

УДК 532.526.5.013.4

**УСТОЙЧИВОСТЬ ДОЗВУКОВОГО ЛАМИНАРНОГО  
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ  
ПРИ ОБЪЕМНОМ ПОДВОДЕ ЭНЕРГИИ**

КАЗАКОВ А. В., КОГАН М. Н.

Уменьшение сопротивления трения и затягивание ламинарно-турбулентного перехода представляют одну из актуальных задач современной аэродинамики. Известен целый ряд способов затягивания перехода: создание благоприятного градиента давления, отсос газа из пограничного слоя, охлаждение поверхности и т. д. [1, 2].

Ниже рассматривается возможность затягивания перехода с помощью объемного подвода тепла в пограничный слой. Для этого проведен анализ устойчивости дозвукового сжимаемого ламинарного пограничного слоя при объемном подводе энергии. Неавтономное течение в пограничном слое определяется с помощью конечно-разностного маршевого метода. Характеристики устойчивости течения рассчитывались на основе линейной теории в плоскопараллельном приближении. Показано, что даже на теплоизолированной поверхности объемный подвод энергии в поток приводит к значительной стабилизации течения и уменьшению скоростей нарастания возмущений.

1. Рассмотрим дозвуковое обтекание плоской пластины при больших числах Рейнольдса  $Re_\infty = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty$ . Здесь  $\rho_\infty$ ,  $u_\infty$ ,  $\mu_\infty$  — плотность, скорость и коэффициент динамической вязкости набегающего потока,  $l$  — характерная длина пластины. Далее используются только безразмерные величины, для чего все линейные размеры отнесены к  $l$ , компоненты вектора скорости, плотность, коэффициент динамической вязкости и температура отнесены к соответствующим величинам в набегающем потоке, давление — к удвоенному скоростному напору, полная энтальпия — к  $H_\infty = C_p T_\infty + u_\infty^2 / 2$ . Внешнее невязкое течение предполагается невозмущенным. Вблизи поверхности пластины реализуется пограничный слой, в который в некоторой области подводится тепловая энергия. В безразмерных переменных уравнения пограничного слоя, в которые добавлен источниковый член  $q$ , характеризующий подвод энергии в поток, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \quad P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2} \right) H - \frac{u^2}{2} \right] \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2} \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu u \left( 1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \rho q \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь для координаты  $y$  и составляющей вектора скорости поперек пограничного слоя  $v$  использованы обычные для теории пограничного слоя Прандтля растягивающие множители  $Re_\infty^{1/2}$ . Предполагается, что зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры описывается формулой Саттерленда, а число Прандтля  $\sigma = 0,72$ . На поверхности тела

выполняются условия прилипания и непротекания, а также отсутствия теплового потока.

Решение уравнений пограничного слоя находилось численно методом конечных разностей [3]. При этом для поперечной координаты использовалось преобразование типа преобразования Дородницына  $dy = \sqrt{x} dN/\rho$  и дробно-линейное преобразование поперечной координаты  $N$ :  $N_1 = cN/(1+N)$ , позволяющее свести область интегрирования  $0 \leq N \leq N_c = 200$  к отрезку  $0 \leq N_1 \leq 1$ . Полученные профили скорости и температуры поперек пограничного слоя для заданной функции  $q(x, y)$  использовались при анализе устойчивости течения.

Характеристики устойчивости пограничного слоя определялись на основе обычной линейной теории плоскопараллельных течений [2, 4]. Решение линеаризованной системы уравнений для возмущений в этом случае можно искать в виде

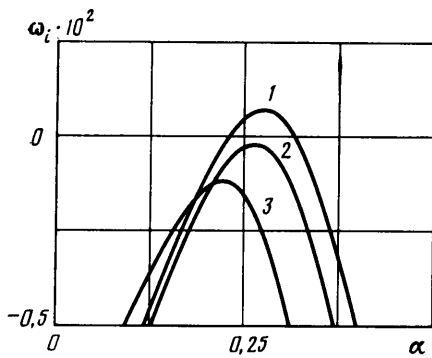
$$g_i(x_1, y_1, z_1, t_1) = f(y_1) \exp [i(\alpha x_1 + \beta z_1 - \omega t_1)] \quad (1.2)$$

