

УДК 532.526:537.84

О СТРУКТУРЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПЛАЗМЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СТОЛБА ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА

ВОРОНОВ А. Я.

Система магнитогидродинамических уравнений полностью ионизованной плазмы относится к типу сингулярно возмущенных систем [1, 2]. Это накладывает определенные ограничения на выбор подхода к решению задач физики плазмы. В частности, при анализе этих уравнений необходимо обращаться к методам теории сингулярных возмущений. Поскольку такими же свойствами обладает и система дифференциальных уравнений диффузионного типа, описывающая поведение низкотемпературной плазмы [3], то все сказанное выше справедливо и для нее. Цель настоящей работы — на примере решения краевой задачи, имеющей не только теоретический, но и практический интерес, показать, что, учитывая эти свойства уравнений и используя для построения их приближенного решения асимптотические методы теории сингулярных возмущений, можно получить дополнительные физические результаты или уточнить известные.

Остановимся на математической модели бесконечно длинного однородного положительного столба тлеющего разряда цилиндрической формы радиуса R , стационарное состояние которого поддерживается постоянным током, проходящим вдоль его оси. Введем цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z) с осью z , направленной вдоль оси разряда, и выпишем модель в безразмерных величинах

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dN_e}{dx} \right) + \nu \frac{d}{dx} (xN_e \varepsilon) + x\mu_e N_e = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dN_p}{dx} \right) - \frac{d}{dx} (xN_p \varepsilon) + x\mu_p N_e = 0$$

$$h^2 \frac{\nu}{x} \frac{d}{dx} (x\varepsilon) = N_p - N_e$$

$$N_e = 1, \quad \frac{dN_p}{dx} = 0, \quad \varepsilon = 0 \quad (x=0) \quad (2)$$

$$-\frac{dN_e}{dx} - \nu N_e \varepsilon = q_e(N, h), \quad -\frac{dN_p}{dx} + N_p \varepsilon = q_p(N, h), \quad (x=1)$$

$$0 \leq x = \frac{r}{R} \leq 1, \quad \frac{4\pi e^2 R^2}{k_0 T_e} c_a(x) = \psi_a(x) = AN_a(x)$$

$$\beta \frac{R^2}{D_a} = \mu_a, \quad R \frac{k_p}{D_p} E_r(x) = \varepsilon(x)$$

$$\frac{D_p}{D_e} = \gamma, \quad \frac{k_p}{k_e} = \sigma, \quad \frac{T}{T_e} = \nu, \quad \mu_e = \gamma \mu_p \quad (a=e, p)$$

$$h^2 = A^{-1} = \frac{r_d^2}{R^2}, \quad r_d = \sqrt{\frac{k_0 T_e}{4\pi e^2 c_e(0)}}$$

Здесь r_d — радиус Дебая для электронов плазмы на оси разряда; c_e, c_p — соответственно плотности свободных электронов и однозарядных положительных ионов, D_a и k_a — их коэффициенты свободной диффузии и подвижности, E_r — радиальная составляющая напряженности электрического поля, β — коэффициент ионизации. Коэффициенты D_a, k_a, β , так же как и температуры электронов T_e и нейтральной газовой среды T , считаются постоянными по всему объему, заполненному плазмой. Уравнения системы (1) записаны в предположении, что конвективное движение и магнитное поле отсутствуют. В них учтены как линейные элементарные процессы (свободная диффузия заряженных частиц плазмы и ионизация прямым электронным ударом), так и нелинейный эффект, обусловленный кулоновским взаимодействием между заряженными компонентами плазмы. Некоторые свойства этих уравнений и, в частности, область их применения описаны в [4]. Объемной электрон-ионной рекомбинацией в уравнениях системы (1) пренебрегается.

В дополнительных условиях (2) величины q_a определяют скачок плотности тока заряженных частиц плазмы сорта a в точках внутренней поверхности стенки трубки. Их значения должны быть заданы. Вообще говоря, эти величины должны зависеть от параметров $N_a(1, h)$, $\varepsilon(1, h)$, h и качества обработки внутренней поверхности стенки трубки, а также от того, из какого материала сделана сама трубка. В настоящее время нет достоверных данных относительно значений этих величин.

