

УДК 532.527

ДВИЖЕНИЕ ИНТЕНСИВНОГО ВИХРЯ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ШАРЕ

СУТЫРИН Г. Г.

Крупномасштабные интенсивные вихри, такие, как кольца пограничных течений [1] и недавно обнаруженные внутритермоклинные вихри [2] в океане или тропические циклоны [3] в атмосфере, отличаются быстрым вращением жидкости с угловой скоростью, намного превышающей завихренность окружающего потока. Расстояние между ними обычно существенно превышает горизонтальные размеры вихрей и время их жизни намного больше периода синоптической изменчивости. В перемещении интенсивных вихрей важную роль играет их взаимодействие с неоднородно завихренным окружающим потоком [4]. На вращающемся шаре изменение параметра Кориолиса с широтой (бета-эффект) является простейшим примером неоднородности распределения потенциальной завихренности в окружающем потоке, создающей возможность для перемещения центра вихря относительно потока и адиабатического затухания вихря из-за излучения волн Россби. В интенсивном вихре за период волны Россби (синоптический период) жидкость успевает совершить большое число оборотов вокруг центра, что поддерживает форму вихря, близкую к круговой, и обеспечивает его долгую жизнь [5].

В данной работе рассматривается эволюция первоначально кругового вихря в зависимости от соотношения его размера и масштаба экранировки — радиуса деформации квазигеострофической однослойной модели на бета-плоскости. Показано, что бета-эффект вызывает перемещение центра вихря за счет волнового дрейфа и вторичных течений дипольной структуры, развитие которых анализируется асимптотическим методом. Найдено, что при увеличении радиуса деформации по отношению к размеру вихря скорость движения его центра по широте становится больше скорости движения по долготе. Получена оценка изменения интенсивности вихря за счет движения его центра по широте.

1. Постановка задачи. Рассмотрим слой однородной жидкости толщиной H на поверхности шара, вращающегося с угловой скоростью Ω . Горизонтальная составляющая скорости течения V считается неизменной по вертикали, так что в невязком приближении мелкой воды в движущихся частицах сохраняется потенциальная завихренность σ [6]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla \sigma = 0; \quad \sigma = \frac{H_0}{H} (f + \xi); \quad f = 2\Omega \sin \theta \quad (1.1)$$

где t — время, f — параметр Кориолиса, θ — широта, $\xi = \text{rot}_z \mathbf{V}$ — вертикальная составляющая относительной завихренности, H_0 — невозмущенная толщина слоя.

В квазигеострофическом приближении скорость выражается через функцию тока ψ , связанную с изменением толщины слоя

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \nabla \psi, \quad \sigma = f + \nabla^2 \psi - \gamma^2 \psi \quad (1.2)$$

$$\psi = \frac{g}{f} (H - H_0), \quad \gamma = \frac{\sqrt{f\sigma}}{V_g}, \quad V_g = \sqrt{gH_0}$$

Здесь \mathbf{k} — единичный вертикальный вектор, g — ускорение силы тяжести, γ^{-1} — масштаб экранировки, V_g — скорость длинных гравитационных волн. При $\gamma^2 \psi \ll \nabla^2 \psi \ll f$ потенциальная завихренность σ мало отличается от невозмущенного значения f и масштаб экранировки определяется радиусом деформации Россби $\gamma^{-1} = V_g/f$.

В начальный момент зададим вихрь с возмущением потенциальной завихренности $\omega = \sigma - f$, сосредоточенным в некоторой области с центром на широте θ_0 . Предполагая, что радиус деформации намного меньше радиуса шара R , запишем уравнение (1.1) в приближении бета-плоскости

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} - \mathbf{u}) \nabla \omega + \beta V_y = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\Omega}{R} \cos \theta_0$$

Здесь используется локальная система координат (x, y) с началом отсчета в центре вихря, перемещающемся со скоростью \mathbf{u} , подлежащей определению. Ось y направлена по широте к полюсу, ось x — по направлению вращения шара (на восток). Центр вихря отождествляется с положением экстремума возмущения потенциальной завихренности, где $\nabla \omega = 0$. При этом из уравнения (1.3) получаем

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_0 (u_x - V_{x0}) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)_0 (u_y - V_{y0}) = \beta \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} \right)_0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)_0 (u_x - V_{x0}) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)_0 (u_y - V_{y0}) = \beta \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)_0$$

