

УДК 532.527

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОАКСИАЛЬНЫХ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

ГУРЖИЙ А. А., КОНСТАНТИНОВ М. Ю., МЕЛЕШКО В. В.

Задачи о движении тонких круговых вихревых колец в идеальной жидкости принадлежат к числу наиболее интересных проблем в динамике завихренности. С момента опубликования основополагающей в этом направлении работы Г. Гельмгольца [1] постоянный интерес к ним был обусловлен не только внутренней красотой задач, но и прямым применением полученных при их решении результатов к объяснению природы различных физических явлений. Здесь можно указать как на попытку В. Томсона (лорда Кельвина) создать в конце прошлого века вихревую модель атома [2], так и на современные исследования когерентных структур в турбулентных струях, сверхтекучих жидкостях и следах за летящими птицами [3–5].

Решение задачи в общем случае нескольких произвольно ориентированных вихревых колец наталкивается на огромные математические трудности и в настоящее время отсутствует. Важный частный случай коаксиальных тонких вихревых колец представляется более доступным для математической трактовки и анализа результатов. Особенно это относится к движению двух одинаковых колец. Качественно картина такого движения, заключающаяся в попеременном чередовании («чехарде») вихревых колец с соответствующими расширением и сужением их радиусов, впервые также описана в работе [1]. Хотя такое описание процесса взаимодействия двух колец почти дословно повторялось в различных учебниках по гидромеханике (см., например, [6–8]), количественно данное явление исследовано в целом недостаточно полно.

В чрезвычайно интересной, но в настоящее время почти полностью забытой работе [9] (имеющиеся в классической монографии [6] ссылки на этот обширный трактат не дают представления о всем богатстве его содержания) приведен подробный вывод и исследование уравнений движения нескольких тонких коаксиальных колец. В ней найдены два интеграла уравнений движения, при помощи которых получены количественные результаты для ряда конкретных ситуаций. В работах [10–12] рассмотрены частные случаи движения системы двух вихревых колец, однако они не дали представления об общей картине их движения и взаимодействия. В первую очередь это относится к анализу задачи при любых начальных условиях расположения колец произвольной циркуляции. Кроме того, отсутствуют четко сформулированные условия возможной чехарды двух произвольных колец.

Наряду с количественными данными об абсолютном движении нескольких коаксиальных вихревых колец значительный интерес представляют и результаты, характеризующие их относительное движение, — в частности, зависимость радиусов колец от расстояния между ними. Принципиально важно то, что такой количественный анализ в случае двух колец может быть полностью проведен без явного интегрирования по времени нелинейных уравнений движения. Определение относительных траекторий движения двух произвольных колец и условий их взаимной игры с использованием двух инвариантов вихревых колец в идеальной безграничной жидкости составляет основную цель данной работы.

1. Пусть в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, имеется N тонких круговых вихревых колец с радиусами $R_i(t)$ и равномерной завихренности с интенсивностями κ_i . Центры колец $Z_i(t)$ расположены на одной линии, совпадающей с осью цилиндрической системы координат r, φ, z . Предполагается, что в процессе движения каждое кольцо сохраняет круговое сечение малого радиуса $a_i(t) \ll R_i(t)$.

Скорость движения i -го кольца состоит из самоиндуцированной скорости u_i^c изолированного кольца и наведенной скорости u_i^h со стороны ос-

талльных $N - 1$ колец. Самоиндуцированная скорость имеет радиальную и осевую компоненты

$$u_{r,i}^o = 0, \quad u_{z,i}^o = \frac{\kappa_i}{4\pi R_i} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right)$$

Компоненты наведенной скорости вычисляются согласно закону Био — Савара [13], причем вихревые кольца могут рассматриваться как круговые вихревые нити интенсивности κ_j . Используя выражения для функции тока одиночной j -й круговой нити [8] можно записать

$$u_{r,i}^n = -\frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial Z_i} \sum_{j=1}^N \psi_j(R_i, Z_i), \quad u_{z,i}^n = \frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial R_i} \sum_{j=1}^N \psi_j(R_i, Z_i)$$

$$\psi_j(R_i, Z_i) = \frac{\kappa_j}{2\pi} \sqrt{R_i R_j} \left[\left(\frac{2}{k_{ij}} - k_{ij} \right) K(k_{ij}) - \frac{2}{k_{ij}} E(k_{ij}) \right]$$

$$k_{ij}^2 = \frac{4R_i R_j}{(R_i + R_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; штрих в знаке суммирования означает $j \neq i$.

