

УДК 532.529

О ВЛИЯНИИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА СВОБОДНОЕ ВЫТЕКАНИЕ СМАЧИВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРУБЫ

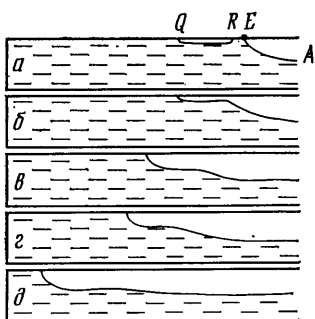
МАРКОВИЧ Э. Э.

В опытах [1] была обнаружена сильная зависимость от поверхностного натяжения скорости свободного вытекания жидкости из горизонтальной трубы, закрытой с одного конца. Расчет [2], который для предельного случая очень широкой трубы дал результаты, близкие к опытным, проведен с использованием гипотезы Кармана [3] о существовании на пересечении поверхности раздела фаз и верхней образующей трубы особой точки, в которой скорость нулевая относительно движущейся поверхности раздела.

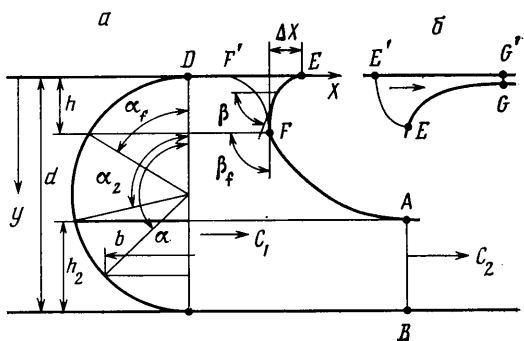
В настоящей статье опытным и расчетным путями выявлена структура течения, для которого справедлива гипотеза Кармана. Установлено, что существует не точка, а область конечных размеров, прилегающая к верхней образующей трубы и включающая движущуюся линию контакта между поверхностью раздела фаз и стенкой, в которой жидкость неподвижна относительно линии контакта, т. е. нарушается условие прилипания к стенке. Размеры области зависят от поверхностного натяжения. Воздействием этой застойной области на течение полностью объясняется влияние поверхностного натяжения в опытах [1]. Установлено, что в зависимости от соотношения диаметра трубы и размера застойной зоны существует два режима вытекания: в достаточно широких трубах — инерционный, при котором справедлива гипотеза Кармана и нарушается условие прилипания, в достаточно узких трубах — ползущий, при котором условие прилипания выдерживается. Рассчитаны значения определяющего безразмерного параметра, соответствующие смене режимов и остановке вытекания. Они близки к опытным значениям.

1. Процесс вытекания. Если длинную горизонтальную трубу достаточно большого диаметра закрыть с двух концов, заполнить водой, а затем быстро открыть с одного конца (правого на фиг. 1), вода после небольшого периода установления будет вытекать из трубы стационарно в виде слоя, расположенного в нижней части трубы. В верхней части трубы в глубь ее (влево на фиг. 1) будет продвигаться воздушный пузырь, заполняющий объем, который освобождает вода. Поверхность раздела фаз EA (фиг. 1, a) будет двигаться влево, почти не меняя своей формы и с постоянной скоростью.

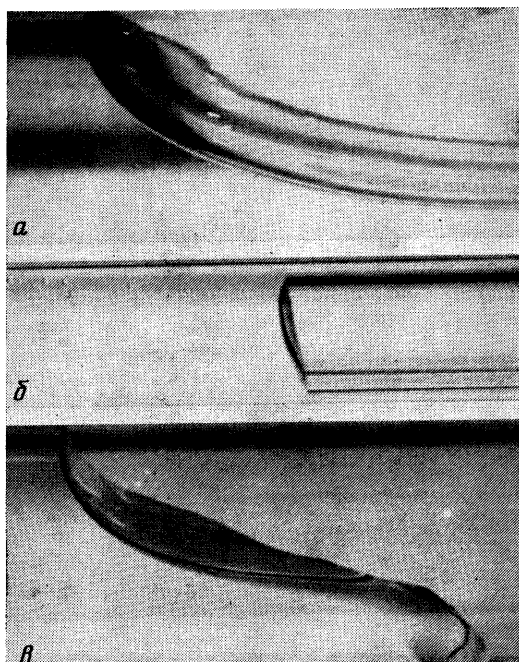
Скорость C_1 движения поверхности раздела была измерена в опытах [1] для воды и других жидкостей в трубах диаметром от 5 до 178 мм, причем было обнаружено сильное влияние диаметра трубы на скорость. В работе [2] для предельного случая отсутствия вязкости и поверхностного натяжения проведен расчет скорости C_1 , который дал результаты, близкие к опытам [1] для самой большой трубы. В расчетах [2] использована гипотеза Кармана [3] о существовании в месте пересечения поверхности раздела фаз с верхней образующей трубы (точка E на фиг. 1, a) особой точки, в которой скорость жидкости равна нулю относительно движущейся поверхности раздела и, следовательно, не равна нулю относительно стенки. Особая точка обеспечивает неизменность формы движущейся поверхности раздела фаз и постоянство ее скорости. Если отказаться от гипотезы Кармана, то поверхность раздела будет расплываться. Для плоского течения тяжелой несжимаемой невязкой жид-