где индекс ноль обозначает значения переменных в центре вихря. Отсюда следует, что перемещение центра вихря складывается из переноса со скоростью течения в центре вихря \mathbf{V}_0 и волнового дрейфа, непосредственно связанного с бета-эффектом

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}_0 + \beta \mathbf{c}, \quad c_x = D^{-1} J \left(V_y, \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_0 \quad (1.4)$$

$$c_y = D^{-1} J \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}, V_y \right)_0, \quad J(a, b) \equiv \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$$

$$D = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)_0 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)_0^2$$

2. Дрейф кругового вихря. Скорость течения в осесимметричном вихре выражается в виде

$$\mathbf{V} = (-ay, ax), \quad a = \frac{1}{r} \frac{d\psi_B}{dr}, \quad \omega_B = 2a + r \frac{da}{dr} - \gamma^2 \psi_B$$

Здесь a — угловая скорость вращения жидкости, r — расстояние от центра вихря, ω_B — возмущение потенциальной завихренности в соответствии с (1.2). В центре вихря течения нет и из соотношений (1.4) вытекает, что дрейф кругового вихря происходит по долготе

$$c_x = \frac{a_0}{b_0} = - \frac{1}{\gamma^2 + 8\lambda} < 0, \quad c_y = 0 \quad (2.1)$$

$$b = \frac{1}{r} \frac{d\omega_B}{dr}, \quad \lambda = - \frac{1}{a_0} \left(\frac{da}{ds} \right)_0, \quad s = r^2$$

Поскольку знаки a и b различны, скорость волнового дрейфа направлена против направления вращения шара (на запад). При монотонном распределении угловой скорости вращения $\lambda > 0$ и скорость дрейфа не превышает максимальной фазовой скорости линейных волн Россби $u_R = \beta \gamma^{-2}$. Для вихря с однородным ядром возмущения потенциальной завихренности $\omega_B = \omega_0$ при $r < L$ и $\omega_B = 0$ при $r \geq L$ скорость дрейфа определяется интегри-

рованием уравнения (1.3) по площади ядра

$$c_x = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^L ar \, dr = \frac{\psi_B(0) - \psi_B(L)}{\omega_0} \quad (2.2)$$

В этом случае при отсутствии экранировки ($\gamma=0$) $\omega_0=2a_0$ и выражение (2.2) дает $c_x=L^2/4$ в соответствии с результатами [7].

Для стационарного перемещения кругового вихря необходимо, чтобы адвекция планетарной завихренности βV_y на всей бета-плоскости компенсировалась волновым дрейфом центра вихря на запад

$$u \nabla \omega_B = \beta V_y = \beta ax \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что $c_x b = a$; это условие выполняется в центре вихря согласно (2.1). Для всей области соотношение (2.3) дает уравнение Бесселя

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \kappa^2 \right) \psi_B = 0, \quad \kappa^2 = 8\lambda$$

Единственное регулярное решение этого уравнения $\psi_B = J_0(\kappa r)$ указано в [7], однако оно не является локализованным (энергия вихря бесконечна). Таким образом, в рассматриваемом квазигеострофическом приближении локализованный круговой вихрь с масштабом, не превышающим радиус деформации, не может оставаться осесимметричным и стационарно перемещаться на вращающемся шаре.

В исходном приближении мелкой воды толщина слоя входит в знаменатель выражения для потенциальной завихренности σ (1.1), так что условие стационарного перемещения кругового вихря отличается от (2.3)

$$Hu \nabla \omega_B = H_0 \beta V_y \quad (2.4)$$

Здесь учитывается, что возмущение потенциальной завихренности отличается от осесимметричного за счет изменения параметра Кориолиса в числителе выражения для σ , при этом

$$H \nabla \nabla \omega_B = \beta V_y (H_0 - H) \quad (2.5)$$

Уравнению (2.4) соответствует однопараметрическое семейство антициклонов с масштабом, превышающим радиус деформации [8]. Толщина слоя в антициклоне больше невозмущенной и адвекция планетарной завихренности с учетом (2.5) для этого семейства полностью компенсируется волновым дрейфом. Такой антициклон при $\beta \ll \gamma \omega_B$ остается осесимметричным и перемещается на запад быстрее линейных волн Россби ($u_x < -u_R$), что подтверждается численным моделированием [9]. Других примеров круговых вихрей, в частности циклонов, стационарно перемещающихся на вращающемся шаре, нет.

