МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1988

УДК 532.529+532.517

ВЛИЯНИЕ ОДНОРОДНОГО СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ НА МАЛЫЕ ДОЛГОЖИВУЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

ГОРОДЦОВ В. А.

При затухании малых возмущений с достаточно богатым спектральным составом в анизотропных средах в силу зависимости декремента затухания от направления с течением времени преимущества получают возмущения некоторых выделенных ориентаций. В однородной структурно-изотропной жидкости анизотропия наводится сдвиговым течением. Благодаря влиянию сдвига на начальной невязкой стадии некоторые возмущения могут даже усиливаться [1–7]. С другой стороны, в покоящейся стратифицированной жидкости выделенным является направление силы тяжести и наиболее долгоживущими оказываются крупномасштабные внутренние волны и возмущения в виде горизонтальных слоистых структур [8–11]. Ниже выполнен анализ наиболее медленно затухающих возмущений при совместном действии однородной стратификации (с постоянной частотой плавучести $N=(gd\ln\rho_0/dz)^{1/2}=\mathrm{const}$) и однородного безграничного сдвигового горизонтального течения (с постоянной скоростью сдвига $\gamma=\mathrm{const}$). Некоторые результаты по этой задаче опубликованы в [12–16]. В [15, 17, 18] доказана линейная устойчивость такого течения при любых положительных числах Ричардсона $\mathrm{Ri}\equiv N^2/\gamma^2$.

1. Уравнения для малых возмущений однородного сдвига. Для возмущений скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, давления $p(\mathbf{r},t)$ и плавучести $b(\mathbf{r},t)=g\rho(\mathbf{r},t)/\rho_0(z)$ (или плотности $\rho(\mathbf{r},t)$) в безграничной однородно стратифицированной несжимаемой жидкости, находящейся в состоянии горизонтального течения с постоянным вертикальным сдвигом, в приближении Буссинеска имеем систему уравнений в частных производных [12]

$$\left(\frac{d}{dt}+\gamma z\frac{\partial}{\partial x}-\nu\Delta\right)\mathbf{v}+\gamma(\mathbf{e}_z\mathbf{v})\mathbf{e}_x=-\nabla p+b\mathbf{e}_z$$
$$(\nabla\mathbf{v})=0,\qquad \left(\frac{d}{dt}+\gamma z\frac{\partial}{\partial x}-\varkappa\Delta\right)b=-N^2(\mathbf{e}_z\mathbf{v}) \tag{1.1}$$

в которой параметры ν, $\varkappa$ отражают влияние вязкости и диффузии (или теплопроводности). Направление силы тяжести отмечено единичным вектором $\mathbf{e}_z$, а направление течения со скоростью $\gamma z\mathbf{e}_x$ — вектором $\mathbf{e}_x$.

Благодаря однородности рассматриваемого течения (инвариантности уравнений относительно замены $\mathbf{r}\to\mathbf{r}+\mathbf{a}+a_z\gamma t\mathbf{e}_x$) и условию соленоидальности $\nabla\mathbf{v}=0$ уравнения допускают решения в виде пространственных гармоник Фурье

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\mathbf{v}(t)\exp(i\mathbf{k}(t)\mathbf{r}),\quad b(\mathbf{r},t)=b(t)\exp(i\mathbf{k}(t)\mathbf{r}),\ldots \tag{1.2}$$

с зависящими от времени волновым вектором $\mathbf{k}(t)=\mathbf{k}(0)-k_x(0)\gamma t\mathbf{e}_z$ и амплитудами $\mathbf{v}(t)$, $b(t)$, $p(t)$ (они обозначены теми же буквами, что и сами возмущения), которые удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)\mathbf{v}+\gamma v_z\mathbf{e}_x=-i\mathbf{k}p+b\mathbf{e}_z$$

$$(\mathbf{kv})=0,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\varkappa k^2\right)b=-N^2v_z \tag{1.3}$$

и начальным данным $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0$, $b=b_0$ при $t=0$. Здесь и в дальнейшем аргумент t опускается, а величинам, относящимся к начальному моменту времени $t=0$, присваивается индекс 0. Например, компонентная запись волнового вектора

$$k_x=k_{x0},\quad k_y=k_{y0},\quad k_z=k_{z0}-k_x\gamma t \tag{1.4}$$

означает, что при горизонтальном течении с вертикальным сдвигом изменяется только вертикальная компонента волнового вектора.