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

кости без поверхностного натяжения это доказано (разрушение плотины, [4]). Если же принять гипотезу Кармана в ее исходной формулировке, то придется допустить нарушение условия прилипания жидкости к стенке в окрестности точки E .

Для проверки справедливости гипотезы Кармана были поставлены прямые опыты.

Прозрачную стеклянную трубу длиной 2,8 м и внутренним диаметром 56 мм, закрытую с двух концов, заполняли водой. Вдоль верхней образующей трубы в некоторых местах были оставлены нитевидные воздушные пузырьки QR (фиг. 1, a) длиной 100–300 мм и поперечным сечением немного более 1 мм². Таким образом, сечения трубы с пузырьками отличались от целиком заполненных только отсутствием точек E , для которых высказана гипотеза Кармана. Правый конец трубы быстро открывали и проводили кино съемку процесса вытекания. На фиг. 1 показана схема кинограммы процесса.

Когда голова пузыря, идущая влево, проходила сечения трубы, целиком заполненные водой, поверхность раздела фаз, не меняя своей формы, двигалась с постоянной скоростью (фиг. 1, a). Как только верхняя точка E поверхности раздела достигала начала R пузырька QR , форма поверхности раздела начинала меняться. Склон,

вершиной которого раньше была точка E , постепенно расплывался (фиг. 1, б), а начало склона перемещалось в точку Q (фиг. 1, в). После прохождения пузырька QR поверхность раздела постепенно приобретает исходную форму, а скорость поверхности — исходное значение (фиг. 1, г и д).

Итак, наблюдения показали, что в соответствии с гипотезой Кармана форма и скорость движения поверхности раздела фаз действительно определяются поведением жидкости у точки пересечения поверхности раздела с верхней образующей трубы.

Чтобы изучить форму поверхности раздела около этой точки, течение фотографировали со вспышкой в прозрачной трубе длиной 1,2 м, наружным диаметром 37,5 мм и внутренним 35,5 мм. Типичная фотография показана на фиг. 2, а. Оптическая ось фотоаппарата располагалась близко к горизонтальной плоскости, проходящей через ось трубы перпендикулярно ей. Пузырь на фиг. 2, а движется влево. Самую верхнюю часть поверхности раздела высотой около 1 мм увидеть не удается из-за искажений, связанных с преломлением света. Видно, что сверху имеется нависающая часть поверхности раздела, кривизна которой уменьшается вниз, а около вертикальной касательной (точка F на фиг. 3, а), как показали обмеры фотографий B в масштабе 15:1, исчезает совсем. Расстояние от верхней образующей трубы до точки F составляет по обмерам $3,6 \pm 0,3$ мм (при определении этого расстояния вводилась расчетная поправка на преломление света). Ниже точки F появляется быстро убывающая небольшая кривизна.

Возникает вопрос: действительно ли особая точка E располагается на самой стенке трубы (при этом условие прилипания должно нарушаться) или вблизи от нее, так что между нею и стенкой остается тонкая пленка (при этом условие прилипания не нарушается)?

Непосредственно увидеть очень тонкую пленку в данных опытах невозможно, однако следующее наблюдение говорит в пользу ее отсутствия. После многочисленных опытов без промывки трубы на ее верхнем участке, ограниченном центральным углом α (фиг. 3, а) $20-25^\circ$, остаются отдельные следы высохших неподвижных капель, тогда как ниже стенка трубы омывается сплошь и остается чистой.

