

УДК 532.529.9

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА КОНВЕКТИВНУЮ
УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО
СЛОЯ ЖИДКОСТИ

БУБНОВ Б. М., СЕНАТОРСКИЙ А. О.

Теоретически исследованы критические кривые возникновения конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости, вращающемся с постоянной угловой скоростью, при различных условиях на границе слоя. Показано, что в отличие от кривых Чандрасекара [1], полученных при условии постоянства температуры на границах, кривые для постоянного потока тепла лежат значительно ниже, поэтому конвекция возникает раньше для всех чисел Тейлора. При больших числах Тейлора все кривые устойчивости, как и в [1], выходят на асимптоты $R_c \sim Ta^{3/2}$, где Ta — число Тейлора и R_c — критическое число Рэлея. Аналогичное исследование для невращающейся жидкости проведено в [2].

Рассмотрим плоский слой жидкости, подогреваемый снизу и вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω , в рамках модели Буссинеска при условии малости центробежных сил по сравнению с силой Кориолиса. Невозмущенное состояние в системе отсчета, связанной со слоем, характеризуется отсутствием движений и линейным профилем температуры. Если ось вращения совпадает с направлением градиента температуры и вектором силы тяжести (ось Z), то уравнения для возмущений записываются [1] в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \beta W + k_T \nabla^2 \theta, & \frac{\partial \xi}{\partial t} &= 2\Omega \frac{\partial W}{\partial z} + \nu \nabla^2 \xi \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 W &= g\alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \nu \nabla^4 W - 2\Omega \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ξ и W — z -компоненты завихренности и скорости, β — адиабатический градиент температуры, k_T и ν — коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент термического расширения жидкости.

Используя разложение по нормальным модам

$$\begin{aligned} W &= F(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + p \cdot t] \\ \theta &= \Theta(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + p \cdot t] \\ \xi &= Z(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + p \cdot t] \end{aligned}$$

уравнения (1) приведем к виду

$$\begin{aligned} p\Theta &= \beta F + k_T \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \Theta, & pZ &= 2\Omega \frac{dF}{dz} + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) Z \\ p \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) F &= -g\alpha k^2 \Theta + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) F - 2\Omega \frac{dZ}{dz} \end{aligned} \quad (2)$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -k^2, \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2} - k^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} = p$$

Введем масштаб длины d и положим $a=kd$, $\sigma=pd^2\nu^{-1}$, $Pr=\nu k^{-1}$ — число Прандтля. Тогда после нормировки z на d из (2) получим

$$\begin{aligned} (D^2-a^2)\Theta &= -\left(\frac{\beta d^2}{k_T}\right)F, & (D^2-a^2)Z &= -\left(\frac{2\Omega d}{\nu}\right)DF \\ (D^2-a^2)F - \left(\frac{2\Omega d^3}{\nu}\right)DZ &= \left(\frac{g\alpha d^2}{\nu}\right)a^2\Theta \\ D &= d/dz \end{aligned} \quad (3)$$

При этом последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} (D^2-a^2)F + Ta D^2F &= -Ra^2F \\ Ta &= 4\Omega^2 d^4 \nu^{-2}, \quad R = \alpha g \beta d^4 (k\nu)^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

где Ta и R — числа Тейлора и Рэлея.

Следуя [2], общее решение уравнения (4) ищем в виде

$$F(Z) = \sum_{i=0}^5 c_i f^{(i)}(Z) \quad (5)$$

$$f^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} Z^n \quad (i=0, 1, \dots, 5)$$

$$\begin{aligned} b_n^{(4)} &= \frac{1}{n!} [3a^2(n-2)! b_{n-2}^{(4)} - b_{n-4}^{(4)}(n-4)! (3a^4 + Ta) + \\ &+ a^2 b_{n-6}^{(4)}(n-6)! (a^4 - R)] \quad (n > 5) \end{aligned}$$

$$b_n^{(4)} = \delta_{ni} \quad (0 \leq n \leq 5), \quad \delta_{ni} = 1 \quad (n=i), \quad \delta_{ni} = 0 \quad (n \neq i)$$

Константы c_0, c_1, \dots, c_5 определяются из граничных условий. Так, из условий для скорости на твердой границе следует

$$F = \frac{dF}{dZ} = 0, \quad c_0 = c_1 = 0, \quad F(Z) = \sum_{i=2}^5 c_i f^{(i)}(Z)$$

На свободной границе имеем $F = d^2F/dZ^2 = 0$. Тепловые граничные условия задаются следующим образом: на нижней твердой границе ($z=0$) при заданной температуре и заданном потоке имеем

$$\frac{d^4F}{dZ^4} - 2a^2 \frac{d^2F}{dZ^2} = 0, \quad \frac{d^5F}{dZ^5} - 2a^2 \frac{d^3F}{dZ^3} = 0$$