Хотя выражения (1.2) являются точными решениями системы (1.1), совокупности подобных решений (за исключением сумм гармоник с параллельными волновыми векторами) не будут решениями нелинейных уравнений (1.1). Лишь после линеаризации, сводящейся к замене d/dt на $\partial/\partial t$, восстанавливается принцип суперпозиции, и на обсуждаемое решение можно смотреть как на решение задачи об эволюции коэффициентов разложения Фурье достаточно произвольного малого начального возмущения.

Систему уравнений (1.3) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)\mathbf{v}+\gamma\left(\mathbf{e}_x-\frac{2k_x}{k^2}\mathbf{k}\right)v_z=\left(\mathbf{e}_z-\frac{k_z}{k^2}\mathbf{k}\right)b\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\varkappa k^2\right)b=-N^2v_z,\qquad p=2i\gamma\frac{k_x}{k^2}v_z-i\frac{k_z}{k^2}b\end{gathered} \tag{1.5}$$

и после выделения «вязких» сомножителей $e_\nu(t)$

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}(t)e_\nu(t),\qquad b=B(t)e_\nu(t),\qquad e_\nu(t)\equiv\exp\left(-\nu\int\limits_0^t dt\,k^2\right) \tag{1.6}$$

получим систему для уравнений для $B(t)$ и $V_z(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k^2}{k_h^2}V_z\right)=B,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+(\varkappa-\nu)k^2\right)B=-N^2V_z \tag{1.7}$$

Здесь и в дальнейшем индексом h отмечаются горизонтальные части векторов (в частности, $\mathbf{k}_h=\mathbf{k}-k_z\mathbf{e}_z$, $k_h^2=\mathbf{k}_h^2$).

Из (1.5) следует также уравнение для амплитуды вертикальной компоненты завихренности $\omega_z=i(k_xv_y-k_yv_x)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)\omega_z=i\gamma k_yv_z \tag{1.8}$$

вид которого не зависит от стратификации. Вместе с условием поперечности $\mathbf{kv}=0$ оно приводит к формулам

$$\begin{gathered}V_x=v_{x0}-\frac{1}{k_h^2}\left(k_xk_zV_z+\gamma k_y^2I\right)\Big|_0^t,\qquad I\equiv\int\limits_0^t dt\,V_z\\ V_y=v_{y0}-\frac{1}{k_h^2}\left(k_yk_zV_z-\gamma k_xk_yI\right)\Big|_0^t\end{gathered} \tag{1.9}$$

В случае плоской задачи ($k_y=0$) выражение для V_x не содержит члена с интегралом и является следствием условия $\mathbf{kV}=0$.

Уравнение второго порядка для вертикальной компоненты V_z, следующее из (1.7)

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\varkappa-\nu)k^2\right)\frac{\partial}{\partial t}+N^2\frac{k_h^2}{k^2}\right]\left(\frac{k^2}{k_h^2}V_z\right)=0 \tag{1.10}$$

имеет переменные коэффициенты из-за переменности квадрата волнового вектора $k^2=k_h^2+(k_{z0}-k_x\gamma t)^2$, за исключением случая $k_x=0$. Его можно привести к каноническому виду

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{4}(\varkappa-\nu)^2k^4+(\varkappa-\nu)\gamma k_xk_z+N^2\frac{k_h^2}{k^2}\right)y=0\\ y\equiv v_z\frac{k^2}{k_h^2}\exp\left(\frac{1}{2}(\varkappa+\nu)\int\limits_0^t dt\,k^2\right)\end{gathered} \tag{1.11}$$

Анализ уравнений начнем с простейшего случая однородной жидкости, рассматривавшегося ранее в [1—7].