3. Перенос центра вихря дипольным течением. Пусть $\psi - \psi_B = \beta h$ — функция тока вторичного течения, образующегося под действием бета-эффекта, $\omega - \omega_B = \beta q$ — соответствующее возмущение потенциальной завихренности. Для описания эволюции q из уравнения (1.3) имеем

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a \frac{\partial q}{\partial \varphi} - b \frac{\partial h_*}{\partial \varphi} + ax = \beta F \quad (3.1)$$

$$F = J(q, h_*) - \frac{\partial h}{\partial x}, \quad h_* = h - r \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_0 - xc_y + yc_x$$

Здесь h описывает вторичное течение относительно центра вихря, φ — азимутальный угол. Представим q и h в виде рядов Фурье

$$q = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} q_n(r, t) r^n e^{-in\varphi}, \quad h = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(r, t) r^n e^{-in\varphi}$$

Комплекснозначные функции q_n и h_n связаны уравнением Бесселя (3.2), вытекающим из (1.2), и его решение, ограниченное при $r=0$ и $r \rightarrow \infty$, выражается через модифицированные функции Бесселя

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2n+1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 \right) h_n = q_n \quad (3.2)$$

$$r^n h_n = - \int_0^{\infty} G_n(r, \rho) q_n(\rho) \rho^{n+1} d\rho \quad (3.3)$$

$$G_n = \begin{cases} I_n(\gamma r) K_n(\gamma \rho), & \rho \leq r \\ I_n(\gamma \rho) K_n(\gamma r), & \rho > r \end{cases}$$

При этом скорость течения в центре вихря определяется одной лишь первой азимутальной гармоникой h_1 , которая описывает дипольную часть вторичного течения

$$V_{x0} + iV_{y0} = i\beta h_1(0) = \frac{-i\beta\gamma}{2} \int_0^{\infty} K_1(\gamma r) q_1(r) r^2 dr \quad (3.4)$$

Вследствие нелинейности правой части уравнения (3.1) эволюция различных азимутальных гармоник взаимосвязана. Однако на временах, малых по сравнению с характерным периодом волны Россби $t_R = \gamma/\beta$, правая часть уравнения (3.1) остается намного меньше ax и его решение ищем в виде ряда по $\tau = \beta t/\gamma$. В первом приближении с точностью до τ из уравнения (3.1) следует, что развивается лишь первая азимутальная гармоника

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} - iAq_1 = c_x b - a \quad (3.5)$$

$$Aq_1 = aq_1 + b \int_0^{\infty} \left[G_1(r, \rho) - \frac{\gamma}{2} K_1(\gamma \rho) \right] q_1(\rho) \rho^2 d\rho$$

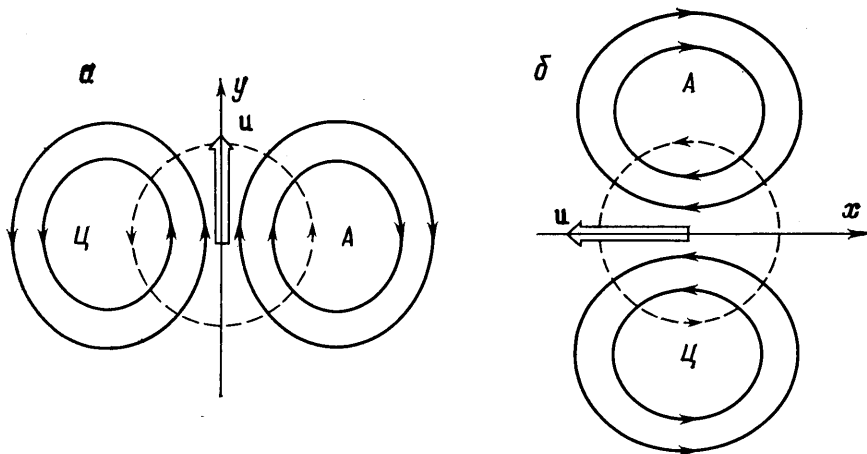
Здесь A — интегральный несамосопряженный линейный оператор, βc_x — скорость волнового дрейфа, определяемая согласно (2.1). Поскольку a и b связаны уравнением (3.2) при $n=1$, соотношение (3.3) дает

$$c_x = - \frac{\gamma}{2b_0} \int_0^{\infty} K_1(\gamma r) b(r) r^2 dr \quad (3.6)$$

В результате решение уравнения (3.5) с нулевыми начальными условиями можно представить в виде

$$q_1 = i(e^{tA} - 1) \left(1 - \frac{b}{b_0} \right) \quad (3.7)$$

где экспонента от линейного оператора определяется соответствующим рядом Тейлора.