Неизвестными в задаче (1), (2) будем считать функции $N_a(x, h)$, $\varepsilon(x, h)$ и параметры $\mu_a, a=e, p$.

В уравнениях задачи (1), (2) имеется малый параметр h перед старшей производной в третьем уравнении (в активной газоразрядной плазме $h \leq 10^{-2}$). Следовательно, для построения приближенного решения задачи (1), (2) можно воспользоваться асимптотическими методами, т. е. искать ее решение в виде разложения по положительным степеням параметра h . Тогда дополнительные условия (2) в точке $x=1$ могут быть заменены эквивалентными им условиями вида [5, § 13]

$$N_a(1, h) = b_a(h) = \sum_{s=0}^{\infty} h^s b_s^a = b_0^a + h b_1^a + \dots \quad (a=e, p)$$

где b_s^a определяются при условии, что зависимости $q_a(N(1, h), h)$ известны.

Принтегрируем теперь два первых уравнения системы (1) от 0 до 1. Затем, следуя рекомендациям [6, гл. 3, § 2], продифференцируем третье уравнение по x и введем новые неизвестные функции

$$V(x, h) = h\varepsilon(x, h)$$

$$Y(x, h) = -\frac{h^2}{x} \varepsilon(x, h) + \frac{1}{v} [N_p(x, h) - N_e(x, h)]$$

Тогда система (1) может быть заменена следующей эквивалентной системой интегродифференциальных уравнений:

$$h \frac{dN_a}{dx} = G_a N_a V - h \frac{\mu_a}{x} \int_0^{\infty} x N_e dx \quad (a=e, p) \quad (3)$$

$$G_e = -v, \quad G_p = 1, \quad N_a = b_a(h) \quad (x=1)$$

$$h \frac{dV}{dx} = Y, \quad V=0(x=0)$$

$$h \frac{dY}{dx} = \frac{V}{\nu} (N_p + \nu N_e) + \frac{h}{\nu x} \left[N_p - N_e - 2\nu Y - (\mu_p - \mu_e) \int_0^x x N_e dx \right]$$

$$Y = \frac{1}{\nu} (N_p - N_e) \quad (x=0)$$

Исследования системы (3) показывают, что она относится к разряду систем сингулярно возмущенных уравнений условно устойчивого типа. Причем здесь имеет место критический случай с пограничными слоями на обоих концах сегмента $[0, 1]$ (см. [6, гл. 3]).

Обозначим через W совокупность функций N_e, N_p, V, Y и будем строить асимптотические разложения решения задачи (3) в виде

$$W(x, h) = w(x, h) + \Pi w(x_1, h) + Qw(x_2, h) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} h^s [w_s(x) + \Pi_s w(x_1) + Q_s w(x_2)]$$

(4)

$$\mu_a = \sum_{s=0}^{\infty} h^s \mu_s^a \quad (a=e, p); \quad x_1 = \frac{x}{h}, \quad x_2 = \frac{x-1}{h}$$

где $\Pi w(x_1, h)$ и $Qw(x_2, h)$ — пограничные ряды соответственно на левом и правом концах сегмента $[0, 1]$.

Подставляя (4) в (3) и используя технику работы с погранфункциями, описанную в [5], последовательно находим $w_s(x)$, $\Pi_s w(x_1)$ и $Q_s w(x_2)$ ($s=0, 1, 2, \dots$). Так, например, для определения $w_0(x)$ получаем систему уравнений, вырожденную по отношению к системе (3), с дополнительными условиями

$$G_a n_0^a v_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \frac{v_0}{\nu} (n_0^e + \nu n_0^p) = 0$$

$$n_0^a = b_0^a \quad (x=1, a=e, p) \quad (5)$$

$$v_0 = 0, \quad y_0 = \frac{1}{\nu} (n_0^p - n_0^e) \quad (x=0)$$

Решение задачи (5): $v_0(x) \equiv 0$, $y_0(x) \equiv 0$, $n_0^e(x) \equiv n_0^p(x) = \alpha_0(x)$, где $\alpha_0(x)$ — произвольная функция, которая должна быть определена на следующем шаге.