2. Малые возмущения сдвига однородной жидкости ($B=0$, $N=0$). В этом случае выражение для V_z находится из (1.7), а используя (1.5), (1.9), получим

$$\begin{gathered}V_z=v_{z0}\frac{k_0^2}{k^2},\qquad P=z_{z0}2i\gamma\frac{k_xk_0^2}{k^4}\\ V_x=v_{x0}+v_{z0}\frac{k_0^2}{k_h^2}\left(\frac{k_y^2}{k_xk_h}\operatorname{arctg}\frac{k_z}{k_h}-\frac{k_xk_z}{k^2}\right)\Bigg|_0^t\\ V_y=v_{y0}-v_{z0}\frac{k_0^2}{k_h^2}\left(\frac{k_y}{k_h}\operatorname{arctg}\frac{k_z}{k_h}+\frac{k_yk_z}{k^2}\right)\Bigg|_0^t\end{gathered} \tag{2.1}$$

Эти части амплитуд не зависят от вязкости. Влияние последней описывается отдельным экспоненциальным множителем $e_\nu(t)$ (см. (1.6)), на виде которого сказывается как вязкость, так и сдвиг. Обсудим сначала поведение «невязких» частей.

Под действием сдвига меняется только вертикальная компонента волнового вектора с $k_x\neq0$ (см. (1.4)), так что он поворачивается и со временем вытягивается в вертикальном направлении. В случае $\gamma k_xk_{z0}>0$ компонента k_z при $t=\tau\equiv k_{z0}/(\gamma k_x)$ обращается в нуль, а до этого уменьшается по величине. В соответствии с этим величина вертикальной компоненты скорости $|V_z|$ сначала растет и при $t=\tau$ достигает максимума $|v_{z0}|(1+k_{z0}^2/k_h^2)$, а затем спадает к нулю. Для возмущений с $\gamma k_xk_{z0}<0$ промежуточный максимум отсутствует (это так и при $k_{z0}=0$). Компонента V_y монотонно достигает ненулевого предельного значения. Конечного значения при $t\to\infty$ достигает и продольная компонента V_x. Однако она меняется монотонно лишь при $k_x^2<k_y^2$, а при $k_x^2>k_y^2$ могут иметься один — два промежуточных экстремума. В конечном счете продольная компонента возмущений скорости может вырастать до больших значений, если продольная компонента волнового вектора k_x мала ($V_x\sim1/k_x$).

Для возмущений с $k_x=0$ волновой вектор не меняется со временем и решение принимает простой вид

$$V_x=v_{x0}-v_{z0}\gamma t,\quad V_y=v_{y0},\quad V_z=v_{z0},\quad \mathbf{k}=\mathbf{k}_0 \tag{2.2}$$

Продольная компонента скорости линейно нарастает со временем.

Подобная неустойчивость течения на невязкой стадии имеет место в случае произвольного (не только $\gamma=\text{const}$) сдвига [4] и противоречит известным теоремам теории гидродинамической устойчивости: теореме Рэлея об устойчивости течений идеальной жидкости без точек перегиба на профиле скорости и теореме Сквайра о более ранней неустойчивости плоских, а не трехмерных возмущений [19]. Указанное неустойчивое возмущение является трехмерным и нелокальным, а теорема

Рэлея обычно доказывается для плоских возмущений. Теорема Сквайра служит сведению задачи о трехмерных возмущениях плоскопараллельных течений к плоской задаче, и обычно доказывается с помощью поворота системы координат на некоторый угол φ до совмещения оси x с направлением вектора $\mathbf{k}_h$. В повернутой системе координат уравнения для возмущений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)v_x'+\gamma\cos\varphi\, v_z=-ik_h p,\qquad k_h v_x'+k_z v_z=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)v_z=-ik_z p+b,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\varkappa k^2\right)b=-N^2 v_z$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\varkappa k^2\right)v_y'-\gamma\sin\varphi v_z=0,\qquad k_x=k_h\cos\varphi$$

распадаются на четыре уравнения для плоских возмущений v_x', v_z с уменьшенным сдвигом $\gamma\cos\varphi$ и уравнение для v_y', Внимания последнему не уделяется, а между тем именно оно описывает компоненту возмущений, растущую при $k_x=0$ в невязком нестратифицированном приближении (см. (2.2)).

