

УДК 532.5.013.4:537.84

**РОЛЬ ОТСЕЧКИ ДВУМЕРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
В ВОЗНИКНОВЕНИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ДОЗВУКОВЫХ МГД-ТЕЧЕНИЙ**

РУТКЕВИЧ И. М., ТОКАРЬ Б. М.

В низкотемпературной плазме с протекающим по ней электрическим током сила Ампера и выделение джоулева тепла при определенных условиях способствуют усилению звуковых волн [1, 2]. Отражения этих волн от концов дозвукового газодинамического тракта приводят к появлению спектра собственных колебаний, затухающих или растущих [3, 4]. Высокочастотная акустическая неустойчивость неоднородных дозвуковых МГД-течений к одномерным [3] и двумерным [5, 6] возмущениям исследовалась с помощью различных вариантов метода ВКБ. Последовательное применение этого метода к задачам теории устойчивости неоднородных течений плазмы в каналах приводит к обобщению классического уравнения переноса [7] для амплитуды акустической волны на случай взаимодействия звуковых колебаний с возмущениями электрического поля [5].

Одним из важных факторов, влияющих на структуру собственных колебаний и условия их раскачки в неоднородном дозвуковом потоке, может оказаться отсечка неоднородных звуковых волн, выражающаяся в сильном отражении таких волн от критических сечений (каустик). В данной работе проводится асимптотический анализ собственных двумерных акустических возмущений в неоднородном дозвуковом течении проводящего газа при наличии критических сечений. Особое внимание уделяется рассмотрению условий нарастания двумерных акустических возмущений во внутреннем резонаторе, образованном двумя критическими сечениями и стенками МГД-канала.

1. Рассмотрим произвольные нестационарные возмущения, наложенные на квазиодномерное стационарное течение электропроводного газа. Считая, что параметры исходного течения зависят от одной координаты x , представим систему линейных уравнений, описывающую поведение трехмерных возмущений в равновесной слабоионизованной плазме, в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + A_x(x) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + A_y(x) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + A_z(x) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} + C(x) \mathbf{f} + \mathbf{g}_1(x) \delta E_x + \mathbf{g}_2(x) \delta E_y + \mathbf{g}_3(x) \delta E_z = 0 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{E} + d_1(x) \delta E_x + d_2(x) \delta E_y + d_3(x) \delta E_z = \mathbf{r}_1(x) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{r}_2(x) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \mathbf{r}_3(x) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} + \mathbf{r}_4(x) \mathbf{f} \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \delta \mathbf{E} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{f} — пятимерный вектор-столбец, компонентами которого являются возмущения давления δp , трех составляющих скорости δV_x , δV_y , δV_z и энтропии δs . Вектор $\delta \mathbf{E}$ — возмущение электрического поля; A_x , A_y , A_z , C — матрицы пятого порядка, \mathbf{g}_i — векторы-столбцы, \mathbf{r}_i — векторы-строки. Векторное уравнение (1.1) представляет собой краткую запись системы линеаризованных уравнений неразрывности, движения и энергии. Уравнение (1.2) — следствие линеаризованного закона Ома и уравнения непре-

рывности для возмущения плотности тока $\text{div } \delta \mathbf{j} = 0$. Уравнение (1.3) выражает условие потенциальности возмущения $\delta \mathbf{E}$. Вихревым электрическим полем и токами смещения при рассмотрении акустических процессов в низкотемпературной плазме, как обычно, пренебрегается. Условия применимости системы (1.1)–(1.3) к описанию акустических возмущений в МГД-канале обсуждались в [5]. Коэффициенты системы (1.1)–(1.3) определяются невозмущенным течением. Будем рассматривать высокочастотные и коротковолновые возмущения вида

$$\{\mathbf{f}, \delta \mathbf{E}\} = \{\mathbf{f}'(x), \mathbf{E}'(x)\} \exp [i(k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{|\omega|} \max \left\{ \frac{\sigma B^2}{\rho}, \frac{(\gamma-1)j^2}{\sigma p}, \frac{(u+c)}{l_*} \right\} = \varepsilon \ll 1 \quad (1.5)$$