Из опытов [1] известно, что с уменьшением диаметра трубы скорость вытекания уменьшается и из достаточно узких горизонтальных труб жидкость не вытекает вообще. Данные наблюдения показали, что существуют две формы неподвижной поверхности раздела. В очень узких трубах со смачивающей жидкостью поверхность вогнутая и кривизна ее монотонно уменьшается вниз (фото фиг. 2, б, труба диаметром 4 мм). В трубах менее узких верхняя часть поверхности вогнутая и кривизна ее уменьшается вниз до нуля, а нижняя — выпуклая и кривизна ее вниз увеличивается от нуля (фото фиг. 2, в, труба диаметром 11 мм). Угол между осью трубы и поверхностью раздела в месте перегиба может в одной и той же трубе и для одной и той же жидкости с помощью встряхивания меняться от почти 90° до близких к нулю значений. При этом длина поверхности раздела увеличивается и в пределе может начаться вытекание, которое затем прерывается.

Ниже на основе полученных опытных данных проведен анализ процесса вытекания.

2. Условия у верхней образующей трубы. Наблюдения, описанные в предыдущем пункте, свидетельствуют в пользу того, что особая точка Кармана E расположена на самой стенке трубы и условие прилипания здесь нарушается. Не исключено, однако, что между точкой E и стенкой остается жидкий слой, настолько тонкий, что в опытах он незаметен. В таком случае условие прилипания может выдерживаться. Проанализируем эти две возможности.

Рассмотрим установившееся течение в координатах, движущихся вдоль трубы вместе с поверхностью раздела (фиг. 3). В этих координатах стенка трубы выдвигается из поверхности раздела с постоянной скоростью C_1 . Предположим сначала, что под действием прилипания к стенке и вязких сил у верхней образующей трубы из-под поверхности раздела вытекает тонкий слой жидкости (фиг. 3, б). В этом случае особая точка E , в которой жидкость не движется относительно поверхности раздела, должна быть обычной точкой деления потока, наблюдаемой, например, при вытекании жидкости из вертикальных труб [5], только смещенной близко к верхней образующей трубы.

Рассмотрим участок слоя, ограниченный живым сечением EE' , проходящим через особую точку, и сечением GG' , расположенным настолько далеко от нее, что скорости в нем выровнялись и стали везде равны скорости C_1 . На участке EG поверхности раздела жидкость должна ускоряться. В то же время вниз по течению за точкой E в ее ближайшей окрестности нет сил, ускоряющих жидкость. Действительно, вязкие силы здесь пренебрежимо малы, так как малы первые производные скорости, продольная составляющая силы тяжести направлена против движения (вниз) и сила капиллярного давления также направлена против движения, поскольку кривизна поверхности раздела уменьшается от E к G . Чтобы слой мог существовать, необходим такой большой наклон трубы вниз, при котором продольная составляющая силы тяжести около точки E действовала бы по течению, а не против него, и преодолевала бы градиент капиллярного давления.

Итак, у верхней образующей горизонтальной трубы жидкого слоя нет, т. е. поверхность трубы после прохождения линии контакта фаз должна оставаться сухой. Другими словами, исходная формулировка гипотезы Кармана справедлива. Это значит, что особая точка E располагается непосредственно в месте контакта трех фаз и около нее не выполняется условие прилипания. Фактически это прямо показано опытами (фиг. 1), в которых жидкость под пузырьком QR оставалась неподвижной относительно стенки во время прохождения поверхности раздела, т. е. выполнялось условие, эквивалентное условию прилипания. При этом движение немедленно меняло форму — поверхность раздела расплывалась.

На вопрос, какую роль в рассматриваемом движении играет трение между стенкой трубы и жидкостью в окрестности точки E , можно дать косвенный, но достаточно определенный ответ. Расчеты скорости движения поверхности раздела при вытекании, проведенные в работе [2] и в следующем пункте, сходятся с опытными данными только если принять, что полное давление (см. п. 3) в точке D у стенки, где жидкость неподвижна относительно трубы, и в особой точке E (фиг. 3) одинаково. Это возможно только в случае, когда влияние трения у стенки несущественно. Поэтому следует принять, что в местах, где нарушается условие прилипания, жидкость движется без внутренних деформаций, т. е. в системе координат, жестко связанной с поверхностью раздела, жидкость в окрестности точки E неподвижна.