На конечной стадии эволюции возмущений при больших временах преобладающим станет влияние вязкости, описываемое экспоненциальным множителем $e_\nu(t)$ в формулах (1.6) для полных амплитуд. Из соотношения

$$e_\nu(t)=\exp\left(-\nu\int_0^t dt\,k^2\right)=\exp\left[-\nu t\left(k_h^2+\frac{1}{4}k_{z0}^2+\frac{1}{3}\left(\gamma k_x t-\frac{3}{2}k_{z0}\right)^2\right)\right] \tag{2.3}$$

можно видеть, что в соответствии с ростом волнового вектора возмущений с $k_x\neq0$ их вязкое затухание происходит быстрее, чем возмущений с $k_x=0$, волновой вектор которых не меняется.

Амплитуда $\mathbf{v}(t)$ сводится к $\mathbf{V}(t)$ в приближении идеальной жидкости, что фактически будет реализоваться для не слишком больших времен. При определенных ограничениях на параметры, когда могут выполняться неравенства $k_0/k_x\ll\gamma t\ll(\gamma/\nu k_x^2)^{1/3}$ (для простоты будем считать $\gamma>0$, $k_x\geqslant0$, $k_{z0}\geqslant0$), имеется промежуточная стадия. На этой промежуточной асимптотической стадии уже заканчиваются начальное ($0<t<\tau$) и переходное ($t\sim\tau k_0/k_{z0}$) изменения амплитуды возмущений, а вязким влиянием еще можно пренебречь ($e_\nu(t)\approx1$). Возмущения с $k_x\neq0$ становятся мелкомасштабными в вертикальном направлении и локализуются в горизонтальной плоскости. В то же время амплитуда возмущений с $k_x=0$ и малыми k_x сильно растет в направлении основного течения.

В итоге наиболее энергичными и долгоживущими на конечной вязкой стадии затухания оказываются возмущения с большими продольными пульсациями скорости, зависящие от поперечных координат (y, z). Тенденция образования подобных продольных вихревых структур в потоках со сдвигом хорошо прослеживается экспериментально. Ситуация однородного сдвига со слабыми взаимодействиями различных возмущений реализуется, в частности, при турбулентном течении у гладкой стенки в вязком подслое. Поэтому неудивительно, что при малых числах Рейнольдса $\mathrm{Re}\equiv z(\tau_0/\rho)^{1/2}/\nu<5$ (z — расстояние до стенки, τ_0 — напряжение сдвига) с помощью меток хорошо наблюдается «полосатая» структура, вытянутая по течению [20].

3. Возмущения в стратифицированной жидкости при одинаковых коэффициентах вязкости и диффузии ($\nu=\varkappa$). В этом случае диссипативное влияние отделяется в виде такого же множителя $e_\nu(t)$, как и в случае однородной жидкости. В уравнении (1.10) исчезает член с первой производной и его решение можно выразить через гипергеометрическую функцию

$$V_z=\sum_\pm C_\pm\left(\frac{k_h^2}{k^2}\right)^{1+a_\pm}F\left(a_\pm, a_\pm+1; 2a_\pm+\frac{3}{2}; \frac{k_h^2}{k^2}\right) \tag{3.1}$$

$$4a_\pm=-1\pm(1-4J^2)^{1/2},\qquad J^2\equiv\mathrm{Ri}\left(1+\frac{k_y^2}{k_x^2}\right)$$

При больших временах решение затухает степенным образом

$$V_z \sim C_\pm t^{-\beta}, \qquad \beta = \frac{3}{2} \pm \left(\frac{1}{4} - J^2\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

и с осцилляцией, если $J^2 > 1/4$. Это согласуется с результатами работ [13, 14] по плоским возмущениям.