Система уравнений для определения $w_1(x)$ имеет вид

$$\frac{d\alpha_0}{dx} = -\nu v_1 \alpha_0 - \frac{\mu_0^e}{x} \int_0^x x \alpha_0(x) dx, \quad v_1 = 0 \quad (x=0)$$

(6)

$$\frac{d\alpha_0}{dx} = v_1 \alpha_0 - \frac{\mu_0^p}{x} \int_0^x x \alpha_0(x) dx, \quad \mu_0^e = \gamma \mu_0^p$$

$$0 = y_1, \quad y_1 = \frac{1}{\nu} (n_1^p - n_1^e) \quad (x=0)$$

$$0 = \frac{v_1}{\nu} (1 + \nu) \alpha_0 - \frac{\mu_0^p - \mu_0^e}{x\nu} \int_0^x x \alpha_0(x) dx$$

Из (6) следует

$$y_1(x) \equiv 0, \quad n_1^p(0) = n_1^e(0)$$

$$v_1(x) = \mu_0^p \frac{1-\gamma}{1+\nu} \frac{1}{x\alpha_0(x)} \int_0^x x\alpha_0(x) dx$$

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\alpha_0}{dx} \right) + \nu \mu_0^p \frac{1+\sigma}{1+\nu} x\alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 = 1 \quad (x=0)$$

Встает вопрос: а чему должно быть равно $\alpha_0(x)$ при $x=1$? Ведь может быть так, что $b_0^e \neq b_0^p$. Это характерно для вырожденных уравнений сингулярно возмущенных систем. Потребуем, чтобы $\alpha_0 = b_0$ при $x=1$, где b_0 — новый параметр, подлежащий определению.

Введем новые неизвестные: функцию $f(x) = \alpha_0(x) - b_0$ и параметр $\lambda = \nu \mu_0^p (1+\sigma) / (1+\nu)$. Предполагая, что $b_0 \ll 1$, будем искать их в виде

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_0^s f_s(x), \quad \lambda = \sum_{s=0}^{\infty} b_0^s \lambda_s$$

Подставляя решение предполагаемого вида в краевую задачу с неизвестными $f(x)$ и λ , производя формальное перемножение рядов и применяя метод неопределенных коэффициентов, получим краевые задачи для $f_s(x)$ и λ_s последовательно для $s=0, 1, 2, \dots$. Решая их, находим

$$f_s(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(s)} J_0(\mu_j x), \quad f_0(x) = J_0(\mu_1 x), \quad \lambda_0 = \mu_1^2 \quad (7)$$

$$a_k^{(s)} = \frac{1}{\mu_k^2 - \mu_1^2} \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i a_k^{(s-i)} + \frac{2\lambda_{s-1}}{\mu_k J_1(\mu_k) (\mu_k^2 - \mu_1^2)}$$

$$\lambda_s = - \sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i a_1^{(s-i)} - \frac{2\lambda_{s-1}}{\mu_1 J_1(\mu_1)} \quad (k=2, 3, \dots, \quad s=1, 2, 3, \dots)$$

$$a_1^{(1)} = - \left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} a_j^{(1)} \right), \quad a_1^{(s)} = - \sum_{j=2}^{\infty} a_j^{(s)} \quad (s=2, 3, \dots)$$

где μ_k — k -й положительный корень функции Бесселя $J_0(y)$.

Поскольку $a_k^{(1)} = O(\mu_k^{-3/2})$ при $k \rightarrow \infty$, то ряды Фурье — Бесселя (7) для всех $s=1, 2, \dots$ равномерно сходятся на сегменте $[0, 1]$ (см. [7]). Отметим, что в некоторых случаях вместо (7) удобнее пользоваться решением вида $\alpha_0(x) = J_0(\sqrt{\lambda}x)$, а параметр λ находить из условия $J_0(\sqrt{\lambda}) = b_0$. Не выписывая полностью систему уравнений для определения $w_2(x)$, отметим, что, решая ее, легко находим

$$n_1^e(x) = n_1^p(x) \equiv 0, \quad v_2(x) \equiv 0$$

$$\gamma \mu_1^p = \mu_1^e = 0, \quad y_2(x) = \frac{dv_1}{dx}$$

Таким образом, отличные от нуля главные члены регулярных рядов для $w(x)$ найдены.

На этом обычно и заканчивают решение поставленной задачи. Как легко видеть, при $b_0 = 0$ полученное здесь решение совпадает с известным

результатом теории амбиполярной диффузии (см., например, [8]). Однако остаются еще не определенными члены пограничных рядов. Их определяют так, чтобы были удовлетворены все заданные граничные условия.

