

УДК 532.516.5

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОНЕЧНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПОЛОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА

ТАРУНИН Е. Л., ЯКИМОВ А. А.

Изучению течений вращающейся жидкости давно уделяется большое внимание. Это внимание вызвано тем, что вращательное движение жидкости характерно для многих физических явлений и технических устройств. Обзор исследований, относящихся к области вращательной гидродинамики, имеется в монографиях [1, 2]. Значительное число этих исследований посвящено устойчивости течения Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами бесконечной высоты [3].

В предлагаемой работе методом сеток исследуется нестационарное осесимметричное течение вязкой жидкости в цилиндрическом зазоре конечной высоты. Характерным для рассматриваемой ситуации является вихревое движение в плоскости, проходящей через ось коаксиальных цилиндров. Подобные вихревые течения изучались ранее для случая ступенчатого изменения угловой скорости цилиндров [1]. В нашем случае угловая скорость меняется на этапе разгона по линейному закону и интервал разгона является параметром задачи. После стадии разгона скорость вращения определяется из обыкновенного дифференциального уравнения, которое описывает процесс торможения всей системы в целом.

1. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между двумя коаксиальными круговыми цилиндрами высотой H_1 и радиусами R_1 и R_2 (фиг. 1). В начальный момент времени $t=0$ вся система находится в покое. На интервале от 0 до t_1 (этап разгона) угловая скорость стенок полости растет по заданному линейному закону

$$\Omega = \Omega_H t / t_1 \quad (1.1)$$

В дальнейшем при $t > t_1$ угловая скорость стенок определяется из уравнения движения

$$\frac{d(M_T + M_F)}{dt} = k\Omega \quad (1.2)$$

в котором M_T — момент количества движения стенок, M_F — момент количества движения жидкости, k — коэффициент трения, определяющий взаимодействие стенок с внешней средой.

Для стенок

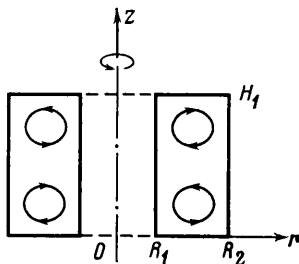
$$M_T = I_0 \Omega \quad (1.3)$$

где I_0 — их момент инерции (const), а для жидкости

$$M_F = \rho \int_V r v_\alpha dV \quad (1.4)$$

где ρ — плотность, а v_α — азимутальная скорость жидкости.

Значения азимутальной скорости v_α находятся из уравнений гидродинамики, записанных для осесимметричного движения [4], с граничными



Фиг. 1

условиями

$$v_r|_{\Gamma}=0, \quad v_z|_{\Gamma}=0, \quad v_\alpha|_{\Gamma}=r\Omega \quad (1.5)$$

отражающими условия вязкого прилипания жидкости к стенкам.

В переменных функция тока ψ и вихрь скорости φ уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \varphi + \frac{\partial v^2}{\partial z} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta \varphi + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = r\varphi$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} v \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\varphi = \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Здесь и в дальнейшем для безразмерных величин оставлены те же обозначения, что и для размерных, а через v обозначена азимутальная скорость v_α . В качестве единиц обезмеривания расстояния, скорости и времени взяты соответственно R_2 , $\Omega_H R_2$, $1/\Omega_H$. В уравнения входит один параметр подобия $\text{Re} = R_2^2 \Omega_H \nu^{-1}$ — число Рейнольдса.

Начальные условия задачи (1.1)–(1.6) отражают состояние неподвижного сосуда, заполненного покоящейся жидкостью

$$t=0, \quad \varphi = \psi = v = \Omega = 0 \quad (1.7)$$

Задача в безразмерных переменных содержит шесть независимых параметров: R_1 — внутренний радиус цилиндрической полости; H_1 — высота полости; Re — число Рейнольдса; k — коэффициент внешнего трения сосуда; I_0 — момент инерции стенок; t_1 — время разгона стенок.

Решение сформулированной задачи (1.1)–(1.7) заключается в определении угловой скорости стенок сосуда $\Omega(t)$ при $t > t_1$ и исследовании движения жидкости как на этапе разгона ($t < t_1$), так и на последующем этапе ($t > t_1$).