соответственно на верхней границе ($z=1$) для этих условий получаем

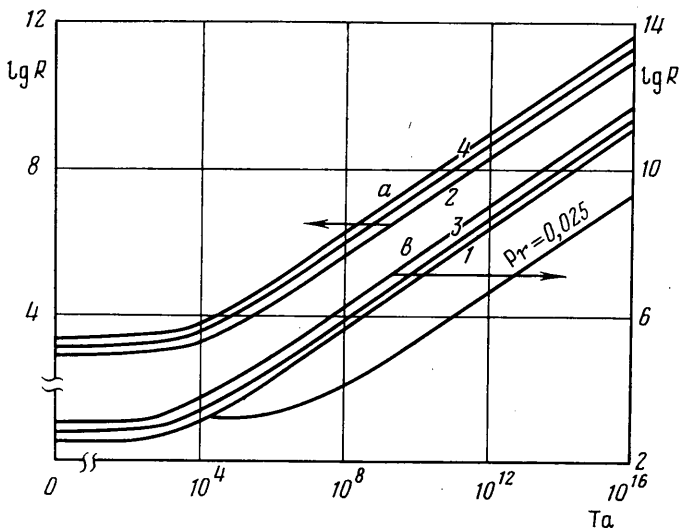
$$\begin{aligned} \frac{d^5F}{dZ^5} - 2a^2 \frac{d^3F}{dZ^3} + a^4 \frac{dF}{dZ} &= \frac{hd}{k} \frac{d^4F}{dZ^4} \\ \frac{d^5F}{dZ^5} - 2a^2 \frac{d^3F}{dZ^3} &= \frac{hd}{k} \left(\frac{d^4F}{dZ^4} - 2a \frac{d^2F}{dZ^2} \right) \\ -k \frac{\partial T}{\partial Z} &= T - T_{\infty}, \quad Bi = \frac{hd}{k} \end{aligned}$$

Здесь h — коэффициент теплопередачи, T_∞ — температура окружающей среды. Число Био Bi характеризует вид теплопередачи: при $Bi=0$ имеем фиксированный поток тепла на границе, при $Bi \rightarrow \infty$ фиксирована температура.

Например, для случая постоянного потока на нижней твердой и верхней свободной поверхностях система уравнений относительно c_1, \dots, c_5 имеет вид

$$\begin{aligned}
 & -12a^2c_3 + 120c_5 = 0 \\
 & [c_2 f^{(2)} + c_3 f^{(3)} + c_4 f^{(4)} + c_5 f^{(5)}]_{z=1} = 0 \\
 & \left[c_2 \frac{d^2 f^{(2)}}{dz^2} + c_3 \frac{d^2 f^{(3)}}{dz^2} + c_4 \frac{d^2 f^{(4)}}{dz^2} + c_5 \frac{d^2 f^{(5)}}{dz^2} \right]_{z=1} = 0 \\
 & \sum_{i=2}^5 c_i \left[\frac{d^5 f^{(i)}}{dz^5} - 2a^2 \frac{d^3 f^{(i)}}{dz^3} + a^4 \frac{df^{(i)}}{dz} - \frac{hd}{k} \frac{d^4 f^{(i)}}{dz^4} \right]_{z=1} = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

Решение системы (6) возможно только в случае равенства нулю детерминанта. Значение детерминанта зависит от чисел R , Ta , Bi и a . Расчет осуществляется следующим образом. Сначала задаются числа



Фиг. 1

Bi и Ta и для всех a ищется значение R , при котором детерминант равен нулю. Минимальное значение $R=R_c$ соответствует появлению конвективных движений (ему соответствует a_c). Меняя числа Bi и Ta , можно исследовать зависимости R_c от Bi и Ta .

Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1055 при условиях, позволяющих гарантировать значение R_c с относительной точностью до 10^{-3} . Число n выбиралось так, чтобы при переходе к большим n в пределах точности значение R_c не менялось (для $n=100$ точность вычисления R_c соблюдается во всем рассматриваемом диапазоне изменений Ta).

Во всех расчетах считалось, что на верхней границе задан постоянный поток тепла, а нижняя граница твердая. Рассматривались четыре варианта задачи: 1) постоянный поток на нижней границе, верхняя граница свободная; 2) постоянный поток на нижней границе, верхняя граница твердая; 3) постоянная температура на нижней границе, верхняя граница свободная; 4) постоянная температура на нижней границе, верхняя граница твердая.