Фиг. 1

4. Образование вторичного течения. На временах, малых по сравнению с периодом вращения жидкости в вихре ($at \ll 1$), выражение (3.7) приближенно описывается первыми членами ряда Тейлора

$$q_1 = t(c_x b - a) - \frac{i}{2} t^2 [a^2 + b(a_{10} - a_1 - c_x a_0)] + O(a^3 t^3) \quad (4.1)$$

где a_1 и a , так же как a и b , связаны уравнением (3.2) при $n=1$, которое запишем в виде

$$4sa'' + 8a' - \gamma^2 a = b, \quad s = r^2 \quad (4.2)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по s . Как видно из выражения (4.1), в первую очередь образуется диполь с меридиональной осью $\text{Re } q_1 \sim at$ (фиг. 1, а). Структура этого диполя определяется адвекцией планетарной завихренности, нескомпенсированной волновым дрейфом, т. е. разностью $c_x b - a$, которую с учетом (4.2) представим в виде

$$c_x b - a = - \frac{4sa'' + 8(\lambda a + a')}{\gamma^2 + 8\lambda} \quad (4.3)$$

Для циклонического вихря ($a > 0$) при монотонном распределении a и a' имеем $a'' > 0$. Поэтому для вихря, в котором угловая скорость вращения убывает с удалением от центра не быстрее, чем $\exp(-\lambda s)$, выражение (4.3) всюду отрицательно и обращается в ноль при $s=0$ и $s \rightarrow \infty$. В соответствии с (3.3) $\text{Re } h_1 > 0$, т. е. к востоку от центра циклона образуется вторичный антициклон, к западу — вторичный циклон (фиг. 1, а). В результате центр основного циклона перемещается к полюсу с ускорением. Эволюция антициклона в квазигеострофическом приближении отличается от эволюции циклона лишь знаком смещения центра вихря по широте.

В следующем приближении по at , как видно из (4.1), вращение жидкости в вихре и перенос вторичным течением осесимметричного возмущения потенциальной завихренности приводят к появлению дипольной составляющей с зональной осью $\text{Im } q_1 \sim a^2 t^2$. При неизменном знаке b и монотонном убывании по радиусу величины $|c_x a - a_1|$ в выражении (4.1) $\text{Im } q_1 < 0$ и, следовательно, $\text{Im } h_1 > 0$. В этом случае независимо от знака вихря к полюсу от его центра образуется вторичный антициклон, к экватору — вторичный циклон. Таким образом, диполь с зональной осью ускоряет перемещение центра вихря на запад в дополнение к волновому дрейфу, что схематически показано на фиг. 1, б.

Близкая картина начального развития вторичного течения была получена в бездивергентной модели ($\gamma=0$) [10] и нашла подтверждение в лабораторных и численных экспериментах на бета-плоскости [11] и на сфере [12].

5. Движение интенсивного вихря. При $\gamma a_0 \gg \beta$ в центральной части вихря ($r < r_1$) жидкость успевает совершить много оборотов ($ta(r_1) \gg 1$) за время t , малое по сравнению с периодом волны Россби ($t \ll \gamma/\beta$). Скорость перемещения центра вихря с учетом выражения (3.7) представим в виде

$$u_x + iu_y = \beta(c_x + ih_{10}) = \beta w \quad (5.1)$$

$$w = \frac{\gamma}{2} \int_0^{\infty} K_1(\gamma r) \left[e^{i\gamma A} \left(1 - \frac{b}{b_0} \right) - 1 \right] r^2 dr$$

Здесь учитывается как перенос вторичным течением, так и волновой дрейф: $w=c_x$ при $t=0$ в соответствии с (3.6).