Поскольку главные члены регулярных рядов удовлетворяют всем дополнительным условиям в точке $x=0$, то главные члены пограничных рядов для $\Pi w(x_1, h)$ будут равны нулю, т. е. $\Pi_0 w(x_1) = 0$, а членами $\Pi_s w(x_1)$ для $s=1, 2, 3, \dots$ интересоваться не будем.

Составим систему для определения $Q_0 w(x_2)$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_0 n_a}{dx_2} &= G_a (b_0 + Q_0 n_a) Q_0 v \quad (a=e, p) & (8) \\ Q_0 n_a &= b_0^a - b_0 \quad (x_2=0) \\ \frac{dQ_0 v}{dx_2} &= Q_0 y, \quad Q_0 y = \frac{1}{v} (b_0^p - b_0^e) \quad (x_2=0) \\ \frac{dQ_0 y}{dx_2} &= \frac{1}{v} (b_0 + Q_0 n_p) Q_0 v + (b_0 + Q_0 n_e) Q_0 v \\ Q_0 v &= V_0 \quad (x_2=0) \\ Q_0 w(-\infty) &= 0 & (9) \end{aligned}$$

Интегрируя (8), находим

$$\begin{aligned} v Q_0 y &= Q_0 n_p - Q_0 n_e, \quad Q_0 n_e + v Q_0 n_p = \frac{1}{2} v^2 Q_0^2 v \\ (b_0 + Q_0 n_e) (b_0 + Q_0 n_p)^v &= C & (10) \end{aligned}$$

Пользуясь равенствами (10), устанавливаем значения неизвестных констант

$$V_0 = \pm \frac{1}{v} \sqrt{2[b_0^e + v b_0^p - (1+v)b_0]}, \quad C = b_0^{1+v} = b_0^e (b_0^p)^v \quad (11)$$

Так как, по предположению, параметры b_0^e , b_0^p и v заданы, то равенство (11) может быть использовано для определения b_0 . Из системы уравнений (8) и соотношений (10) следует, что функции $Q_0 n_e(x_2)$ и $Q_0 n_p(x_2)$ на сегменте $[0, 1]$ имеют разные знаки. Причем, если $b_0^e \geq b_0^p$, то $Q_0 n_e(x_2) \geq 0$, а $Q_0 v(x_2) \leq 0$. Если же $b_0^e \leq b_0^p$, то $Q_0 n_e(x_2) \leq 0$, а $Q_0 v(x_2) \geq 0$ на $[0, 1]$.

Далее, пользуясь (10), находим, что

$$b_0 + Q_0 n_e = C (b_0 + Q_0 n_p)^{-v} = b_0 \left[1 - v \frac{Q_0 n_p}{b_0} + \frac{v(v+1)}{2} \left(\frac{Q_0 n_p}{b_0} \right)^2 - \dots \right] \quad (12)$$

Если в разложении (12) оставить только три слагаемых и воспользоваться другими соотношениями (10), то можно выразить $Q_0 n_p(x_2)$ только через $Q_0 v(x_2)$. В этом случае третье уравнение системы (8), определяющее $Q_0 v$, переходит в уравнение Риккати

$$\frac{dQ_0 v}{dx_2} - k^\circ Q_0 v + \frac{v}{2} Q_0^2 v = 0, \quad k^\circ = \sqrt{\frac{(1+v)b_0}{v}} \quad (13)$$

Решение уравнения (13), удовлетворяющее условию (9), имеет вид

$$\begin{aligned} Q_0 v(x_2) &= \frac{2k^\circ}{v} \frac{C_0 \exp(k^\circ x_2)}{C_0 \exp(k^\circ x_2) - v/2k^\circ} & (14) \\ C_0 &= \frac{v}{2k^\circ} \frac{V_0}{V_0 - 2k^\circ/v} \end{aligned}$$

Таким образом, все главные члены погранрядов найдены. Остаются неизвестными только константы b_0^e и b_0^p . Как уже отмечалось выше, их можно было бы вычислить, если бы были известны величины $q_a(N(1, h), h)$. По известным b_0^a , пользуясь соотношением (11), можно было бы определить и b_0 . Поскольку таким способом вычислить b_0 пока нет возможности, оценим его значение для одного частного случая. Следует отметить,