Тогда уравнения движения вихревых колец с учетом постоянства их объема имеют следующий вид:

$$\dot{R}_i = -\frac{1}{\kappa_i R_i} \frac{\partial U}{\partial Z_i} \quad (1.1)$$

$$\dot{Z}_i = \frac{\kappa_i}{4\pi R_i} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\kappa_i R_i} \frac{\partial U}{\partial R_i}$$

$$a_i^2 R_i = \text{const} \quad (1.2)$$

$$U = \sum_{i>j}^N \kappa_i \sum_{j=1}^N \psi_j(R_i, Z_i)$$

Записанные в таком виде уравнения (1.1) отражают, на первый взгляд, лишь кинематику процесса. Однако аналогично плоскому случаю точечных вихрей [14] можно показать, что эти уравнения следуют из динамических уравнений Гельмгольца для завихренности.

Нелинейная система уравнений (1.1) обладает двумя независимыми инвариантами. Первый получается непосредственно из структуры функции U , зависящей лишь от разности $Z_i - Z_j$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^N \partial U / \partial Z_i = 0$,

и, согласно первому из уравнений (1.1), $\sum_{i=1}^N \kappa_i R_i \dot{R}_i = 0$. Отсюда имеем

$$\sum_{i=1}^N \kappa_i R_i^2 = \text{const} \quad (1.3)$$

Сумма (1.3) с точностью до постоянного множителя совпадает с импульсом поля течения, обусловленного наличием системы вихревых колец [8]. Уравнение (1.3), выражающее закон сохранения импульса для данного типа движения, установлено в [4]. Отметим, что запись данного закона в представленном виде справедлива как для модели идеальной жидкости, так и для течений с учетом вязкости [15].

Второй инвариант впервые установлен в упомянутом мемуаре [9] следующим образом. Умножая первое уравнение в (1.1) на $\kappa_i R_i \dot{Z}_i$, а второе — на $\kappa_i R_i \dot{R}_i$, определяем разность полученных выражений и, проводя суммирование по индексу, приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^N \frac{\kappa_i^2 \dot{R}_i}{4\pi} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial R_i} \dot{R}_i + \frac{\partial U}{\partial Z_i} \dot{Z}_i \right) = 0$$

Учитывая (1.2) и отсутствие явной зависимости функции U от времени, получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^N \frac{\kappa_i^2 R_i}{4\pi} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{7}{4} \right) + U = \text{const} \quad (1.4)$$

В этом инварианте слагаемые под знаком суммы выражают (с точностью до постоянного множителя) кинетическую энергию жидкости, обусловленную изолированными вихревыми кольцами, а функция U — кинетическую энергию, связанную с их взаимодействием. Запись закона сохранения энергии в виде (1.4) справедлива только в рамках модели идеальной жидкости [15]. Отметим, что принципиальная возможность существования интеграла энергии отмечалась еще в работе [16], а затем в недавних публикациях [17, 18]. При этом использовалось представление уравнений (1.1) в гамильтоновой форме с каноническими переменными $p_i = \kappa_i R_i^2$, $q_i = Z_i$, однако в явном виде гамильтониан записан не был.

В важном частном случае взаимодействия двух произвольных вихревых колец инварианты (1.3) и (1.4) позволяют определить их радиусы R_1 и R_2 в зависимости от расстояния $Z = Z_1 - Z_2$ между ними, не прибегая к интегрированию по времени нелинейной системы (1.1). Использование лишь одного инварианта (1.3), как это сделано в работах [11, 12], приводит к необходимости решения дифференциального уравнения для нахождения указанных зависимостей.

2. Рассмотрим два произвольных коаксиальных тонких вихревых кольца, имеющих в начальный момент времени параметры κ_1 , a_1° , R_1° и κ_2 , a_2° , R_2° соответственно и находящихся на расстоянии $Z_0 = Z_2^\circ - Z_1^\circ$ друг от друга. Для определенности будем считать, что $Z_1^\circ \leq Z_2^\circ$.