с произвольной ориентацией вектора $\mathbf{k}_\perp = k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$ в плоскости (y, z) . Здесь $\omega = \omega_r + i\omega_i$ – комплексная частота, σ – электропроводность, B – внешнее магнитное поле, которое будем считать направленным по оси z ; j – плотность тока, p – давление, ρ – массовая плотность, γ – показатель адиабаты, u – скорость течения газа, c – скорость звука, l_* – характерный масштаб неоднородности основного течения. В дальнейшем для определенности предполагается $\omega_r > 0$. Возможные типы коротких волн и скорости их распространения определяются матрицами A_x , A_y и A_z . Матрица C и векторы \mathbf{g}_i характеризуют влияние объемных электромагнитных воздействий и градиентов стационарных распределений на возмущения. Будем считать матрицу A_x невырожденной, что справедливо для непрерывных течений, в которых отсутствует переход через скорость звука ($M(x) = u/c \neq 1$). Тогда из (1.1)–(1.4) получим уравнение для вектора $\mathbf{F}(x)$, компоненты которого $F_i = f'_i$ при $i \leq 5$, $F_6 = E'_x$, $F_7 = E'_y$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx} + \left[-i\omega Q(x; \kappa_y, \kappa_z) + T \left(x; \frac{\kappa_z}{\kappa_y} \right) \right] \mathbf{F} = 0 \quad (1.6)$$

$$\| Q \| = \left\| \begin{array}{ccc} A_x^{-1}(I - \kappa_y A_y - \kappa_z A_z) & 0 & 0 \\ \mathbf{r}_1 A_x^{-1}(I - \kappa_y A_y - \kappa_z A_z) + \kappa_y \mathbf{r}_2 + \kappa_z \mathbf{r}_3 & 0 & -\kappa_y - \kappa_z^2 / \kappa_y \\ 0 & \kappa_y & 0 \end{array} \right\| \quad (1.7)$$

$$\| T \| = \left\| \begin{array}{ccc} A_x^{-1} C & A_x^{-1} \mathbf{g}_1 & A_x^{-1} (\mathbf{g}_2 + \kappa_z \kappa_y^{-1} \mathbf{g}_3) \\ \mathbf{r}_1 A_x^{-1} C - \mathbf{r}_4 & d_1 + \mathbf{r}_1 A_x^{-1} \mathbf{g}_1 & d_2 + d_3 \kappa_z \kappa_y^{-1} + \mathbf{r}_1 A_x^{-1} (\mathbf{g}_2 + \kappa_z \kappa_y^{-1} \mathbf{g}_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Здесь и ниже через I обозначена единичная матрица. Выражения (1.7) для Q и T представляют собой сокращенную запись матриц седьмого порядка. Элементы в левом верхнем углу представляют собой матрицы пятого порядка. Следующие два элемента первой «строки» являются пятимерными векторами-столбцами. Второй и третий элементы первого «столбца» представляют собой пятимерные векторы-строки. Остальные элементы Q_{ij} и T_{ij} в записи (1.7) – истинно матричные с $i=6,7$ и $j=6,7$. При получении системы (1.6) амплитуда возмущения E'_z была исключена с помощью соотношения $E'_z = (\kappa_z / \kappa_y) E'_y$. Матрица Q имеет семь собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= q \pm \sqrt{R}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1/u, \quad \lambda_{6,7} = \pm i\kappa \\ q &= -Mc^{-1}(1-M^2)^{-1}, \quad R = c^{-2}(1-M^2)^{-2}[1 - \kappa^2(c^2 - u^2)], \\ \kappa^2 &= \kappa_y^2 + \kappa_z^2 = k_\perp^2 / \omega^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Два первых собственных значения $\lambda_{1,2}$ представляют собой отношения k_x^\pm / ω , где k_x^\pm – проекции на направление \mathbf{e}_x волновых векторов акустиче-

ских волн, распространяющихся вниз и вверх по потоку. Проекция групповых скоростей этих волн на направление невозмущенного течения e_x равны $W_x^\pm = u + ck_x^\pm/k^\pm$, где $(k^\pm)^2 = (k_x^\pm)^2 + k_\perp^2$. Кратным собственным значениям $\lambda_{3,4,5}$ соответствуют три волны — энтропийная и две вихревые с различными поляризациями возмущения скорости, которые переносятся со скоростью невозмущенного потока. Собственным значениям $\lambda_{6,7}$ отвечают «волны электрического потенциала». Общий анализ устойчивости неоднородных МГД-течений требует рассмотрения всех видов возмущений. Однако для высоких частот, удовлетворяющих условию (1.5), можно исследовать акустическую неустойчивость с помощью асимптотического расчета спектра собственных звуковых колебаний.