ν	$\eta=1,0$			2,0			2,5		
	b_0	b_0^e	b_0^p	b_0	b_0^e	b_0^p	b_0	b_0^e	b_0^p
0,01	0,094	0,095	0,035	0,065	0,066	0,009	0,058	0,059	0,005
0,02	0,075	0,076	0,028	0,052	0,054	0,007	0,046	0,048	0,004
0,03	0,066	0,068	0,024	0,045	0,048	0,006	0,040	0,043	0,003

что интерес к этому параметру вызван тем, что значение b_0 определяло бы вид решения задачи (1), (2) в предельном случае $h \rightarrow 0$, если бы положительный столб тлеющего разряда мог существовать в диффузном состоянии при $h=0$ (см. [9]).

Рассмотрим случай, когда цилиндрическая трубка изготовлена из идеального диэлектрика. Тогда, очевидно, можно говорить о том, что

$$\varepsilon(1, h) \approx \varepsilon_0(1) + \frac{1}{h} Q_{-1} \varepsilon(0) = 0$$

(случай полной экранизации). Отсюда находим

$$V_0 = -h\sqrt{\lambda} J_1(\sqrt{\lambda}) / \nu b_0 \quad (15)$$

Из (15) следует, что $V_0 < 0$. Значит, в рассматриваемом случае $b_0^e > b_0 > b_0^p$. Далее, если через $\varphi(x, h)$ обозначить безразмерный потенциал самосогласованного поля плазмы и положить $\varphi(1, h) = 0$, то

$$\varphi(0, h) = \varphi_0 = -\frac{\ln b_0}{\nu} + \frac{V_0}{k^0} \quad (16)$$

$$b_0 = \exp \left[- \left(\nu \varphi_0 + h \sqrt{\frac{\nu \lambda}{1 + \nu} \frac{J_1(\sqrt{\lambda})}{b_0^{3/2}}} \right) \right]$$

При известных значениях параметров h , ν и φ_0 уравнение (16) дает возможность вычислить b_0 . В [10] приведено экспериментально измеренное значение пристеночного скачка потенциала (≈ 2 В) для плазмы послесвечения. Отметив, что в активной газоразрядной плазме он будет не меньше и положив для нее $T=300$ К, $T_e=10^4$ К, $h=2 \cdot 10^{-3}$, $\nu \varphi_0=2,33$, из (16) найдем $b_0 \approx 9,35 \cdot 10^{-2}$. Если положить теперь $b_0^e = b_0(1 + \xi)$ и считать $\xi = \eta \nu \ll 1$, то из соотношения (11) следует, что $b_0^p = b_0 \exp(-\eta)$. Зная b_0 , вначале находим $V_0 \approx -0,88$; а затем $\eta \approx 1,38$; $b_0^e \approx 9,74 \cdot 10^{-2}$ и $b_0^p \approx 2,35 \cdot 10^{-2}$. С точностью до третьего десятичного знака в таблице еще приведены значения тройки чисел b_0 , b_0^e и b_0^p , удовлетворяющих соотношению (11) при различных значениях параметра ν и $h=2 \cdot 10^{-3}$.

Найдя $Q_0 w(x_2)$, можно составить систему уравнений, определяющих $Q_1 w(x_2)$. Решение этой системы показывает, что все члены $Q_1 w$ по абсолютной величине значительно уступают главным членам пограничных рядов и совпадают с ними по знаку на всем сегменте $[0, 1]$.

На фигуре построены графики функций F_i , $i=1, 2, 3$ (кривые 1-3) при $h=2 \cdot 10^{-3}$, $\nu=0,04$; $b_0=0,04$; $\eta=2,1$.