Таблица 1

Ta	1		2		3		4	
	R _C	a	R _C	a	R _C	a	R _C	a
0	3,20·10 ²	0	7,20·10 ²	0	6,69·10 ²	2,10	1,29·10 ³	2,55
10	3,22·10 ²	1,05	7,23·10 ²	1,10	6,74·10 ²	2,15	1,30·10 ³	3,10
10 ²	3,89·10 ²	1,10	7,51·10 ²	1,15	8,12·10 ²	2,25	1,33·10 ³	3,65
10 ⁴	1,44·10 ³	4,75	1,98·10 ³	6,20	3,02·10 ³	6,10	3,57·10 ³	7,55
10 ⁶	2,33·10 ⁴	12,43	3,06·10 ⁴	13,15	4,83·10 ⁴	14,96	5,51·10 ⁴	15,24
10 ⁸	5,00·10 ⁶	26,56	6,45·10 ⁶	28,34	1,04·10 ⁶	31,98	1,16·10 ⁶	32,83
10 ¹⁰	1,08·10 ⁷	57,45	1,38·10 ⁷	61,28	2,27·10 ⁷	69,05	2,49·10 ⁷	71,60
10 ¹²	2,38·10 ⁸	124,26	2,29·10 ⁸	131,60	4,98·10 ⁸	149,44	5,39·10 ⁸	154,16
10 ¹⁵	2,38·10 ¹⁰	393,1	2,99·10 ¹⁰	416,1	4,99·10 ¹⁰	472,6	5,39·10 ¹⁰	81,9
10 ²⁰	5,14·10 ¹³	2678	6,45·10 ¹³	2834	1,07·10 ¹⁴	3220,7	1,16·10 ¹⁴	3283

Таблица 2

Ta	1		2		3		4	
	k _R	k _a	k _R	k _a	k _R	k _a	k _R	k _a
10 ¹²	2,384	1,243	2,999	1,316	4,987	1,494	5,399	1,524
10 ¹⁵	2,388	1,243	2,999	1,316	4,991	1,495	5,394	1,524
10 ²⁰	2,389	1,243	2,994	1,315	4,992	1,495	5,391	1,524

На фиг. 1 изображены зависимости R_C и Ta в осях (lg R, lg Ta). Цифрами обозначен номер соответствующего варианта граничных условий. Кривая *e* взята из [1] для твердой и свободной границ при постоянной температуре, а кривая *a* — для двух твердых границ.

Отметим основные особенности полученных кривых. При одинаковых динамических условиях на границах асимптоты кривых смещаются параллельно друг другу, что видно из значений коэффициента табл. 1, т. е. переход от R_C при одних и тех же динамических условиях к другим термическим условиям происходит при больших Ta с помощью умножения на коэффициент, который не зависит от числа Ta. Для свободной поверхности R_{Cf}=2,09 R_{Cт}. Для твердой R_{Cf}=1,80 R_{Cт}.

Таким образом, при заданном числе Ta минимальное R_C соответствует постоянному потоку и свободной верхней границе, максимальное — постоянной температуре и твердой верхней границе. Если термические условия постоянны, а меняются динамические условия на верхней границе, то критические кривые не параллельны друг другу. Однако в отличие от аналогичных кривых Чандрасекара (кривые *a* и *e* пересекаются в точке Ta≈3·10³) в данном случае они не пересекаются.

Как и в [1], все критические кривые при больших значениях числа Ta имеют асимптотику R_C=k_RTa^{2/3} и a=k_aTa^{1/6} (a — характерный масштаб движения после возникновения конвекции (см. табл. 2, в которой представлены значения k_R и k_a для различных граничных условий)). Для двух свободных границ при постоянной температуре в [1] получены аналитические значения

$$k_a = (\pi^2/2)^{1/6} \approx 1,305, \quad k_R = 3(\pi^2/2)^{2/3} \approx 8,7 \quad (7)$$

Согласно данным в табл. 2, характерный масштаб конвекции *a* слабо зависит от граничных условий: 1,243 ≤ a ≤ 1,524. Расстояние между вихрями *d*, которые образуются в системе после начала движения, и число вих-

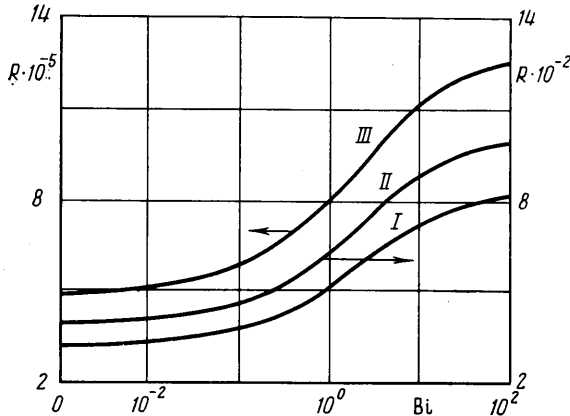
рей N определяются по формулам [3]

$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt[3]{3}}{4\pi} a = \frac{\sqrt[3]{3}}{4\pi} k_a \text{Ta}'^{1/6}$$

$$N = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} d^{-2} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{32\pi^2 k_a} \text{Ta}'^{1/6} h^{-2}$$

где h — глубина жидкости.