Рассмотрим предельные случаи этой постановки.

При отсутствии внешнего трения ($k=0$) для достаточно большого времени $t \gg t_1$ сосуд вместе с жидкостью будет вращаться как единое твердое тело с угловой скоростью Ω_{lim} . Интегрируя (1.2) для рассматриваемого случая, получим

$$\Omega_{\text{lim}} = \Omega_H - (\Omega_{\text{lim}} I_F - M_H) I_0^{-1}$$

Здесь M_H — момент количества движения жидкости, приобретенный к моменту $t = t_1$, а I_F — момент инерции жидкости.

В случае малого времени разгона ($t_1 \rightarrow 0$) можно пренебречь величиной M_H и для установившейся угловой скорости получить формулу

$$\Omega_{\text{lim}} = I_0 \Omega_H / (I_0 + I_F)$$

Другой предельный случай соответствует малому значению момента инерции жидкости ($I_F \rightarrow 0$). Интегрирование (1.2) дает в этом случае

формулу

$$\Omega(t) = \Omega_H \exp(-k(t-t_1)/I_0)$$

из которой определяется характерный интервал затухания $t_{TR} \approx I_0/k$.

Наиболее простой случай соответствует постановке, в которой значение Ω полагается заданным и не меняющимся. В этом случае требуется лишь выяснить характер установления «твердого вращения» жидкости из состояния покоя. Переход к этому варианту соответствует в нашей задаче пределу при $t_1 \rightarrow 0$, $I_F \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$.

Расчет гидродинамики упрощается в предположении одномерности течения ($v_r=0$, $v_z=0$). Это соответствует полости бесконечной высоты и приближенно описывает ситуацию узкого зазора ($H_1 \gg R_2 - R_1$) [5].

Для решения задачи (1.1)–(1.7) был выбран метод сеток. Процедура расчета на одном шаге по времени состояла из четырех основных этапов. На первом этапе из разностных аналогов эволюционных уравнений из системы (1.6) по явным двухслойным схемам находились значения вихря и азимутальной компоненты скорости. На следующем этапе методом последовательной верхней релаксации [6] решалось уравнение Пуассона, относительная точность итерирования менялась в пределах от 10^{-3} до 10^{-4} . На третьем этапе по квадратурным формулам вычислялся момент инерции жидкости и по разностному уравнению, аппроксимирующему (1.2), определялось новое значение угловой скорости стенок. Процедура заканчивалась вычислением азимутальной компоненты скорости и вихря на границе; вихрь вычислялся по формулам Тома [6]. Порядок аппроксимации используемой схемы $O(\tau + \Delta r^2 + \Delta z^2)$. Основные результаты получены на сетке 11×11 (в плоскости (r, z)), в проверочных расчетах использовалась сетка 19×19 .

2. Поведение жидкости, заполняющей сосуд, оценивалось с помощью картин изолиний функции тока Ψ и азимутальной скорости v , получаемых в определенные (интересующие нас) моменты времени. Для получения количественных соотношений использовались интегральные характеристики движения Ψ_{\max} и Ω_s . Величина

$$\Psi_{\max} = \max_{i,j} |\psi_{i,j}^{(n)}|$$

позволяет оценить интенсивность вихревого движения жидкости в плоскости (r, z) в момент времени t_n . В этой формуле использованы стандартные обозначения метода сеток — индексы i, j для узлов пространственной сетки и индекс n для номера шага по времени. По среднему значению угловой скорости в момент времени t_n

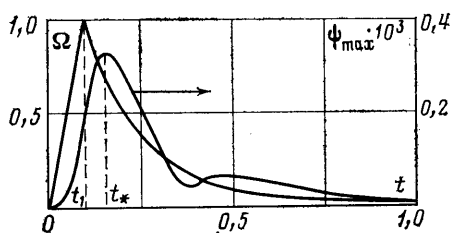
$$\Omega_s = V^{-1} \int_V v(t_n) dV$$

можно определить степень отставания (или опережения) угловой скорости вращения жидкости от угловой скорости вращения стенок Ω .