$$F_1(x) = n_0^p(x) + Q_0 n_p(x_2)$$

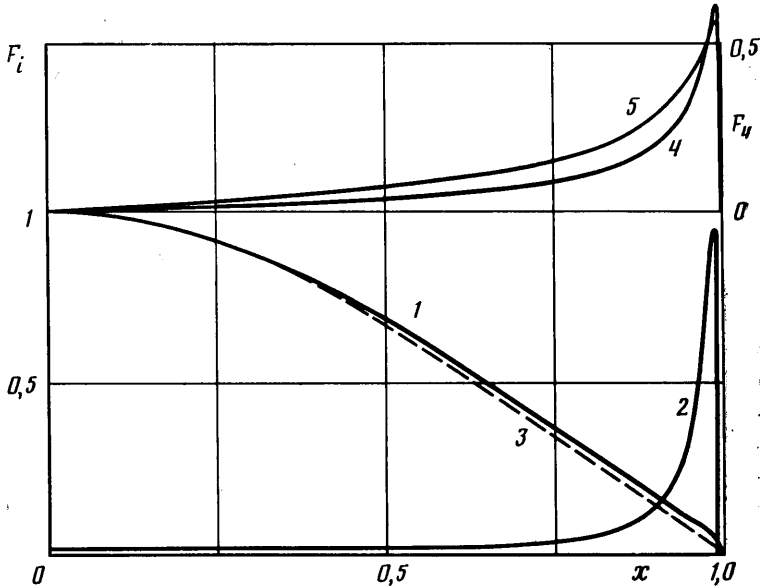
$$F_2(x) = 5 \cdot 10^2 \rho(x) = 5 \cdot 10^2 [N_p(x) - N_e(x)] \approx$$

$$\approx 5 \cdot 10^2 \left[\nu h^2 y_2(x) + \frac{\nu h^2}{x} v_1(x) + Q_0 n_p(x_2) - Q_0 n_e(x_2) \right]$$

$$F_2(1) = -29,35; \quad F_3(x) = J_0(\mu_1 x)$$

и $F_4(x) = 10^{-3} \varepsilon(x)$ при $h = 2 \cdot 10^{-3}$, $\nu = 0,04$; $b_0 = 0,04$ (кривая 4) и $h = 2 \cdot 10^{-3}$, $\nu = 0,02$; $b_0 = 0,1$ (кривая 5).

Анализ этих графиков дает полное представление о структуре пограничного слоя плазмы положительного столба тлеющего разряда в электроположительном газе, ограниченном цилиндрической трубкой из идеального диэлектрика. Так, например, из вида кривой 5 следует, что $\varepsilon_{\max} =$



$= \varepsilon(0,99) \approx 549,5$. Тогда при $R = 2$ см и $T = 400$ К

$$E_{r, \max} = E_r(1,98) = \frac{D_p}{k_p R} \varepsilon_{\max} \approx 9,4 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$$

Кривая 2 свидетельствует о том, что плотность объемного заряда плазмы почти всюду постоянна. Имея положительный знак, она резко возрастает только вблизи стенки трубки, а у самой стенки она убывает, меняя свой знак на противоположный так, что полный заряд плазмы остается равным нулю.

Таким образом, рассмотренный здесь случай вносит уточнение в современное представление о картине пограничного слоя плазмы (см., например, [11, с. 196]), согласно которому объемный положительный заряд плазмы всюду равен нулю, и только непосредственно у стенки в слое толщиной порядка радиуса Дебая он отличен от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хапаев М. М., Шолин Г. В. Анализ гидродинамических уравнений плазмы методами теории сингулярно возмущенных систем // ДАН СССР. 1985. Т. 286. № 3. С. 602–605.
2. Хапаев М. М., Шолин Г. В. О сингулярно-возмущенных системах, содержащих особые многообразия // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 1. С. 99–103.
3. Чекмарев И. Б. Математические задачи гидродинамики частично ионизованного газа // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа. М., 1981. Т. 14. С. 66–126.

4. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. М., 1963. Вып. 1. С. 183–272.
5. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
6. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978. 106 с.
7. Толстов Г. П. Ряды Фурье. 3-е изд. М.: Наука, 1980. 381 с.
8. Грановский В. Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток. М.: Наука, 1971. 543 с.
9. Воронов А. Я. О распределении самосогласованного поля в рекомбинирующей плазме положительного столба газового разряда. — Деп. ВИНТИ 23.09.85, № 6843-В.
10. Демидов В. И., Колоколов Н. Б., Торонов О. Г. Функция распределения электронов по энергиям и пристеночный скачок потенциала в плазме с источниками быстрых электронов // Физика плазмы. 1986. Т. 12. Вып. 6. С. 702–707.
11. Голант В. Е., Жилинский А. П., Сахаров И. Е. Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 384 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.IV.1987