При неизменном знаке b вихрь является устойчивым [13] и оператор A имеет лишь действительный спектр. Поэтому часть подынтегрального выражения в (5.1), связанная с экспонентой, имеет осциллирующий характер и в среднем за большое число оборотов центральная область вносит вклад в основном в зональное перемещение центра вихря

$$w_1 = -\frac{\gamma}{2} \int_0^{r_1} K_1(\gamma r) r^2 dr = \gamma^{-1} r_1 K_1(\gamma r_1) - \frac{r_1^2}{2} K_0(\gamma r_1) - \gamma^{-2} \approx \begin{cases} -\frac{r_1^2}{4}, & \gamma r_1 \ll 1 \\ -\gamma^{-2}, & \gamma r_1 \gg 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

Вне ядра вихря, в котором сосредоточено возмущение потенциальной завихренности, $b=0$ и $A=a$, причем угловая скорость вращения жидкости выражается через K_1 , как и для точечного геострофического вихря [14]

$$\frac{a}{a_L} = \frac{LK_1(\gamma r)}{rK_1(\gamma L)} \quad (5.3)$$

где a_L — угловая скорость на границе ядра при $r=L$. На периферии при $r \gg r_2$ ($ta(r_2) \sim 1$) вторичное течение находится на начальной стадии развития и приближенно описывается выражением (4.1). Отсюда с учетом (5.3) для вклада периферии в скорость перемещения центра вихря получаем оценку

$$w_2 = \frac{\gamma}{2} \int_{r_2}^{\infty} K_1(\gamma r) \left(iat - \frac{a^2 t^2}{2} \right) r^2 dr = -\frac{r_2^2}{2} \left(\frac{1}{4} + i \ln \gamma r_2 \right) \quad (5.4)$$

$\gamma r_2 \ll 1; \quad |w_2| \ll \gamma^{-2}, \quad \gamma r_2 \gg 1$

Величина r_2 возрастает со временем

$$\frac{r_2}{L} \sim \begin{cases} \sqrt{a_L t}, & \gamma r_2 \ll 1 \\ \ln a_L t, & \gamma r_2 \gg 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

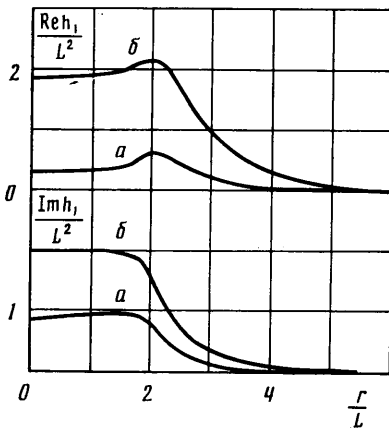
Если радиус ядра намного меньше радиуса деформации ($\gamma L \ll 1$), то вихрь можно рассматривать как точечный. В этом случае, как видно из оценок (5.2) и (5.4), пока $\gamma r_2 \ll 1$, центр вихря перемещается по долготе и широте с ускорением, причем меридиональная скорость растет несколько быстрее зональной за счет вклада периферии. Волнового дрейфа для то-

точного вихря нет и он перемещается за счет вторичного течения, образующегося при адвекции планетарной завихренности орбитальными движениями в вихре. Механизм этого самоиндуцированного движения точечного вихря детально проанализирован в бездивергентной модели ($\gamma=0$) на сфере [4]. Можно сказать, что точечный вихрь является антиподом семейства антициклонов с масштабом, превышающим радиус деформации ($\gamma L > 1$), стационарно перемещающихся за счет волнового дрейфа [8].

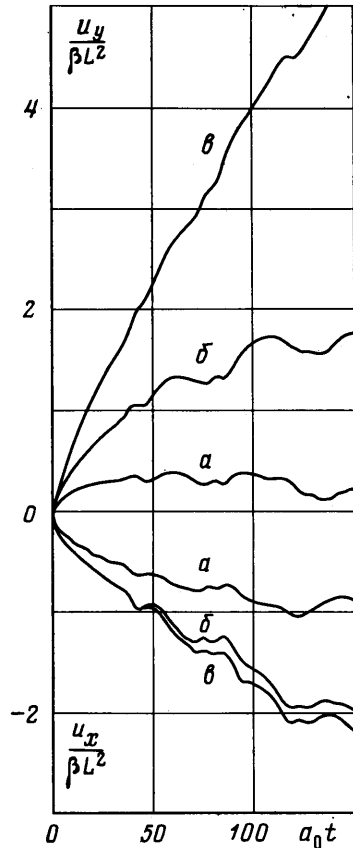
Логарифмическая особенность по γr_2 в выражении (5.4) затрудняет использование бездивергентной модели в приближении бета-плоскости из-за отсутствия экранировки, что отмечалось, например, в [14]. На шаре с радиусом R бездивергентная модель дает аналогичную логарифмическую особенность по r_2/R [15].