Запишем инварианты (1.3) и (1.4) в безразмерном виде, пронормировав все линейные параметры на величину R_2° . С учетом соотношений (1.2), позволяющих исключить величины a_i , получаем

$$\chi \rho_1^2 + \rho_2^2 = \chi \rho_0^2 + 1 \quad (2.1)$$

$$\chi^2 \rho_1 \left(\frac{3}{2} \ln \rho_1 + B_1 - \frac{3}{2} \ln \rho_0 \right) + \rho_2 \left(\frac{3}{2} \ln \rho_2 + B_2 \right) +$$

$$+ 2\chi \sqrt{\rho_1 \rho_2} C(k) = \chi^2 \rho_0 B_1 + B_2 + 2\chi \sqrt{\rho_0} C(k_0) \quad (2.2)$$

$$\rho_i = \frac{R_i}{R_2^\circ}, \quad B_i = \ln 8n_i^\circ - \frac{7}{4}, \quad n_i^\circ = \frac{R_i^\circ}{a_i^\circ}, \quad i=1, 2$$

$$\xi = \frac{Z}{R_2^\circ}, \quad k^2 = \frac{4\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 + \xi^2}, \quad k_0^2 = \frac{4\rho_0}{(\rho_0 + 1)^2 + \xi_0^2}$$

$$\rho_0 = \frac{R_1^\circ}{R_2^\circ}, \quad \xi_0 = \frac{Z_0}{R_2^\circ}, \quad \chi = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

$$C(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) \mathbf{K}(k) - \frac{2}{k} \mathbf{E}(k)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) связывают три переменные величины ρ_1 , ρ_2 , ξ и дают возможность построить фазовые траектории движения системы двух произвольных вихревых колец $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$.

В случае положительных значений χ оба кольца имеют одинаковую по направлению завихренность и, следовательно, существует возможность их попеременного чередования (чехарды). При этом представляет интерес определение области допустимых начальных значений ξ_0 , ρ_0 , при которых для заданного χ упомянутая чехарда имеет место.

В [10] отмечено, что взаимная чехарда колец независимо от начального удаления ξ_0 возможна только в том случае, когда на бесконечности кольца имеют одинаковые самоиндуцированные скорости. В противном случае либо заднее кольцо не догонит переднее, либо (в силу симметрии задачи по z) заднее кольцо догонит переднее, пройдет сквозь него, но после этого расстояние между ними будет неограниченно увеличиваться. Исходя из требования равенства скоростей колец на бесконечности, можно для любого положительного значения χ определить область допустимых начальных значений (ξ_0 , ρ_0), при которых кольца будут образовывать связанную систему. Обозначая безразмерные радиусы колец на бесконечности $\rho_{1\infty}$ и $\rho_{2\infty}$ соответственно, находим, что для данного ξ_0 область допустимых для чехарды начальных значений ρ_0 определяют соотношения

$$\frac{\chi}{\rho_{1\infty}} \left(\frac{3}{2} \ln \rho_{1\infty} - \frac{3}{2} \ln \rho_0 + \ln 8n_1^\circ - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{\rho_{2\infty}} \left(\frac{3}{2} \ln \rho_{2\infty} + \ln 8n_2^\circ - \frac{1}{4} \right)$$

$$\chi \rho_{1\infty}^2 + \rho_{2\infty}^2 = \chi \rho_0^2 + 1 \quad (2.3)$$

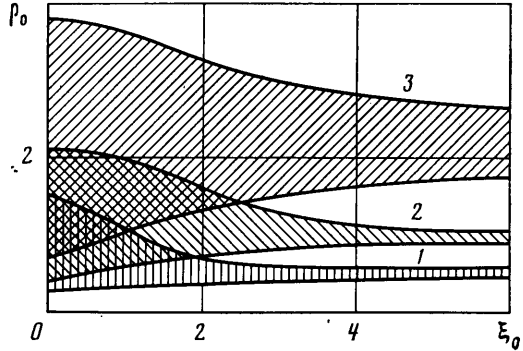
$$\chi^2 \rho_{1\infty} \left(\frac{3}{2} \ln \rho_{1\infty} + B_1 - \frac{3}{2} \ln \rho_0 \right) + \rho_{2\infty} \left(\frac{3}{2} \ln \rho_{2\infty} + B_2 \right) \leq$$

$$\leq \chi^2 \rho_0 B_1 + B_2 + 2\chi \sqrt{\rho_0} C(k_0)$$

Неравенство в последнем соотношении (2.3) обусловлено (с учетом неотрицательности функции $C(k)$) тем физически ясным обстоятельством, что подведенная к системе начальная энергия не должна быть меньше энергии вихревых колец на бесконечном удалении. Нетрудно показать, что соотношения (2.3) независимо от значения ξ_0 выполнены при значениях

$$\rho_{1\infty} = \rho_0^* = \chi \frac{\ln 8n_1^\circ - 1/4}{\ln 8n_2^\circ - 1/4}, \quad \rho_{2\infty} = 1$$