Для анализа как при больших, так и малых временах удобна другая асимптотика (по параметру J^2, который велик, в частности, при сильной стратификации). Уравнение для V_z

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{J^2}{1+\xi^2}\right)((1+\xi^2)V_z)=0, \qquad \xi = -\frac{k_z}{k_h} \tag{3.3}$$

не имеет точек поворота, содержит один большой параметр J^2 и потому дает (см. также (1.7)) простую ВКБ-асимптотику

$$\begin{gathered} V_z \approx \left(\frac{k_0}{k}\right)^{1/2}\left(v_{z0}\cos S - \frac{\alpha k_h}{k_0} b_0 \sin S\right), \qquad S \equiv J \ln \frac{k+k_z}{k_0+k_{z0}} \\ B \approx \left(\frac{k_0}{k}\right)^{1/2}\left(b_0 \cos S + \frac{k_0}{\alpha k_h} v_{z0}\sin S\right), \qquad \alpha \equiv \frac{k_h}{\gamma k_x J} \end{gathered} \tag{3.4}$$

согласующуюся с начальными условиями $V_z = v_{z0}$, $B = b_0$ при $t=0$ и с асимптотикой (3.2) при больших временах. Эти «недиссипативные» части амплитуд тоже имеют начальный рост, связанный с разворотом волнового вектора в вертикальном направлении. Однако теперь на него быстро накладывается осцилляция.

Большой параметр позволяет интегрированием по частям получить асимптотическую оценку интеграла, входящего в формулы (1.9)

$$I \approx \alpha^2 b_0 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^{1/2}\left(\frac{\alpha k_0}{k_h} v_{z0}\sin S + \alpha^2 b_0 \cos S\right)$$

и тем самым найти выражения для горизонтальных компонент скорости возмущений. При больших временах будем иметь

$$\begin{gathered} V_z \to 0, \qquad V_x \to v_{x0} + \frac{k_x k_{z0}}{k_h^2} v_{z0} - \gamma\alpha^2 \frac{k_y^2}{k_h^2} b_0 \\ V_y \to v_{y0} + \frac{k_y k_{z0}}{k_h^2} v_{z0} + \gamma\alpha^2 \frac{k_x k_y}{k_h^2} b_0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

т. е. пульсация скорости на промежуточной стадии локализуется в горизонтальной плоскости. Причем в соответствии с вытягиванием волнового вектора вдоль вертикали возмущения становятся мелкомасштабными в этом направлении.

Возмущения с малыми k_x попадают как раз в проанализированный класс с $J^2 \approx \mathrm{Ri}\, k_y^2/k_x^2 \gg 1$. Для них произведение $J^2 k_x^2/k_y^2 \approx (\alpha\gamma)^{-2}$ можно считать величиной порядка единицы (если, конечно, стратификация не слишком слаба), так что на промежуточной стадии не будет превосходства продольных вихревых структур (ср. разд. 2).

При $k_x=0$ коэффициенты уравнений для амплитуд становятся постоянными, и решения их принимают вид

$$\begin{gathered} V_x = v_{x0} + \frac{\gamma}{N^2} b_0 (\cos \omega_0 t - 1) - \frac{\gamma}{\omega_0} v_{z0} \sin \omega_0 t \\ V_z = v_{z0}\cos\omega_0 t + \frac{\omega_0}{N^2} b_0 \sin \omega_0 t, \qquad V_y = v_{y0} + \frac{k_z}{k_y}(v_{z0} - V_z) \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$B=b_0 \cos \omega_0 t-\frac{N^2}{\omega_0} v_{z0} \sin \omega_0 t, \qquad \omega_0 = N k_y / k$$

Линейный рост продольных пульсаций с $k_x=0$, характерный для однородной жидкости, сбивается здесь колебаниями, обязанными влиянию стратификации (т. е. распространяющимися внутренними волнами).

Лишь на конечной диссипативной стадии выделяются пульсации с малыми k_x из-за их более медленного экспоненциального затухания (см. (2.3)).

4. Возмущения при больших различиях в диссипативных коэффициентах. Уравнение для амплитуды вертикальной компоненты скорости V_z

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\lambda(1+\xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{J^2}{1+\xi^2}\right)((1+\xi^2)V_z)=0 \tag{4.1}$$

$$\lambda = (\varkappa-\nu)\frac{k_h^3}{\gamma k_x}, \qquad J^2=\frac{N^2 k_h^2}{\gamma^2 k_x^2} \equiv \frac{1}{4}\lambda^2\mu^2$$