При $\gamma L \sim 1$ величина r_2 становится больше радиуса деформации всего лишь за несколько оборотов жидкости в ядре вихря, после чего скорость перемещения центра вихря по широте начинает уменьшаться в соответствии с оценкой (5.4), поскольку влияние нестационарной периферии в этом случае экранируется. Как видно из оценки (5.2), зональная скорость перемещения центра вихря приближается к максимальной фазовой скорости волн Россби u_R . Примером служит фиг. 2, где показана структура вторичного течения через 20 оборотов жидкости в центре вихря при $a = -a_0 \exp(-r^2/L^2)$. Экранировка периферии для $Re h_1$ хорошо заметна при $\gamma L = 1$ (фиг. 2, а) и практически не существенна при $\gamma L = 0,5$ (фиг. 2, б). В последнем случае более слабая экранировка приводит к существенно большей амплитуде вторичного течения.

На фиг. 3 приведена зависимость от времени значений u_x и u_y , опреде-



Фиг. 2



Фиг. 3

ляющих скорость перемещения центра вихря в соответствии с (5.1) при $\gamma L = 1$ (а), 0,5 (б) и 0,1 (в). Видно, что при ослаблении экранировки, т. е. увеличении радиуса деформации по отношению к масштабу вихря, движение центра происходит преимущественно по широте, как и для точечного вихря, что соответствует результатам численных экспериментов [16].

Отметим, что умножение уравнения (3.5) на r^3 и интегрирование его

по r от 0 до ∞ приводит к закону сохранения импульса [17]

$$\frac{dp}{dt} = M[u_R + u_x + iu_y] \quad (5.6)$$

$$p = \iint_{-\infty}^{\infty} (x-iy)\psi dx dy = \pi\beta \int_0^{\infty} h_1 r^3 dr^3$$

$$M = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi dx dy = 2\pi \int_0^{\infty} \psi_B r dr = -\pi \int_0^{\infty} ar^3 dr$$

Известные сильнонелинейные уединенные волны Россби [18–19] определяются стационарным решением уравнения (3.5) и могут перемещаться либо на восток ($u_x > 0$), либо на запад быстрее линейных волн Россби ($u_x < -u_R$). В соответствии с (5.6) стационарные уединенные волны имеют нулевой момент импульса ($M=0$) и содержат диполь с зональной осью, обеспечивающий их перемещение с нужной скоростью в дополнение к волновому дрейфу. Для интенсивного вихря с ненулевым моментом импульса рассмотренное решение (3.7) является существенно нестационарным на периферии и содержит как зональную, так и меридиональную части дипольного вторичного течения.

6. Изменение интенсивности вихря. Подставляя решение уравнения (3.5) в правую часть (3.1), получаем, что в следующем приближении по τ изменяются осесимметричная часть вихря и вторая гармоника q_2

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} = \frac{\beta}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 F_0 \quad (6.1)$$

$$F_0 = \text{Im} [\bar{q}_1 (h_1 - h_{10})] + \text{Re} (c_x q_1 - h_1)$$

Дипольная составляющая вторичного течения в этом приближении остается неизменной, поэтому скорость перемещения центра вихря определяется выражением (5.1) с точностью до τ^2 .

Если время оборота жидкости в вихре одного порядка с периодом волны Россби ($\gamma a_0 \sim \beta$), то за это время вторичное течение становится столь же интенсивным, как и начальный вихрь. В соответствии с (6.1) в этом случае $\beta q_0 \sim a_0$, т. е. вихрь ослабевает примерно так же, как и линейный пакет волн Россби [20].