Здесь  $f(y_1)$  представляет собой комплексную амплитуду возмущения;  $\alpha, \beta$  — действительные волновые числа,  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  — комплексная частота возмущения. Параметры невозмущенного течения в системе линеаризованных уравнений для возмущений отнесены к соответствующим величинам на внешней границе пограничного слоя, линейные размеры отнесены к местной толщине вытеснения пограничного слоя  $\delta$ , а время — к  $\delta/u_\infty$ . Подстановка (1.2) в линеаризованную систему уравнений для двумерных возмущений ( $\beta = 0$ ) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичной [4]. В качестве краевых условий для возмущений принимались нулевые значения на поверхности тела и на внешней границе пограничного слоя.

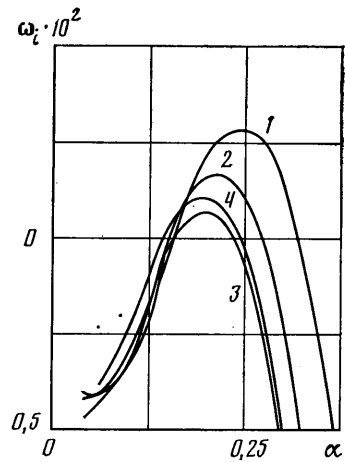
Для определения собственных значений и решений системы уравнений для возмущений использовалось конечно-разностное представление системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате задача сводится к поиску собственных значений для комплексной блочно-треугольной матрицы. Метод нахождения собственных значений и собственных функций системы уравнений для возмущений описан в [4].

2. Расчеты устойчивости ламинарного течения в пограничном слое проводились для числа Маха набегающего потока  $M_\infty = 0,8$  на плоской пластине при различных распределениях источников энергии в объеме пограничного слоя.

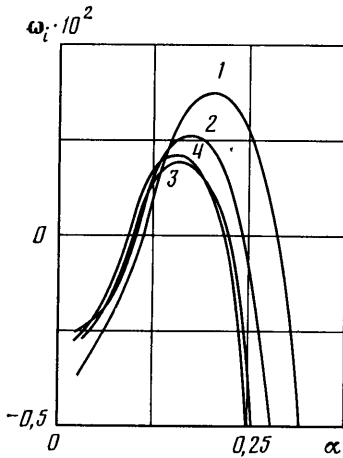
Сравнение результатов расчета характеристик устойчивости пограничного слоя Блазиуса при малых числах  $M_\infty \leq 0,05$  с результатами [5] и при больших дозвуковых числах  $M_\infty > 0,5$  с результатами [6] показывает, что характеристики нейтральных возмущений совпадают. Максимальные же значения коэффициентов пространственного нарастания  $\alpha_i = -\omega_i/V$  ( $V$  — групповая скорость) для неустойчивых возмущений отличаются на 2–3% от значений, приведенных в [5, 6]. Это отличие связано с пересчетом характеристик временной устойчивости на характеристики пространственного нарастания, которые в [5, 6] получены непосредственно из решения задачи на собственные значения. Результаты расчета для пограничного слоя без нагрева ( $q = 0$ ) отмечены на фиг. 1–4 цифрой 1. Характеристики устойчивости представлены в трех сечениях, соответствующих  $Re_x = 10^5, 3 \cdot 10^5$  и  $10^6$ . Первое из них располагается вблизи точки потери устойчивости пограничного слоя в неустойчивой области течения. На фиг. 1–3 представлена зависимость скорости нарастания возмущений  $\omega_i$  от волнового числа  $\alpha$  для перечисленных сечений пограничного слоя. Отметим, что возмущения нарастают во времени при  $\omega_i > 0$  и затухают, если  $\omega_i < 0$ . На фиг. 4 показаны профили скорости (сплошные линии) и температуры (штриховые) поперек пограничного слоя в автоматических переменных  $Y = x^{-1/2}y$ .