Проводилось сравнение экспериментальных данных [3], полученных при свободной верхней поверхности и постоянном потоке на обеих границах, с теоретическими данными для двух свободных границ при постоянной температуре, в предположении, что число вихрей зависит слабо от



Фиг. 2

вида граничных условий. Согласно табл. 2, имеем

$$N/N_1 = k_{a1}/k_a = (1,243/1,305)^2 = 0,91$$

где индекс 1 соответствует варианту I граничных условий, а N находится по формуле (7).

Различия значений R_c существенны. Так, k_R меняется в зависимости от вида граничных условий от 2,39 до 8,7. Максимальное значение R_c соответствует (7) и отличается от варианта I в 3,6 раза.

На фиг. 2 и в табл. 3 представлены зависимости R_c от Bi для трех различных значений числа Ta , сходные с полученными в [2] при $Bi=0$: I—III — $Ta=0,10^2,10^8$. Видно, что сохраняется качественная картина зависимости R_c от Bi , однако с увеличением Ta расстояние между кривыми возрастает.

Исследование колебательной моды неустойчивости ($\sigma \neq 0$) проводилось аналогично. Как и в [1], установлено существование критических чисел Прандтля Pr^* ; при $Pr < Pr^*$ колебательная мода неустойчивости становится более опасной. Для различных граничных условий были получены следующие числа Прандтля (индексы соответствуют вариантам граничных условий): $Pr_1^* = 0,343$, $Pr_2^* = 0,252$, $Pr_3^* = 0,365$, $Pr_4^* = 0,286$.

Критические кривые для колебательной моды претерпевают те же изменения, что и кривые для монотонной моды. На фиг. 1 построена зависимость R_c от Ta при $Pr=0,025$ для варианта 3, наиболее часто реализуемого в экспериментах. Значения R_c , a и σ в зависимости от Ta приведены в табл. 4. При больших Ta критическая кривая выходит на асимптоту $R_c^* \approx 0,125 Ta^{3/8}$. Асимптоты критических кривых для различных значений Pr получаются, как и в случае монотонной неустойчивости, параллельным

Таблица 3

Bi	Ta=10 ²		10 ³		0	
	R _C ·10 ⁻²	a	R _C ·10 ⁻³	a	R _C ·10 ⁻²	a
0	3,89	1,10	4,980	26,56	3,200	0
0,01	4,12	1,64	5,274	27,10	3,389	0,58
0,03	4,29	1,82	5,49	27,34	3,53	0,76
0,1	4,64	2,05	5,93	27,68	3,81	1,015
0,3	5,20	2,38	6,66	27,95	4,283	1,30
1,0	6,24	3,12	7,99	28,48	5,13	1,64
3,0	7,53	3,25	9,64	28,66	6,19	1,92
10	8,81	3,30	11,2	28,72	7,25	2,11
30	9,48	3,32	12,1	28,74	7,80	2,18
100	9,78	3,34	12,5	28,75	8,05	2,20

Таблица 4

Ta	R	a	σ	R _C ^o /R _C ^c
6,98·10 ³	3,32·10 ³	3,16	3,84·10 ²	1
10 ⁶	4,96·10 ³	3,87	4,27·10 ²	9,738
10 ⁸	2,62·10 ⁴	5,79	2,09·10 ³	39,863
10 ¹⁰	5,70·10 ⁵	12,46	1,07·10 ⁴	39,867
10 ¹²	1,25·10 ⁷	26,83	4,95·10 ⁴	39,864
10 ¹⁵	1,25·10 ⁹	71,74	4,95·10 ⁵	39,896
10 ²⁰	2,69·10 ¹²	578,68	2,30·10 ⁷	39,910

сдвигом. Угол наклона асимптот определяется отношением $s=R_c^o/R_c^c$ при Ta=10¹⁵:

Pr	0,01	0,025	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
s	41,65	38,89	36,97	31,07	25,22	19,36	11,93	6,54

Таким образом, для плоского вращающегося слоя жидкости, разогретого снизу, различие граничных условий приводит к существенным различиям кривых устойчивости, что необходимо учитывать при сравнении экспериментальных данных с теорией.

Авторы благодарят Г. С. Голицына за предложенную тему и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon press. 1961. 652 p.
2. Sparrow E. M., Goldstein R. J., Jonsson V. K. Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. Pt 4. P. 513-528.
3. Boubnov B. M., Golitsyn G. S. Experimental study of convective structures in rotating fluids // J. Fluid Mech. 1986. V. 167. P. 503-531.

Москва

Поступила в редакцию
12.XII.1986