Для интенсивного вихря ($\gamma a_0 \gg \beta$) величина q_1 осциллирует по времени внутри ядра и, как следует из уравнения (6.1), в среднем за большое число оборотов возмущение потенциальной завихренности осесимметричной части вихря изменяется лишь за счет движения центра вихря по широте

$$q_0 = -\beta \int_0^t \text{Re } h_{10} dt = -\int_0^t u_y dt = \Delta y \quad (6.2)$$

В соответствии с топологической инвариантностью изолиний потенциальной завихренности σ [21] соотношение (6.2) описывает сохранение σ внутри области захвата — области замкнутых изолиний потенциальной завихренности, поскольку для интенсивного вихря область захвата мало отличается от его ядра. При этом амплитуда возмущения потенциальной завихренности за период волны Россби $t_R = \gamma/\beta$ изменяется лишь на величину $\beta \Delta y \sim \beta/\gamma \ll a_0$, так как $u_y \leq u_R$. Таким образом, адиабатическое затухание интенсивного вихря из-за излучения волн Россби происходит намного медленнее, чем для линейного пакета [5].

Изменение энтропии внутри области захвата выражается в виде

$$\langle (\omega_B - \beta \Delta y)^2 \rangle = (\langle \omega_B \rangle - \beta \Delta y)^2 + \langle \omega_B^2 \rangle - \langle \omega_B \rangle^2 \quad (6.3)$$

Здесь угловые скобки обозначают среднее значение по области захвата. Из выражения (6.3) видно, что продвижение центра вихря по широте ограничено величиной $y_m = \langle \omega_B \rangle / \beta$, при которой энтропия в области захвата достигает минимума [22]. Поскольку $\langle \omega_B \rangle \sim a_0$, то интенсивный вихрь может сместиться по широте на расстояние, намного превышающее его характерный масштаб $y_m \gg L$. Это предположение лежит в основе теории эволюции интенсивного вихря на асимптотической стадии при $\tau \gg 1$, построенной с использованием соотношения (6.2) [23]. Согласно этой теории, движение вихря происходит на запад и по широте с замедлением при слабом излучении волн Россби, что не противоречит полученным выводам о направлении движения вихря при $\tau \ll 1$.

Вследствие перемещения центра вихря по широте радиальное распределение возмущения потенциальной завихренности осесимметричной части вихря $\omega_B + \beta q_0$ становится немонотонным вблизи границы области захвата, что указывает на возможность развития гидродинамической неустойчивости. Численное моделирование эволюции неустойчивого вихря без бета-эффекта показывает, что вихрь распадается на более мелкие вихри и вихревые пары в зависимости от начальной структуры [24]. Поэтому вопрос о том, существуют ли устойчивые неизлучающие локализованные состояния вихря с ненулевым моментом импульса (стационарно перемещающимися они, как известно [22], быть не могут) или на бета-плоскости при достаточно большом смещении центра вихря по широте вихрь непременно становится неустойчивым и распадается на совокупность вихревых структур, которые в финальном состоянии могут быть лишь уединенными стационарными волнами Россби с нулевым моментом импульса [18–19], требует дальнейшего изучения.

7. Геофизические приложения. В тропическом циклоне вращение охватывает всю толщу тропосферы, так что характерным масштабом экранировки является баротропный радиус деформации $\gamma^{-1} \sim 2500$ км. Оценивая радиус ядра по радиусу максимальной орбитальной скорости $L \sim 50$ км, получаем, что тропический циклон можно рассматривать как точечный вихрь ($\gamma L \sim 10^{-2}$). При этом из оценок (5.2)–(5.5) имеем

$$u_x \approx -\frac{3}{8} \beta \Gamma t, \quad u_y \approx \frac{1}{4} \beta \Gamma t \ln \frac{1}{\gamma^2 \Gamma t}, \quad \Gamma = a_0 L^2 \quad (7.1)$$

В ядре тропического циклона за сутки воздух совершает десяток оборотов вокруг центра ($a_0 \sim 10^{-3} \text{ с}^{-1}$). За это время, согласно (7.1), скорость движения на запад достигает 1 м/с, по широте — 3 м/с, что соответствует оценкам [15] и результатам численного моделирования [3]. За счет большой угловой скорости вращения в ядре тропического циклона возмущение потенциальной завихренности ω_B на порядок превосходит величину f и изменение интенсивности тропического циклона связано в основном с неадиабатическими процессами, поскольку при смещении его центра даже на 1000 км величина $\sigma - f$ в соответствии с (6.2) изменится лишь на 1% при $\beta = 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