содержит тогда уже два параметра λ и J^2 (или λ, μ) и может иметь точки поворота, определяемые из условия равенства нулю дискриминанта D

$$D=\frac{(1+\xi^2)^3-\mu^2}{1+\xi^2}, \qquad \mu=\left(\frac{k^\circ}{k_h}\right)^2, \qquad k^\circ \equiv \left|\frac{2N}{\nu-\varkappa}\right|^{1/2} \tag{4.2}$$

Однако при $\mu^2<1$ (или $k_h>k^\circ$) дискриминант положителен и точки поворота отсутствуют. Пользуясь тем, что для наиболее важных возмущений с малыми k_x значения параметров λ^2, J^2 велики, решение в этом случае можно записать в асимптотически упрощенном виде

$$v_z \approx \left(v_{z0}\frac{k_0^2}{k^2}-\frac{b_0 k_h^2}{(\nu-\varkappa)k_0^2 k^2}\right)e_\nu(t)+\frac{b_0 k_h^2}{(\nu-\varkappa)k^4}e_\varkappa(t), \qquad b\approx b_0 e_\varkappa(t) \tag{4.3}$$

Здесь также принято, что $|\lambda|\mu^2 \ll 1$; это позволяет вообще пренебречь вкладом, зависящим от параметра J^2.

Можно видеть, что решение (4.3) на промежуточной стадии ($e_\nu \approx e_\varkappa \approx 1$) становится близким к решению для идеальной однородной жидкости (2.1), и тогда остается верным заключение о преимущественном развитии продольных вихревых структур. При $k_x \to 0$ из (4.3), (1.9) следует

$$V_x \approx -\frac{k_h}{k_x}\left(v_{z0}\frac{k_0^2}{k_h^2}-\frac{b_0}{(\nu-\varkappa)k_0^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{k_z}{k_h}\Big|_0^t+\frac{\gamma b_0}{(\nu-\varkappa)^2 k^4}e_{\varkappa-\nu}(t)$$

так что на промежуточной стадии амплитуды продольных структур растут ($v_x \sim 1/k_x$).

Практически чаще встречаются более крупномасштабные возмущения, для которых $k_h<k^\circ$ или $\mu^2>1$ и даже $\mu^2 \gg 1$. Действительно, в океанической стратифицированной воде (стратифицированной из-за градиентов солености и температуры) $N \sim 10^{-2}-10^{-4}$ с$^{-1}$, $\nu \approx 10^{-6}$ м^{2}с$^{-1} \gg \varkappa$ и характерный масштаб длины

$$\Lambda^\circ=\frac{2\pi}{k^\circ}\approx(0{,}5-0{,}05) \text{ м} \tag{4.4}$$

мал по сравнению с горизонтальными масштабами важных возмущений. Это же верно и для лабораторных условий, в которых $N \sim 1$ с$^{-1}$ и $\Lambda^\circ \approx 0{,}005$ м.

В случае $\mu^2>1$ уравнение (4.1) имеет точки поворота при $\xi^2=\mu^{2/3}-1$ (если $\mu^2 \gg 1$, то в область с $t>0$ попадает только точка поворота с $\xi>0$), вблизи которых характер решения меняется с осциллирующего на апериодический. Некоторый анализ поведения решения на промежуточной асимптотической стадии вблизи точки поворота для уравнения в форме (1.11) дан в [16] и здесь воспроизводиться не будет. Что касается конечной стадии затухания возмущений, соответствующей далекой области за точкой поворота, то на ней членом с параметром J^2 в уравнении (4.1) можно пренебречь, и вид уравнения становится не зависящим от стратификации. Асимптотика решения при $\xi^2 \gg 1$ тогда имеет вид [15]

$$v_z(t) \sim C_1\left(\frac{k_h}{k}\right)^2 e_\nu(t) + C_2\left(\frac{k_h}{k}\right)^4 e_\varkappa(t) \tag{4.5}$$

Из (4.3), (4.5) и (2.3) видно, что затухание возмущений с $k_x \neq 0$ на конечной диссипативной стадии усиливается под влиянием сдвига. Лишь в частном случае $k_x=0$ волновой вектор возмущений (и соответственно темп экспоненциального затухания) оказывается не зависящим от сдвига и не меняется со временем. Коэффициенты уравнений для амплитуд возмущений (1.5) в случае $k_x=0$ становятся постоянными, причем скорость сдвига γ входит только в одно уравнение для продольной компоненты скорости v_x. Поэтому анализ их вполне аналогичен выполненному для неподвижной стратифицированной жидкости в [8—10]. В воспроизводимых далее основных результатах для наиболее долгоживущих возмущений теперь $k_x=0$, $k_h=|k_y|$, $k^2=k_y^2+k_z^2$.