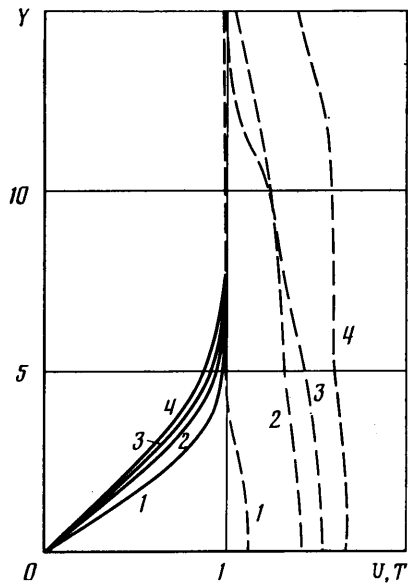
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Если к газу в пограничном слое подводится энергия и  $q(x, y) > 0$ , то течение в пограничном слое оказывается уже не автомодельным. Температура теплоизолированной поверхности, на которой выполняется условие  $\partial T / \partial y = 0$ , является в этом случае функцией продольной координаты  $x$ .

Функция  $q(x, y)$  для простоты задавалась в виде произведения двух функций от продольной координаты  $x$  и координаты поперек пограничного слоя  $N$ :  $q = \varphi_1(\text{Re}_x) \varphi_2(N)$ . Характеристики устойчивости определялись в сечениях  $\text{Re}_x = \text{const}$  в диапазоне  $10^5 \leq \text{Re}_x \leq 10^6$  с шагом  $\Delta = 2 \cdot 10^4$ . Это позволило определить точку потери устойчивости и достаточно подробно изучить характеристики устойчивости течения в области подвода энергии.

Были рассчитаны характеристики устойчивости течения в пограничном слое для трех вариантов распределения источников тепла. На фиг. 2–4 кривые 2 показывают зависимость нарастания возмущений от величины волнового числа  $\alpha$  в сечениях пограничного слоя, соответствующих  $\text{Re}_x = 10^5, 3 \cdot 10^5$  и  $10^6$  для случая, когда  $\varphi_1(\text{Re}_x)$  и  $\varphi_2(N)$  имели следующий

вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\text{Re}_x) &= \text{Re}_x/\Delta, \quad \text{Re}_x \leq 2 \cdot 10^5; \quad \varphi_1(\text{Re}_x) = 0, \quad \text{Re}_x > 2 \cdot 10^5 \\ \varphi_2(N) &= 0, \quad 0 \leq N \leq 1, \quad N \geq 40 \\ \varphi_2(N) &= 4(N-1)/15, \quad 1 \leq N \leq 16; \quad \varphi_2(N) = -N/4 + 8, \quad 16 \leq N \leq 40\end{aligned}\quad (2.1)$$

При подводе энергии толщина вытеснения существенно отличается от толщины вытеснения в автомодельном пограничном слое Блазиуса в соответствующем сечении  $\text{Re}_x = \text{const}$ . Так как в системе уравнений для возмущений все линейные размеры отнесены к местной толщине вытеснения пограничного слоя  $\delta$ , а время — к  $\delta/u_\infty$ , то для сравнения характеристик устойчивости пограничного слоя при различных подводах энергии их необходимо привести к одинаковым масштабам длины и времени. Для этой цели здесь использовались соответствующие величины  $\delta$  и  $\delta/u_\infty$  автомодельного пограничного слоя в выбранных сечениях  $\text{Re}_x = \text{const}$ .