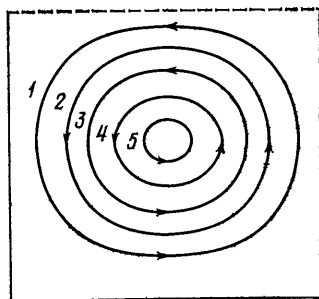
Обсуждение результатов проведенных исследований проведем на основе анализа движения жидкости, развивающегося в полости, для следующих значений параметров задачи:

$$\text{Re}=10; I_0=1,5; k=10; H_1=1; R_1=0,5; t_1=0,1 \quad (2.1)$$

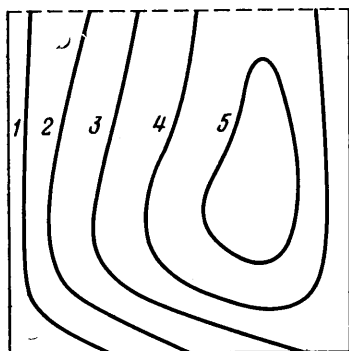
На фиг. 2 представлены графики зависимости угловой скорости стенок полости Ω и интенсивность вихревого движения Ψ_{\max} от времени. На этапе разгона ($0 \leq t \leq t_1$) Ω растет по линейному закону ($0 \leq \Omega \leq 1$), а затем начинает падать, воспроизводя процесс торможения. Вместе со стенками приходит в движение и жидкость, заполняющая сосуд. В силу инерции жидкости ее азимутальная скорость меньше скорости вращения сосуда, и в полости формируется вихревое движение, интенсивность которого ха-



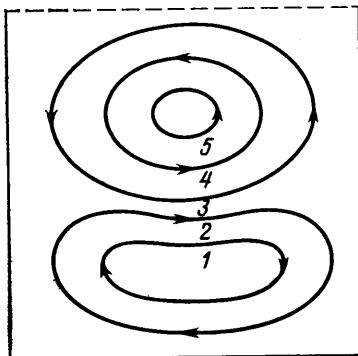
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

рактирует Ψ_{\max} . С течением времени Ψ_{\max} растет и достигает своего максимального значения

$$\psi_{\max}^* = \max_t \psi_{\max}(t) = \psi_{\max}(t_*)$$

Из фиг. 2 видно, что это происходит с некоторым запаздыванием относительно t_1 ($t_* \approx 0,15$), когда скорость вращения стенок уже начала падать в результате торможения. Достигнув максимума, Ψ_{\max} также начинает падать, однако угловая скорость вращения стенок все еще остается больше угловой скорости вращения жидкости ($\Omega > \Omega_s$).

Анализ картин изолиний азимутальной скорости v и функции тока Ψ , соответствующих этому этапу движения сосуда, позволяет понять структуру развивающегося течения в полости. Во время разгона, когда угловая скорость стенок еще невелика, в движение вступают только приграничные слои жидкости, увлекаемые вращающимися стенками. Изолинии азимутальной скорости представляют собой линии, прижатые к стенкам полости. В центре полости находится ядро еще не вступившей в движение жидкости. У торцевых стенок, где наибольшие градиенты поперечных скоростей, зарождается вихревое движение. С течением времени все большие массы жидкости вступают в движение, изолинии азимутальной скорости приобретают слоистую структуру, а сформировавшиеся у торцов вихри сдвигаются в сторону центральной части полости.

На фиг. 3 приведены изолинии функции тока, а на фиг. 4 — изолинии азимутальной скорости на обсуждаемом этапе движения ($t=0,30$) для параметров (2.1). Ввиду симметрии задачи относительно прямой $z=H_1/2$ (штриховая линия) изолинии приведены только для нижней половины полости.

Номерам изолиний ($j=1-5$) соответствуют значения функции

$$F_j = \min F + \frac{1}{5} \left(j - \frac{1}{4} \right) (\max F - \min F)$$

где $\max F$ — максимальное, а $\min F$ — минимальное значение сеточной функции F . Для фиг. 3 $\max \Psi \approx 11,74 \cdot 10^{-5}$, $\min \Psi \approx -1,03 \cdot 10^{-5}$, а для фиг. 4 $\max v = 0,37$, $\min v = 0,14$.