Возмущения с $k_x=0$ затухают экспоненциальным образом ($\sim \exp(-\sigma t)$) с показателем затухания, определяемым действительной частью выражения

$$\sigma = \frac{k^2}{2}\left[\nu+\varkappa \mp |\nu-\varkappa| \left(1-\left(\frac{K}{k}\right)^6\right)^{1/2}\right], \quad K \equiv k_h\left(\frac{k^\circ}{k_h}\right)^{2/3} \tag{4.6}$$

Они монотонно затухают при $k>K$ и отвечают затухающим внутренним волнам при $k<K$ с частотами $\operatorname{Im}\sigma$ и показателем затухания $\operatorname{Re}\sigma = (\nu+\varkappa)k^2/2$. Выделяя среди них наиболее медленно затухающие, будем при оценках полагать $\nu \gg \varkappa$ (при $\nu \ll \varkappa$ следует просто поменять местами ν и $\varkappa$).

Наиболее мелкомасштабные в горизонтальном направлении возмущения с $k_h > k^\circ(\nu/2\varkappa)^{1/4}$ могут лишь монотонно затухать (для них $k \geqslant k_h > K$). Наиболее медленно среди них затухают возмущения с $k_z=0$, имеющие показатель затухания

$$\sigma \approx \varkappa k_h^2\left(1+\frac{\nu}{2\varkappa}\left(\frac{k^\circ}{k_h}\right)^4\right) \tag{4.7}$$

Более крупномасштабные возмущения с $k_h < k^\circ(\nu/2\varkappa)^{1/4}$ могут быть как волновыми (для них $k<K$, $k^\circ > k_h$), так и апериодическими ($k>K$). Среди волновых возмущений с фиксированной компонентой k_h наиболее долгоживущими являются возмущения с $k_z=0$ и декрементом $\operatorname{Re}\sigma \approx \nu k_h^2/2$. Наиболее долгоживущие апериодические возмущения характеризуются соотношениями

$$\sigma \approx \frac{3}{2}\varkappa k^2, \qquad k^6 = \frac{\nu}{2\varkappa}K^6 = \frac{\nu}{2\varkappa}k_h^2(k^\circ)^4 \tag{4.8}$$

При $k_h \leqslant 0{,}6k^\circ(\nu/2\varkappa)^{1/4}$ горизонтальные компоненты волновых векторов возмущений типа (4.8) меньше вертикальных, а при k_h еще гораздо меньших такие возмущения будут представлять собой тонкие почти горизонтальные (слоистые) структуры. Если $k_h < 0{,}6k^\circ$, то у всех монотонно затухающих возмущений ($k>K$) волновые векторы наклонены под острыми углами к вертикали.

Темпы затухания возмущений типа (4.8) и наиболее медленно вырождающихся внутренних волн одинаковы при

$$k_h = \frac{2\pi}{L^\circ} \approx 1{,}9k^\circ\left(\frac{\varkappa}{\nu}\right)^{1/3}$$

При меньших k_h медленнее затухают внутренние волны, при больших — слоистые структуры типа (4.8). Разделяющий пространственный масштаб

L° составляет примерно $10\Lambda^\circ$ в случае солевой стратификации и Λ° — температурной.

Три важных характерных пространственных масштаба L°, Λ° и H° находятся в следующем взаимоотношении между собой:

$$L^\circ > \Lambda^\circ > H^\circ \approx 1{,}2\Lambda^\circ (\varkappa/\nu)^{1/4}$$

При $\lambda_h = 2\pi/k_h < H^\circ$ возмущения могут затухать только монотонно, причем наиболее медленно возмущения с очень большими $\lambda_z = 2\pi/k_z$ (см. (4.7)).