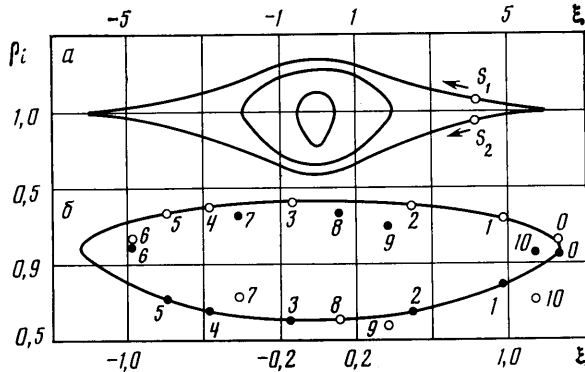
Таким образом, прямая $\rho_0 = \rho_0^*$ всегда принадлежит области допустимых для игры параметров колец.



Фиг. 1

В дальнейшем при расчетах принималось $n_1^\circ = n_2^\circ = 100$. Изменение этих величин в весьма широких пределах (при сохранении условий тонкости колец) не приводит к существенным различиям в характере движения. На фиг. 1 заштрихованы области 1–3 допустимых для чехарды двух колец начальных параметров ξ_0 , ρ_0 соответственно для значений $\chi = 0,5$; 1; 2. Видно, что площадь области увеличивается с ростом χ и взаимная чехарда возможна при любом положительном χ . Эти данные обобщают результаты работ [9, 10], полученные для частного случая колец одинаковой интенсивности ($\chi = 1$), равного объема и расположенных в начальный момент времени в одной плоскости ($\xi_0 = 0$). В современной литературе [19] результаты [9, 10] имеют название теоремы Дайсона.

Существо процесса взаимодействия колец при $\chi > 0$ рассмотрим на двух характерных примерах. Первый является классическим случаем взаимодействия двух одинаковых по интенсивности колец ($\chi=1$), имеющих одинаковые начальные радиусы ($\rho_0=1$) и объемы ($n_1^0=n_2^0=100$). В этом случае, как показано в [9], $\xi_{\max}=\xi_0$. Фигура 2, а [20] иллюстрирует зависимости $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$ для трех начальных значений ξ_0 , характеризующих по существу начальную энергию взаимодействия колец. Чем больше величина этой энергии, тем на меньшее расстояние отходят кольца друг от друга. Фазовые траектории $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$ в этом случае совпадают и дви-

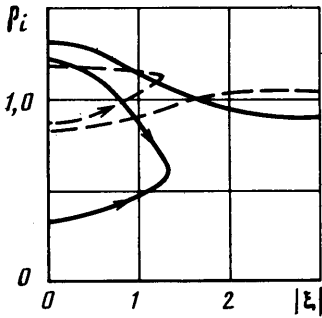


Фиг. 2

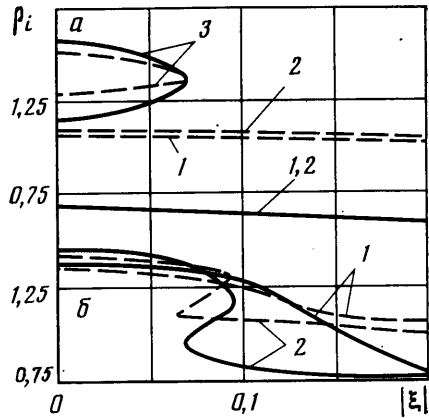
жение первого кольца (точка S_1) происходит по часовой стрелке, а второго (точка S_2) — против.