В дальнейшем, когда скорость вращения жидкости начинает превосходить скорость вращения стенок ($\Omega < \Omega_s$), структура движения жидкости начинает перестраиваться. В жидкости возникают возвратные течения, которые приводят к возникновению внутри полости вихрей противоположной направленности. Изолинии азимутальной скорости вновь представляют собой линии, прижатые к боковым границам полости, а центральная часть жидкости движется как единое ядро со скоростью, превышающей скорость вращения стенок. На фиг. 5 представлены изолинии функции тока при $t=0,36$. Изолинии строились, так же как и для фиг. 3, со значениями $\max \Psi \approx 4,00 \cdot 10^{-5}$, $\min \Psi \approx -3,35 \cdot 10^{-5}$. Как видно, у торцевых стенок сформировались вихри противоположной направленности.

С увеличением времени обратные вихри растут и Ψ_{\max} определяется уже по ним. Это вызывает появление на кривой $\Psi_{\max}(t)$ (см. фиг. 2) вторичного максимума $\Psi_{\max 1} = 0,676 \cdot 10^{-4}$ при $t_2 = 0,48$.

При дальнейшем торможении интенсивность вихревого движения падает (падает общая скорость движения), обратные вихри распространяются на всю полость, а изолинии азимутальной скорости вновь приобретают слоистую структуру, что говорит о стремлении жидкости перейти к твердотельному вращению. Количественная сторона движения на этом этапе отражена на фиг. 2 для $t > 0,5$.

Выше были обсуждены результаты для фиксированного набора параметров (2.1). Расчеты, представленные для различных времен разгона сосуда t_1 (остальные параметры из (2.1) остаются неизменными), показали, что время t^* достижения Ψ_{\max} своего максимального значения Ψ_{\max}^* (см. фиг. 2) монотонно растет с увеличением t_1 и эта зависимость близка к линейному закону

$$t^* \approx 0,945t_1 + 0,056 \quad (2.2)$$

Максимальное значение Ψ_{\max}^* с ростом t_1 сначала растет, достигает своей экстремальной величины $\approx 0,44 \cdot 10^{-3}$ при $t^* = 0,40$, а затем начинает убывать. Расчеты с изменением t_1 проводились до $t_1 = 1$. В диапазоне $0,1 \leq t_1 \leq 1$ относительная погрешность определения t^* по формуле (2.2) не превышает 5%.

При увеличении параметра k , определяющего величину внешнего трения (остальные параметры соответствуют (2.1)), уменьшается интенсивность движения жидкости, а временные характеристики процесса сдвигаются в сторону меньших значений. Так, например, при $k=20$

$$\psi_{\max}^* = \psi_{\max}(0,135) \approx 2,8 \cdot 10^{-4}$$

$$\psi_{\max 1}^* = \psi_{\max 1}(0,41) \approx 0,43 \cdot 10^{-4}$$

С ростом числа Рейнольдса Re (набор остальных параметров в (2.1) не меняется) увеличивается интенсивность вихревого движения Ψ_{\max} и время запаздывания $t^* - t_1$, величина вторичного максимума $\Psi_{\max 1}$ уменьшается, а точка t_2 сдвигается в сторону больших времен. Так, при $Re=50$

$$\psi_{\max}^* = \psi_{\max}(0,194) \approx 5,16 \cdot 10^{-4}$$

$$\psi_{\max 1}^* = \psi_{\max 1}(1,53) \approx 0,27 \cdot 10^{-4}$$

Оценки, полученные с использованием результатов расчетов для различных значений числа Рейнольдса, показали, что до $Re=100$ вклад нелинейных членов в уравнение для азимутальной компоненты скорости незначителен.

Авторы признательны Е. М. Жуховицкому за проявленный интерес к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринспен Х. П. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
2. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1. 400 с.; Т. 2. 401 с.
3. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
5. Шкадов В. Я., Запрянов Э. Д. Течения вязкой жидкости. М.: Изд-во МГУ, 1984. 199 с.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.

Пермь

Поступила в редакцию
29.IX.1986