Теперь покажем, что окрестность особой точки E , в которой жидкость неподвижна, имеет конечные размеры, зависящие от параметра размерности длины $\sqrt{\sigma/\rho g}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести. Сделаем это в два этапа. Вначале покажем количественно, что конечные размеры имеет неподвижная часть поверхности раздела фаз, а затем — качественно, что область неподвижной жидкости имеет конечный объем.

Предположим, что неподвижная часть поверхности раздела фаз конечных размеров около точки E существует. Примем, что давление p_g воздуха около поверхности везде одинаково, а движение близко к плоскому и происходит в вертикальной плоскости, проходящей через ось трубы. Тогда форму поверхности раздела можно получить из баланса сил давления, обусловленных тяжестью и поверхностным натяжением, записанного для тонкого элемента жидкости, прилегающего к поверхности, в виде

$$\rho g dy + \sigma d(1/r) = 0 \quad (2.1)$$

где y — вертикальная координата, отсчитываемая от верхней образующей трубы вниз, r — радиус кривизны поверхности раздела (для вогнутой поверхности r положительно, для выпуклой — отрицательно).

Поверхность (2.1) конечных размеров может существовать, если удовлетворяются условия на ее границах, т. е. скорость в верхней и нижней граничных точках должна быть нулевой. В верхней точке это условие выдержано. Определим теперь условия в точке F , ниже которой скорость на поверхности раздела начинает отличаться от нуля.

В ближайшей окрестности точки F скорость и ускорение направлены одинаково, но скорость направлена вдоль поверхности раздела, а ускорение — вдоль равнодействующей сил. Следовательно, равнодействующая в точке F направлена вдоль поверхности раздела. Равнодействующая складывается из капиллярной силы, всегда направленной вдоль поверхности, и вертикальной силы тяжести. Значит, поверхность раздела в точке F вертикальна и первое условие на нижней границе имеет вид (в обозначениях фиг. 3) $\beta_f = \pi/2$.

Второе условие (для радиуса кривизны поверхности раздела в точке F) найдем из соображений статической устойчивости. При квазистатических смещениях поверхности должна уменьшаться свободная энергия [6]

$$J = - \int_E^F dx \left(\int_0^y \rho g y dy \right) + \int_E^F \sigma ds \quad (2.2)$$

где x — горизонтальная координата поверхности раздела, $ds = r d\beta$ — элемент длины поверхности, β — угол между горизонталью и касательной к поверхности раздела (фиг. 3, a).

Подставляя уравнение (2.1) и геометрические связи $dy = -rd(\cos \beta)$, $dx = rd(\sin \beta)$ в соотношение (2.2), получим выражение

$$J = - \frac{\sqrt{\rho g}}{\sigma^{1,5}} \int_E^F \left(\frac{\cos \beta}{2} \left(\sqrt{2(\cos \beta_e - \cos \beta_f) + \frac{1}{R_f^2} - \frac{1}{R_f}} \right)^2 - 1 \right) \times \\ \times \frac{d\beta}{\sqrt{2(\cos \beta - \cos \beta_f) + 1/R_f^2}} \quad (2.3)$$

где $R_f = r_f \sqrt{\rho g / \sigma}$ — безразмерный радиус кривизны поверхности раздела в нижней граничной точке F . Из выражения (2.3) видно, что при заданных свойствах жидкости и каждом значении угла β подынтегральная функция тем больше (а свободная энергия тем меньше), чем больше радиус r_f . Поэтому устойчивой здесь может быть только форма поверхности, соответствующая бесконечно большому радиусу кривизны, т. е. второе граничное условие в точке F имеет вид $1/r_f = 0$.

Для однозначного интегрирования уравнения (2.1) необходимо еще задать краевой угол β_e в точке E . Краевой угол для воды и стекла при бесконечно медленном оттекании немного превышает 20° , а при достаточно быстром снижается до нуля [7]. По фотографиям непосредственно измерить его не удастся из-за искажений. Однако его можно оценить по длине Δx нависающей части поверхности раздела (фиг. 3, a), полученной интегрированием уравнения (2.1) с использованием геометрических связей и граничных условий в точке F .