В интенсивных океанских вихрях толщина слоя воды, охваченного вращением, обычно существенно меньше глубины океана и для их описания используются модели с двухслойной стратификацией [1]. При этом характерным масштабом экранировки является бароклинный радиус деформации, определяемый скоростью длинных гравитационных волн на внутренней поверхности раздела $V_g = (g H_0 \Delta \rho / \rho_0)^{1/2}$, $\Delta \rho / \rho_0$ — относительный перепад плотности между слоями. Радиус ядра в океанских вихрях близок к бароклинному радиусу деформации ($\gamma L \sim 1$), поэтому влияние периферии на их перемещение эффективно экранируется и за счет бета-эффекта дви-

жение вихрей происходит преимущественно на запад со скоростью, близкой к максимальной фазовой скорости бароклинных волн Россби u_R . Для колец пограничных течений $u_R \sim 3$ см/с, что не противоречит данным наблюдений [1]. В наиболее интенсивных океанских циклонах величина $\omega_B \sim 10f$, как и в тропических циклонах, но за счет резкого уменьшения толщины слоя в центре. Таким образом, адиабатическое изменение их интенсивности, связанное с перемещением центра по широте, также несущественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. Синоптические вихри в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 264 с.
2. Внутритермоклинные вихри в океане / Под ред. Федорова К. Н. М.: Ин-т океанологии АН СССР, 1986. 142 с.
3. Хаин А. П., Сутырин Г. Г. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 272 с.
4. Богомолов В. А. К вопросу о механизме перемещения уединенных синоптических вихрей // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19. № 12. С. 1252–1258.
5. Сутырин Г. Г. О влиянии бета-эффекта на эволюцию локализованного вихря // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 5. С. 1076–1080.
6. Бэгчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
7. Петров А. Г. О движении рингов Гольфстрима // Океанология. 1980. Т. 20. № 6. С. 965–974.
8. Сутырин Г. Г. Уединенные осесимметричные волны Россби конечной амплитуды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 119–124.
9. Сутырин Г. Г., Юшина И. Г. Об эволюции одиночных вихрей во вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 52–59.
10. Adem J. A series solution for the barotropic vorticity equation and its application to the study of atmospheric vortices // Tellus. 1956. V. 8. № 9. P. 364–372.
11. Firing E., Beardsley R. C. The behaviour of a barotropic eddy on a beta-plane // J. Phys. Oceanogr. 1976. V. 6. № 1. P. 57–65.
12. Введенская Н. Д., Волевич Л. Р. Движение идеальной жидкости с локализованной завихренностью на поверхности вращающейся сферы: Препринт № 68. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР. 1984. 30 с.
13. Монин А. С. Гидродинамическая неустойчивость // Успехи физ. наук. 1986. Т. 150. Вып. 1. С. 61–105.
14. Morikawa G. K. Geostrophic vortex motion // J. Meteorol. 1960. V. 17. № 2. P. 148–158.
15. Богомолов В. А. О движении вихря на вращающейся сфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 4. С. 391–396.
16. McWilliams J. C., Flierl G. R. On the evolution of isolated, nonlinear vortices. // J. Phys. Oceanogr. 1979. V. 9. № 6. P. 1155–1182.
17. Ларичев В. Д. Интегральные характеристики локализованных вихрей на β -плоскости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 8. С. 733–740.
18. Ларичев В. Д., Резник Г. М. Сильнонелинейные двумерные уединенные волны Россби // Океанология. 1976. Т. 16. № 6. С. 961–967.
19. Берестов А. Л., Монин А. С. Уединенные волны Россби // Успехи механики. 1980. Т. 3. № 3. С. 3–34.
20. Flierl G. R. The application of linear quasigeostrophic dynamics to Gulf Stream rings // J. Phys. Oceanogr. 1977. V. 7. № 3. P. 365–379.
21. Ларичев В. Д. Общие свойства нелинейной синоптической динамики в простейшей модели баротропного океана // Океанология. 1983. Т. 23. № 4. С. 551–558.
22. Ларичев В. Д. Качественный анализ нелинейной эволюции локализованных возмущений на β -плоскости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19. № 12. С. 1303–1311.
23. Коротаев Г. К. Структура, динамика и энергетика синоптической изменчивости океана: Препринт № 7. Севастополь: МГИ АН УССР, 1980. 64 с.
24. Козлов В. Ф., Макаров В. Г. Моделирование неустойчивости осесимметричных вихревых шнуров с помощью метода контурной динамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 33–39.

Москва

Поступила в редакцию
10.XII.1986