Фигура 2, б позволяет сделать некоторые выводы о применимости модели идеальной жидкости для качественных оценок движения системы колец. Здесь для сравнения с теоретическими кривыми, вычисленными по (2.1), (2.2), приведены результаты тщательно проделанной экспериментальной работы [21], в которой исследовалось взаимодействие двух дымовых колец ($\rho_0=1$, $\xi_0=1,23$) в воздухе при $Re=1710$. Последовательное положение радиусов колец, полученных в эксперименте, обозначено одинаковыми цифрами для одних и тех же моментов времени. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает, что движение системы по крайней мере в течение первой четверти периода обращения удовлетворительно описывается в рамках модели идеальной жидкости. В дальнейшем начинает сказываться влияние вязкости, уменьшается период обращения колец и максимальное расстояние между ними. Тем не менее качественно картина одного полного обращения колец при указанных числах Re удовлетворительно предсказывается теорией идеальной жидкости. Любопытно отметить, что первоначальные эксперименты [22] с двумя вихревыми кольцами в жидкости полностью опровергали традиционные представления о чехарде колец.

При положительных значениях $\chi \neq 1$ наблюдается иная картина движения. Фазовые траектории $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$ уже не совпадают. В результате расчетов для различных сочетаний ρ_0 и ξ_0 установлено, что независимо от начальных параметров движения при выполнении условий чехарды заднее кольцо обязательно проскакивает внутри переднего, для чего ему иногда приходится двигаться в направлении, обратном основному движению. На фиг. 3 (приведены только правые части фазовых траекторий вследствие симметрии относительно линии $\xi=0$) показан пример движения, когда заднее кольцо имеет меньшую интенсивность и скорость движения по сравнению с передним ($\chi=0,5$, $\rho_0=1$). Тем не менее в опреде-



Фиг. 3



Фиг. 4

ленном интервале значений ξ_0 имеет место чехарда колец. Фазовые траектории $\rho_1(\xi)$ обозначены сплошной линией, а $\rho_2(\xi)$ — штриховой. Движение колец по фазовым траекториям показано стрелками. Начиная с некоторого значения ξ_0 , при данном ρ_0 не наблюдается области взаимной связанности и фазовые траектории не замыкаются.

Когда интенсивности вихревых колец имеют противоположные знаки, т. е. $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 < 0$ и, следовательно, $\chi < 0$, то происходит встречное движение двух вихревых колец. В характерном случае движения двух симметричных колец ($\chi = -1$, $\rho_0 = 1$, $n_1^\circ = n_2^\circ$) происходит неограниченное увеличение их радиусов, причем кольца сближаются, не проскакивая одно через другое. Такое движение достаточно подробно изучено [6, 9, 23] и оно эквивалентно движению вихревого кольца перпендикулярно твердой стенке.

В случае $\chi = -1$, $\rho_0 \neq 1$ симметрия в движении колец отсутствует и они проходят одно через другое. При этом кольцо с меньшей начальной энергией расширяется на большую величину и пропускает внутри себя второе кольцо. Кривые 1 на фиг. 4, а, отвечающие случаю $\chi = -1$, $\rho_0 = 0,5$, показывают эту закономерность.

Качественно картина взаимодействия происходит следующим образом. На больших удалениях колец энергия взаимодействия U близка к нулю и движение колец происходит практически без изменения их размеров. При сближении колец величина U растет, что приводит, из-за отрицательности χ , к уменьшению собственной энергии колец. Скорости их движения при этом уменьшаются, а радиусы увеличиваются, причем кольца с меньшей начальной энергией более чувствительны к изменениям, чем кольца с большей энергией.

Аналогичная картина наблюдается и для $\chi \neq -1$ (кривые 2 на фиг. 4, а, отвечающие случаю $\chi = -0,6$, $\rho_0 = 0,5$, $\xi_0 = 100$). Однако несколько неожиданным является в этом случае наличие замкнутых фазовых траекторий 3. Точки, лежащие на них, формально являются корнями системы (2.1), (2.2). Однако фактически такой режим движения при соответствующих начальных значениях χ , ρ_0 , ξ_0 является нереализуемым. Детальный анализ показал, что кривые 2 и 3 соединяются при $\xi_0 = 0$ на плоскости чисто мнимых значений ρ_1 и ρ_2 . Для понимания этой необычной ситуации следует обратиться к данным фиг. 4, б. На ней кривые 1 отвечают значениям $\chi = -0,4$, $\rho_0 = 0,5$, $\xi_0 = 100$, а кривые 2 — $\chi = -0,5$, $\rho_0 = 0,5$, $\xi_0 = 100$. Видно, что поведение колец при $\chi = -0,4$ достаточно традиционно: при монотонном сближении их радиусы плавно увеличиваются. Совершенно иным оказывается поведение колец при $\chi = -0,5$: при малых ξ фазовые траектории имеют две точки перегиба и участки взаимного удаления колец при уве-

личении их радиусов. Тенденция достаточно ясна: при изменении χ от $-0,5$ до $-0,6$ происходит дальнейшее искривление фазовых траекторий и их разрыв с образованием замкнутой области.

