(x,s)$$

Следовательно, будем иметь

$$z^*(x,s)=D_1\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)+\frac{1}{\sigma}\varepsilon_2^*(s)\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(x,s)$$

$$D_1=\frac{\sqrt{a}}{\sigma}\frac{\varepsilon_2^*(s)}{\sqrt{s}}\frac{\partial\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(0,s)}{\partial x}$$

и решение принимает вид

$$z^*(x,s)=\frac{\sqrt{a}}{\sigma\sqrt{s}}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)\varepsilon_2^*(s)\frac{\partial\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(0,s)}{\partial x}+\frac{1}{\sigma}\varepsilon_2^*(s)\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(x,s)$$

В соответствии с представлением $\varepsilon_1(x)$ частное решение уравнения (15) ищем в виде

$$z_0^*(x,s)=\frac{1}{\sigma}\varepsilon_2^*(s)\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(x,s)$$

$$\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(x,s)=A_mx^2+B_mx+C_m,\quad x_{m-1}\leqslant x<x_m\quad(m=1,2,\ldots),\quad x_0=0$$

Имеем

$$a\sigma^{-1}\varepsilon_2^*(s)2A_m-s\sigma^{-1}\varepsilon_2^*(s)(A_mx^2+B_mx+C_m)=\sigma^{-1}\varepsilon_2^*(s)(\alpha_mx^2+\beta_mx+\gamma_m)$$

$$A_m=\frac{\alpha_m}{s},\qquad B_m=\frac{\beta_m}{s},\qquad C_m=\frac{\gamma_m}{s}+\frac{2a\alpha_m}{s^2}$$

$$\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(x,s)=\frac{1}{s}(\alpha_mx^2+\beta_mx+\gamma_m)+2a\alpha_m\frac{1}{s^2},\qquad\frac{\partial\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(0,s)}{\partial x}=\frac{\beta_m}{s}$$

и решение уравнения (15) принимает вид

$$z^*(x,s)=\frac{1}{\sigma}\left[\sqrt{a}\beta_1s^{-3/2}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)\varepsilon_2^*(s)+\varepsilon_2^*(s)\overset{*}{\varepsilon}_{1(0)}(x,s)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sigma}\left[\sqrt{a}\beta_1\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)\varepsilon_2^*(s)+\frac{\varepsilon_2^*(s)}{s}(\alpha_mx^2+\beta_mx+\gamma_m)+2a\alpha_m\frac{\varepsilon_2^*(s)}{s^2}\right]$$

Для решения $z(x, t)$ задачи (13) получаем

$$z(x,t)=\frac{1}{\sigma}\left\{\sqrt{a}\beta_1L^{-1}\left[s^{-3/2}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)\varepsilon_2^*(s)\right]+\right.$$

$$+L^{-1}\left[\frac{\varepsilon_2^*(s)}{s}\right]\left[(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1)\sigma_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}((\alpha_{m+1}-\alpha_m)x^2+\right.$$

$$\left.+(\beta_{m+1}-\beta_m)x+\gamma_{m+1}-\gamma_m)\sigma_0(x-x_m)\right]+$$

$$\left.+2aL^{-1}\left[\frac{\varepsilon_2^*(s)}{s^2}\right]\left[\alpha_1\sigma_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_{m+1}-\alpha_m)\sigma_0(x-x_m)\right]\right\}$$

Остается найти оригиналы

$$\frac{\varepsilon_2^*(s)}{s}, \quad \frac{\varepsilon_2^*(s)}{s^2}, \quad s^{-3/2}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)\varepsilon_2^*(s)$$

зависящие от функции $\varepsilon_2(t)$. Имеем

$$L^{-1}\left[\frac{\varepsilon_2^*(s)}{s}\right]=\int_0^t \varepsilon_2(\tau)d\tau, \quad L^{-1}\left[\frac{\varepsilon_2^*(s)}{s^2}\right]=$$

$$=\int_0^t\left[\int_0^y \varepsilon_2(y)dy\right]d\tau=\int_0^t (t-\tau)\varepsilon_2(\tau)d\tau$$

Если функция $\varepsilon_2(t)$ кусочно аппроксимирована параболами, то по аналогии с $g^*(s)$ получаем

$$\varepsilon_2^*(s)=\delta_1 s^{-1}+\rho_1 s^{-2}+2\tau_1 s^{-3}+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}[\delta_{p+1}-\delta_p+t_p(\rho_{p+1}-\rho_p)+t_p^2(\tau_{p+1}-\tau_p)]\frac{e^{-t_p s}}{s}+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}[\rho_{p+1}-\rho_p+2t_p(\tau_{p+1}-\tau_p)]\frac{e^{-t_p s}}{s^2}+2\sum_{p=1}^{\infty}(\tau_{p+1}-\tau_p)\frac{e^{-t_p s}}{s^3}.$$

Тогда оригиналы $s^{-1}\varepsilon_2^*(s)$ и $s^{-2}\varepsilon_2^*(s)$ находятся тривиально, а для нахождения

$$L^{-1}\left[s^{-3/2}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right)\varepsilon_2^*(s)\right]$$

надо еще раз обратиться к формулам из [1].

Заметим, что полученные решения непрерывны относительно t и x и имеют производные.

Частный случай $q(t)=0$ можно интерпретировать как симметричную относительно оси y задачу о растекании бугров грунтовых вод.

Метод применим и в случае, когда вместе с хорошо проницаемыми грунтами имеется слабо проницаемый грунт, т. е. когда в правой части уравнения (1) содержится слагаемое вида $-c(h-H)$.

Ряд задач для уравнения (1) — в случае кусочно-постоянного полива, для $h(0, t)$ — линейной функции времени и т. п. решен разными методами другими авторами (см. [2]). Решение задач, подобных приведенным, операционным методом получается в явном виде; оно зависит от констант A_i, $B_i, \ldots, a_n, \ldots, \tau_p$ и позволяет оценивать влияние этих констант на форму движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Koprinsky S. Ts.* Operators of the field of Mikusinski, related with the general heat equation with constant coefficients and polynomial boundary conditions (Bulg.), University Annual // Appl. Mathem. V. 13. Book 3. Sofia, 1977. P. 139–145.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. *Koprinsky S. Ts.* Application of the Laplace transformation to solve the general heat equation with piece-wise polynomial boundary conditions of first, second and third kind (Bulg.) // Annuaire des ecoles tecniques superieures, Mathematique. V. 9. Livre-1-er. Sofia, 1973. P. 113–125.

София
(Болгария)

Поступила в редакцию
21.I.1987