Приведенные результаты показывают, что для первого варианта в области подвода энергии течение в пограничном слое оказывается устойчивым:  $\omega_i < 0$ . Ниже по течению от области подвода энергии при  $\text{Re}_x \geq 2 \cdot 10^5$  появляются неустойчивые возмущения. Однако диапазон волновых чисел  $\alpha$ , соответствующий нарастающим во времени возмущениям, и сами максимальные значения скоростей нарастания возмущений во времени  $\omega_{i, \text{max}}$  оказываются для первого варианта подвода энергии в поток в 1,5–2 раза меньшими, чем соответствующие величины без подвода энергии. Кривые 2 на фиг. 4 показывают поведение профилей скорости (сплошные линии) и температуры поперек пограничного слоя для первого варианта подвода энергии в сечении  $\text{Re}_x = 10^6$ . Профиль скорости при подводе энергии становится менее наполненным, хотя максимальное отличие от профиля скорости в автомодельном пограничном слое составляет всего 10–15%. Распределение температуры поперек пограничного слоя, напротив, уже существенно отличается от распределения температуры в пограничном слое без подвода энергии.

Во втором варианте подвода энергии в поток распределение источников поперек пограничного слоя задавалось той же функцией  $\varphi_2(N)$ , что и в первом варианте (2.1), а подвод энергии осуществлялся в более протяженной области  $0 \leq \text{Re}_x \leq 2 \cdot 10^6$ . Функция  $\varphi_1$  во втором варианте имела вид

$$\varphi_1(\text{Re}_x) = \text{Re}_x/\Delta, \quad \text{Re}_x < 2 \cdot 10^5; \quad \varphi_1(\text{Re}_x) = 2 \cdot 10^6/\text{Re}_x, \quad \text{Re}_x > 2 \cdot 10^5 \quad (2.2)$$

Естественно, что при  $\text{Re}_x < 2 \cdot 10^5$  характеристики устойчивости в этом случае полностью совпадают с характеристиками, полученными в первом варианте. Поэтому кривая 2 на фиг. 1 представляет также зависимость скорости нарастания возмущений от волнового числа и для второго варианта подвода энергии в поток. Ниже по течению неустойчивые возмущения нарастают медленнее, чем в случае (2.1). В сечении  $\text{Re}_x = 3 \cdot 10^5$  максимальная величина скорости нарастания возмущений для случая (2.2) оказывается почти в 4 раза меньше максимальной скорости нарастания в автомодельном пограничном слое при  $q = 0$ . Диапазон волновых чисел, соответствующий неустойчивым возмущениям, оказывается более узким и почти в 2 раза меньше соответствующего диапазона для автомодельного пограничного слоя. Зависимости скорости нарастания возмущений от величины волнового числа  $\alpha$  представлены для варианта подвода энергии (2.2) кривыми 3 на фиг. 2 и 3 соответственно для сечений  $\text{Re}_x = 3 \cdot 10^5$  и  $10^6$ .

На фиг. 4 кривые 3 показывают вид профилей скорости и температуры (штриховые линии) в пограничном слое при  $\text{Re}_x = 10^6$ .

Были проведены расчеты характеристик устойчивости для объемного подвода тепла и в более короткой области, когда распределение источни-

ков энергии задавалось в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(\text{Re}_x) &= \text{Re}_x / 5 \cdot 10^3, \quad \text{Re}_x \leq 10^5; \quad \varphi_1 = 0, \quad \text{Re}_x > 10^5 \\ \varphi_2(N) &= 0, \quad 0 \leq N \leq 0,5, \quad N > 40,5 \\ \varphi_2(N) &= 3(2N-1)/16, \quad 0,5 \leq N \leq 16,5 \\ \varphi_2(N) &= (40,5-N)/4, \quad 16,5 \leq N \leq 40,5 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Благодаря более интенсивному подводу энергии в области  $\text{Re}_x \leq 10^5$  течение здесь становится более устойчивым не только по сравнению с автомодельным пограничным слоем Блазиуса, но и по сравнению с течением с подводом энергии, заданным в виде (2.1). Действительно, интенсивный подвод тепла на достаточном удалении от стенки приводит к тому, что область течения, где вязкие напряжения велики, оказывается погруженной в слой газа, температура которого в 1,5–2 раза выше температуры набегающего потока. Пограничный слой развивается как бы в потоке с более высокой температурой при меньшем значении характерного числа Рейнольдса, что, естественно, сказывается на поведении возмущений в пограничном слое.