Интегрирование дает

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sigma}{2\rho\sigma}} \int_{\beta_e}^{\pi/2} \sqrt{\cos \beta} d\beta \quad (2.4)$$

Полученная таким же способом высота h нависающей части (разница высот точек E и F , фиг. 3, a) выражается формулой

$$h = \sqrt{\sigma/\rho g} \cdot \sqrt{2 \cos \beta_e} \quad (2.5)$$

Отношение $\Delta x/h$ очень чувствительно к краевому углу. При $\beta_e=0$ оно близко к 0,6 при $\beta_e=10^\circ$ — к 0,5, при $\beta_e=20^\circ$ — к 0,4. Величину Δx можно измерить непосредственно (это ширина черной полосы, идущей вдоль поверхности раздела в верхней ее части на фиг. 2, а), величину h — также (см. п. 1). Измерения дают значение $\Delta x/h$, близкое к 0,6, т. е. в опытах краевой угол β_e близок к нулю.

Радиус кривизны поверхности раздела r_e получен интегрированием уравнения (2.1) в виде

$$r_e = \sqrt{\sigma / (2\rho g \cos \beta_e)} \quad (2.6)$$

Величины h и r_e мало чувствительны к краевому углу. При изменении β_e от 0 до 20° они меняются всего на 4%. Расчет по формулам (2.5) и (2.6) для условий опытов с водой при комнатной температуре ($\sigma=7,3 \cdot 10^{-3}$ Н/м², $\rho=10^3$ кг/м³) дает $r_e=1,9 \pm 0,1$ мм, $h=3,8-0,2$ мм. Расчетное значение h близко к опытному $h=3,6 \pm 0,3$ мм.

Итак, при вытекании воды из горизонтальной трубы непосредственно у ее верхней образующей имеется нависающий участок поверхности раздела фаз конечных размеров, на котором жидкость неподвижна (EF на фиг. 3, а).

Покажем, что около этого участка существует застойная зона конечного объема, прилегающая к стенке трубы. Воспользуемся следующими двумя положениями. Во-первых, примем, что влиянием завихренности на движение около точки E можно пренебречь. Основанием для этого служит хорошее схождение с результатами опытов расчета, проведенного в следующем пункте, где принято, что влияние вязкости несущественно и распределение скоростей в поперечных сечениях трубы перед и за точкой E равномерное. Из принятого предположения и интеграла Бернулли уравнений движения жидкости следует, что полное давление $p_0 = p - \rho g y + \frac{1}{2} \rho w^2$, где p — давление в данной точке жидкости, w — скорость жидкости в этой точке, одинаково во всем объеме жидкости. Следовательно, там, где скорость меньше, сумма весового давления ($-\rho g y$) и давления p , называемая приведенным давлением [8], оказывается большей. Максимальное приведенное давление будет там, где жидкость неподвижна.

Во-вторых, учтем, что если линии тока жидкости изогнуты и движение стационарно, то, как следует из уравнений движения, приведенное давление увеличивается в направлении выпуклости линий тока из-за центробежной силы.

Предположим теперь, что около поверхности раздела EF (фиг. 3, а) нет неподвижной области. Тогда линии тока, близкие к поверхности раздела, должны приблизительно повторять ее форму, т. е. быть вогнутыми. В этом случае приведенное давление, как следует из второго положения, должно увеличиваться с удалением от поверхности раздела в жидкость. В то же время в соответствии с первым положением на самой поверхности раздела жидкость неподвижна и приведенное давление должно быть максимальным. Из полученного противоречия следует, что линии тока около поверхности раздела должны быть не вогнутыми, а выпуклыми, т. е. знаки кривизны их и поверхности раздела должны быть разными. Поскольку длина неподвижной части поверхности раздела конечна, то и знаки кривизны разные на конечном участке. Следовательно, между линиями тока и поверхностью раздела должна лежать область неподвижной жидкости конечного объема (EFF' на фиг. 3, а).