Суммируя изложенное, можно заключить, что система инвариантов (2.1), (2.2) позволяет полностью исследовать относительное движение двух вихревых колец в идеальной жидкости. Выбор разнообразных начальных характеристик движения приводит к поразительной форме фазовых траекторий, особенно для колец с противоположным направлением завихренности.

Ситуация, когда взаимодействует большее число колец, требует дополнительной дискуссии и в настоящее время до конца не ясна. Имеющееся в заметке [17] предположение о стохастизации движения колец нуждается в дальнейшей проработке, связанной с непосредственным интегрированием по времени системы (1.1) при $N=3$. Однако и в этом случае роль интегралов (1.3) и (1.4) остается чрезвычайно важной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Helmholtz H.* Uber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine angew. Math. 1858. B. 55. S. 25–55.
2. *H Thomson W.* On vortex atoms // Phil. Mag. Ser. 4. 1867. V. 34. № 227. P. 15–24.
3. *Acton E.* A modelling of large eddies in an axisymmetric jet // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. № 1. P. 1–31.
4. *Roberts P. H., Donnelly R. J.* Superfluid mechanics // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto, Cal.: Annu Rev. Inc. 1974. V. 6. P. 179–229.
5. *Rayner J. M. V.* A vortex theory of animal flight // J. Fluid Mech. 1979. V. 91. Pt 4. P. 697–763.
6. *Ламб Г.* Гидродинамика М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
7. *Жуковский Н. Е.* Теоретические основы воздухоплавания // Собр. соч. Т. 6. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 623 с.
8. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
9. *Dyson F. W.* The potential of an anchor ring. Pt 2 // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1893. V. 184. P. 1041–1106.
10. *Hicks W. M.* On the mutual threading of vortex rings // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1922. V. 102. № 714. P. 111–131.
11. *Бояринцев В. И., Левченко Е. С., Савин А. С.* О движении двух вихревых колец // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 176–177.
12. *Бояринцев В. И., Савин А. С., Левченко Е. С.* Численное решение задачи о совместном движении двух соосных вихревых колец // Турбулентные струйные течения: Тез. докл. 5-го Всесоюз. совещ. Таллин: Ин-т термодинамики и электрофизики АН ЭССР, 1985. Ч. 1. С. 222–226.
13. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
14. *Saffman P. G., Meiron D. I.* Difficulties with three-dimensional weak solutions for inviscid incompressible flow // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 8. P. 2373–2375.
15. *Saffman P. G.* The velocity of viscous vortex rings // Stud. Appl. Math. 1970. V. 49. № 4. P. 371–380.
16. *Васильев Н. С.* Приведение уравнений движения круговых вихревых колец, имеющих общую ось, к канонической форме // Зап. мат. отд-ния Новорос. о-ва естествоиспытателей. 1913. Т. 21. С. 1–12.
17. *Novikov E. A.* Hamiltonian description of axisymmetric vortex flows and the system of vortex rings // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 9. P. 2921–2922.
18. *Бругян М. А., Крапивский П. Л.* Движение системы вихревых колец в несжимаемой жидкости // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 503–506.
19. *Oshima Y., Kambe T., Asaka S.* Interaction of two vortex rings moving along a common axis of symmetry // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 38. № 4. P. 1159–1166.
20. *Мелешко В. В., Константинов М. Ю., Гуржий А. А.* Взаимодействие тонких коаксиальных вихревых колец в идеальной жидкости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 4. С. 42–45.
21. *Yamada H., Matsui T.* Mutual slip-through of a pair of vortex rings // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 7. P. 1245–1249.
22. *Maxworthy T.* The structure and stability of vortex rings // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. Pt 1. P. 15–32.
23. *Yamada H., Kohsaka T., Yamabe H., Matsui T.* Flowfield produced by a vortex ring near a plane wall // J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. № 5. P. 1663–1670.

Киев

Поступила в редакцию
20.III.1987