Если $\lambda_h > H^\circ$, то долгоживущими будут структуры, для которых в соответствии с (4.8)

$$\frac{\lambda_z}{\lambda_h} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/2}, \quad \alpha \equiv \left(\frac{H^\circ}{\lambda_h}\right)^{4/3}$$

а при $\lambda_h > \Lambda^\circ$ конкуренцию им составят внутренние волны, с очень большими λ_z.

Хотя при $\lambda_h > L^\circ$ слоистые структуры затухают быстрее волн, время их жизни довольно велико (при реальных значениях параметров оно часто оказывается более суток).

5. **Заключение.** На переходной стадии эволюции малых возмущений в текущей стратифицированной жидкости могут образовываться разнообразные структуры, вид которых зависит от начальных условий, величины сдвига скорости, стратификации и диссипативных характеристик жидкости, причем в некоторых случаях возмущения на промежуточной стадии могут расти.

Однако при больших временах на конечной диссипативной стадии все возмущения затухают и структура наиболее долгоживущих из них оказывается достаточно простой. Из-за влияния сдвига выживающие возмущения сильно вытянуты в направлении течения. Под действием же стратификации из всех возмущений с $\lambda_h \gg L^\circ$ в поперечной плоскости постепенно отфильтровываются возмущения двух типов: внутренние волны и тонкие горизонтальные прослойки.

При наличии сдвигового течения слоистая структура в стратифицированной жидкости не только сохраняется, но и становится даже более ярко выраженной за счет подавления сдвигом многих из конкурирующих возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kelvin* (W. Thomson). Stability of fluid motion: Rectilinear motion of viscous fluid between two parallel planes // Phil. Mag. 1887. Ser. 5. V. 24. № 147. P. 188–196.
2. *Moffatt H. K.* The interaction of turbulence with strong wind shear // Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн. М.: Наука, 1967. С. 139–156.
3. *Rosen G.* General solution for perturbed plane Couette flow // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 12. P. 2767–2769.
4. *Ellingsen T., Palm E.* Stability of linear flow // Phys. Fluids. 1975. V. 18. № 4. P. 487–488.
5. *Сабельников В. А.* Некоторые линейные задачи теории деформации однородной турбулентности // Тр. ЦАГИ. 1975. Вып. 1702. С. 1–41.
6. *Townsend A. A.* The structure of turbulent shear flow. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976. 429 p.
7. *Markus P. S., Press W. H.* On Green's functions for small disturbances of plane Couette flow // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. Pt 3. P. 525–534.
8. *Pearson H. J., Linden P. F.* The final stage of decay of turbulence in stably stratified fluid // J. Fluid Mech. 1983. V. 134. P. 195–203.
9. *Франк А. М.* Вырождающаяся турбулентность в стратифицированной жидкости: Препринт № 18. Красноярск: ВЦ СО АН СССР. 1984. 22 с.
10. *Городцов В. А.* О слоистых структурах на конечной стадии вырождения турбулентности в стратифицированных жидкостях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 69–76.
11. *Мадерич В. С., Никишов В. И.* Диффузионно-вязкая стадия растекания перемешанных пятен в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 6. С. 656–658.
12. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969. 267 с.
13. *Hartman R. J.* Wave propagation in a atratified shear flow // J. Fluid Mech. 1975. V. 71. Pt 1. P. 89–104.

14. *Brown S. N., Stewartson K.* On the algebraic decay of disturbances in a stratified linear shear flow // J. Fluid Mech. 1980. V. 100. Pt 4. P. 811–816.
15. *Knobloch E.* On the stability of stratified plane Couette flow // Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics. 1984. V. 29. № 2. P. 105–116.
16. *Criminale W. O., Cordova J. Q.* Effects of diffusion in the asymptotics of perturbations in stratified shear flow // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 7. P. 2054–2060.
17. *Дикий Л. А.* Об устойчивости плоскопараллельных потоков неоднородной жидкости // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 249–257.
18. *Case K. M.* Stability of an idealized atmosphere. I. Discussion of results // Phys. Fluids. 1960. V. 3. № 2. P. 149–154.
19. *Линь Цзяцзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
20. *Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A. et al.* The structure of turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Pt 4. P. 741–773.

Москва

Поступила в редакцию
26.III 1987