3. Стационарное вытекание жидкости. Рассчитаем скорость стационарного движения поверхности раздела фаз. Для этого рассмотрим контрольный объем жидкости $ABCDEF$ (фиг. 3, а), ограниченный стенками трубы (линии BC и DE), внутренней стороной поверхности раздела фаз (линия EFA) и двумя поперечными сечениями трубы (линии AB и CD), расположенными так далеко от точки контакта E , что скорость жидкости в каждом сечении можно считать везде одинаковой. Примем, что поверх-

ность раздела фаз цилиндрическая с горизонтальной образующей, перпендикулярной оси трубы. Примем также, что вязкость не влияет на течение жидкости.

Влияние поверхностного натяжения на вытекание жидкости сказывается двояким образом. Во-первых, из-за наличия застойной зоны у верхней образующей трубы, верхняя линия тока, проходящая через точку D , выходит в область, где давление равно давлению в газе не в точке E , а в более низкой точке F . В результате снижается давление в точке D и во всем сечении CD . Во-вторых, на участке EF поверхности раздела, ограничивающем застойную зону, давление ниже, чем в газе. Это создает дополнительную силу давления на контрольный объем.

Используем следующие уравнения: уравнение сохранения массы для контрольного объема (3.1), уравнения Бекулли для отрезков линий тока DF (3.2) и FA (3.3) и уравнение импульсов для контрольного объема в проекции на ось трубы (3.4)

$$C_1 = aC_2 \quad (3.1)$$

$$p_d + \rho g d + \frac{1}{2} \rho C_1^2 = \rho g (d - h) \quad (3.2)$$

$$\rho g (d - h) = \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho C_2^2 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(p_d + \frac{1}{2} \rho g d \right) \pi d^2 + \frac{1}{4} \rho C_1^2 \pi d^2 = \\ & = \int_{d=h_2}^d \rho g (h_2 - d + y) b dy - \int_0^h \rho g (h - y) b dy \pm \frac{1}{4} \rho C^2 a \pi d^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где C_2 и C_1 — скорости в сечениях AB и CD , a — отношение площадей сечений, p_d — давление в точке D , d — диаметр трубы, h_2 — высота сечения AB , b — местная ширина сечения. Применим геометрические соотношения для круглой трубы (фиг. 3, а)

$$y = \frac{1}{2} d (1 - \cos \alpha), \quad b = d \sin \alpha, \quad a_1 = (\alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1) / \pi, \quad (3.5)$$

$$a_2 = (\pi - \alpha_2 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_2) / \pi$$

где a_1 — отношение площади поперечного сечения застойной зоны к площади сечения трубы. Введем параметры $Fr = C_1^2 / g d$, $\Sigma = \sqrt{\sigma / \rho g d^2}$. Тогда из всех предыдущих зависимостей и условий этой статьи получим расчетную систему уравнений

$$2\sqrt{2}(1 - a_2)^2 \Sigma^{-2/3} \pi \sin^3 \alpha_1 + a_1 \cos \alpha_1 - (1 - a_2)^2 - a_2(1 - a_2) \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} \Sigma \sin^3 \alpha_2 = 0 \quad (3.6)$$

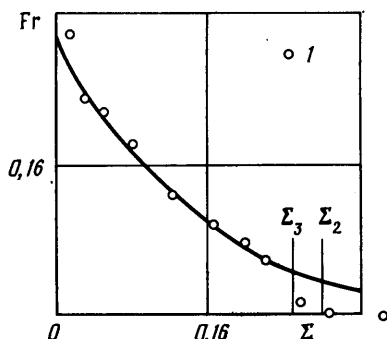
$$Fr = a_2^2 (1 - \cos \alpha_2 - 2\sqrt{2}\Sigma), \quad \alpha_1 = \arccos(1 - 2\sqrt{2}\Sigma)$$

Результаты численного расчета по уравнениям (3.6) показаны на фиг. 4 в виде зависимости $Fr = Fr(\Sigma)$ сплошной линией. Цифрой 1 обозначены опытные результаты [1]. При $\Sigma = 0$ результат совпадает с решением [2]. При $\Sigma < 0,25$ все, кроме одной ($\Sigma = 0,016$), опытные точки ложатся на расчетную кривую. При $\Sigma = 0,016$ — минимальном значении в опытах [1] — опытное значение числа Фруда превышает расчетное примерно на 15%. Возможно, это расхождение объясняется тем, что опытная точка получена на слишком короткой трубе (диаметр 178 мм, длина 1 м, отношение длины к диаметру 5,6) и стационарная скорость вытекания не успевала установиться. При $\Sigma \geq 0,25$, как отмечается в [1], стационарный режим вытекания сменяется пульсирующим. Таким образом, в целом совпадение расчетных и опытных данных для стационарного вытекания можно признать хорошим.