В варианте подвода энергии в виде (2.3) возмущения при  $\text{Re}_x = 10^5$  затухают во всем диапазоне изменения волнового числа  $\alpha$ . В сечениях  $\text{Re}_x = 3 \cdot 10^5$  и  $10^6$  течение оказывается неустойчивым, но скорости нарастания неустойчивых возмущений значительно меньше, чем в случае без подвода энергии. Диапазон волновых чисел, соответствующий неустойчивым возмущениям, в сечениях  $\text{Re}_x = 3 \cdot 10^5$  и  $10^6$  почти в 2 раза уже аналогичного диапазона волновых чисел для пограничного слоя Блазиуса. Отметим, что в сечении  $\text{Re}_x = 10^6$  скорости нарастания неустойчивых возмущений, соответствующие второму и третьему вариантам подвода энергии, мало отличаются друг от друга. Однако подвод энергии в более короткой области по закону (2.3) оказывается более выгодным по сравнению с первыми двумя вариантами подвода энергии: в этом случае энергия, подводимая в пограничный слой в единицу времени, всего лишь на 5% превышает мощность, затрачиваемую на преодоление сил ламинарного трения на пластине без подвода энергии, длина которой соответствует  $\text{Re}_\infty = 10^7$  и в 2 и 6 раз меньше энергий, подводимых к потоку в единицу времени в первых двух вариантах.

Полученное в расчетах увеличение устойчивости течения качественно можно объяснить уменьшением местного эффективного числа Рейнольдса обтекания  $\text{Re} = \rho_1 u_\infty x / \mu_1$ , где  $\rho_1$ ,  $\mu_1$  — плотность и коэффициент динамической вязкости на границе вязкого пограничного слоя, за которую условно можно принять линию с местной скоростью  $u \approx 0,99 u_\infty$ . Уменьшение местного числа Рейнольдса  $\text{Re}$  происходит из-за повышения температуры, так как подвод энергии осуществляется на значительном расстоянии от поверхности. Течение в пограничном слое при таком подводе энергии подобно течению, которое реализуется при обтекании теплоизолированной пластины потоком газа с более высокой температурой.

Таким образом, объемный подвод энергии в пограничный слой даже при условии теплоизоляции обтекаемой поверхности приводит к значительной стабилизации ламинарного течения в пограничном слое — уменьшению нарастания неустойчивых возмущений на достаточно больших расстояниях от области подвода тепла. Отметим, что протяженность в направлении  $x$  области течения, соответствующей исследованному диапазону чисел  $\text{Re}_x = \rho_\infty u_\infty x / \mu_\infty$ , составляет почти 30% протяженности всего ламинарного участка на теплоизолированной пластине без подвода энергии и значительно превосходит расстояние до точки потери устойчивости в автомодельном пограничном слое.

Одним из преимуществ описанного здесь способа ламинаризации является то, что в области объемного подвода энергии течение становится более устойчивым, в то время как при неравномерном распределении темпе-

ратуры поверхности в области повышенной температуры стенки течение дестабилизируется [7]. Можно надеяться, что объемный подвод энергии может оказаться одним из перспективных способов управления ламинарно-турбулентным переходом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
2. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.
3. Blottner E. G. Finite difference methods of solution of the boundary-layer equations // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 2. P. 193–205.
4. Malik M. R., Orszag S. A. Efficient computation of the stability of three-dimensional compressible boundary layer // AIAA Paper. 1981. № 1277. 13 p.
5. Левченко В. Я., Володин А. Г., Гапонов С. А. Характеристики устойчивости пограничного слоя. Новосибирск: Наука, 1975. 313 с.
6. Mack L. M. On the stability of the boundary layer on the transonic swept wing // AIAA Paper. 1979. № 264. 16 p.
7. Казаков А. В., Коган М. Н., Купарев В. А. О повышении устойчивости дозвукового пограничного слоя при нагреве поверхности вблизи передней кромки обтекаемого тела // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 2. С. 333–335.

Москва

Поступила в редакцию  
29.IX.1986