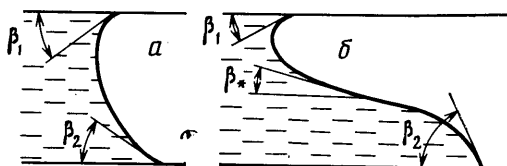
4. Прекращение вытекания. Прекращение вытекания должно быть обусловлено тем, что на всей поверхности раздела фаз капиллярное давление уравнивает силу тяжести, т. е. справедливо уравнение (2.1). Если принять, что на всей поверхности существует вогнутый мениск (фиг. 5, а и 2, б), то из (2.1) следует монотонное увеличение радиуса кривизны с ростом y (вниз). Минимальное значение параметра $\Sigma = \Sigma_1$, при котором мениск может оставаться в равновесии, достигается при бесконечном радиусе кривизны в нижней точке. В этом случае из (2.1) следует

$$\Sigma = 1/\sqrt{2(\cos \beta_1 + \cos \beta_2)} \quad (4.1)$$

где β_1 и β_2 — краевые углы сверху и снизу. Принимая предельные статические значения углов $\beta_1 = \beta_2 = 22^\circ$, получим $\Sigma_1 = 0,52$. В опытах [1] вытекание прекращается при меньших значениях Σ , расположенных между 0,29 и 0,35. Причина расхождения состоит в том, что, как показали наблюде-



Фиг. 4



Фиг. 5

ния, при $\Sigma < \Sigma_1$ меняется форма статической поверхности раздела. Она становится вогнутой сверху и выпуклой снизу (фиг. 5, б и 2, в). Минимальное значение Σ в этом случае

$$\Sigma = (\sqrt{2}(\sqrt{\cos \beta_1 + \cos \beta_*} + \sqrt{\cos \beta_* - \cos \beta_2}))^{-1} \quad (4.2)$$

где β_* — угол между поверхностью раздела и горизонталью в точке перегиба поверхности раздела. Подставляя предельные значения углов $\beta_1 = 22^\circ$, $\beta_2 = 67^\circ$ и $\beta_* = 0$, получим $\Sigma = \Sigma_2 = 0,28$, что близко к опытному значению (фиг. 4).

При форме поверхности раздела, соответствующей фиг. 5, б, значения $\Sigma < \Sigma_2$ в уравнении (4.2) можно получить только при краевых углах меньших, чем предельные статические. Тогда возникнет ползущее течение, при котором выполняется условие прилипания [7, 9]. Предельно низкое значение Σ для такого течения соответствует нулевым краевым углам ($\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 180^\circ$) и $\beta_* = 0$ и составляет $\Sigma_3 = 0,25$, что близко к значению, при котором в опытах [1] резко снижалась скорость вытекания и начинались пульсации. Пульсации объясняются, видимо, несогласованностью скоростей натекания и оттекаания при ползущем течении.

Итак, при свободном вытекании смачивающей жидкости из первоначально заполненной горизонтальной трубы, открытой с одного конца, существует два режима течения: инерционный (см. п. 1, 2, 3) при $0 < \Sigma < 0,25$ и ползущий при $0,25 \leq \Sigma < 0,28$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zukoski E. E.* Influence of viscosity, surface tension and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 25. Pt 4. P. 821–837.
2. *Benjamin T. B.* Gravity currents and related phenomena // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 31. Pt 2. P. 209–248.
3. *Von Karman T.* The engineer grapples with nonlinear problems // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1940. V. 46. № 8. P. 615–683.
4. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
5. *Bendiksen K. H.* On motion of long bubbles in vertical tubes // *Intern. J. Multiphase Flow.* 1985. V. 11. № 6. P. 797–812.
6. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
7. *Воинов О. В.* Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // *ПМТФ.* 1977. № 2. с. 92–99.
8. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 184 с.
9. *Дэвис С.* Задачи с линиями контакта в механике жидкости // *Успехи прикл. механики.* М.: Мир, 1986. С. 85–101.

Москва

Поступила в редакцию
30.1.1987