Если при заданном вещественном ω в рассматриваемой области течения $0 \leq x \leq L$ функция $R(x, k_\perp^2/\omega^2)$ положительна, то $k_x^+ \neq k_x^-$ и критические сечения не образуются. Критическое сечение возникает в дозвуковом потоке, когда в одной части потока $\omega_c(x) < \omega$, а в другой $\omega_c(x) > \omega$. Здесь ω_c — локальная частота отсечки, определяемая формулой

$$\omega_c(x) = k_\perp \sqrt{c^2(x) - u^2(x)} \quad (1.9)$$

От критического сечения, положение которого ($x = x^*$) определяется уравнением $R = 0$, происходит сильное отражение двумерной волны, распространяющейся из области, где $\omega_c < \omega$. В сечении $x = x^*$ происходит слияние волновых векторов прямой и обратной волн ($k_x^+ = k_x^-$), а продольные групповые скорости волн W_x^+ и W_x^- обращаются в нуль при $x = x^*$. Таким образом, наклонный по отношению к потоку звуковой луч, направленный по вектору \mathbf{W} [7], достигая критического сечения из области $\omega_c(x) < \omega$, касается этого сечения и затем разворачивается в обратном направлении. Для дозвукового течения непроточащего газа в канале переменного кругового сечения отражения бегущих неоднородных волн от сечений отсечки при вещественных ω рассматривались в [8]. Отличием проводимого ниже рассмотрения от [8] является не только учет электромагнитных эффектов, но и исследование устойчивости течения при наличии критических сечений. Анализ устойчивости и расчет инкрементов возмущений требует рассмотрения комплексных собственных частот, которые подлежат определению в процессе решения задачи. Поперечное сечение канала считается прямоугольным: $|y| < h_y(x)$, $|z| < h_z(x)$. Предполагается, что возмущения скорости удовлетворяют условиям непротекания на стенках канала.

2. При $\omega_r \gg |\omega_i|$ физическая картина отражения волны от критического сечения слабо отличается от имеющей место в случае $\omega_i = 0$. Если функция $\omega_c^2(x)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную область, содержащую действительный отрезок $0 \leq x \leq L$, то при $\omega_i \neq 0$ комплексная точка поворота $x^* = x_r^* + ix_i^*$ в первом порядке по малому параметру ω_i/ω_r определяется соотношениями

$$\omega_c^2(x_r^*) = \omega_r^2, \quad x_i^* = 2\omega_r \omega_i (d\omega_c^2/dx)_{x=x_r^*}^{-1} \quad (2.1)$$

Если $d\omega_c^2/dx \neq 0$ при $x = x_r^*$, то x^* будет простой точкой поворота. Расчет двумерной акустической волны в этом случае можно провести асимптотическим методом [9] в предположении малости параметра ϵ , определенного в (1.5). В отличие от случая, когда критические сечения отсутствуют [5, 6], а матрица $Q(x)$ приводится к диагональному виду, в рассматриваемой ниже ситуации каноническая форма матрицы Q в точке x^* имеет один жорданов блок второго порядка. Полагая $\mathbf{F} = G(x; \kappa_y, \kappa_z) \mathbf{U}$, где G — невырожденная матрица, приводящая Q в точке x^* к жордановой нормальной форме, вместо (1.6) получим систему

$$\frac{d\mathbf{U}}{dx} + (S - i\omega P) \mathbf{U} = 0, \quad P = G^{-1} Q G, \quad S = G^{-1} \left(T G + \frac{dG}{dx} \right) \quad (2.2)$$

$$P_{11}=P_{22}=q, P_{12}=1, P_{21}=R, P_{33}=P_{44}=P_{55}=u^{-1}, P_{66}=i\kappa, P_{77}=-i\kappa \quad (2.3)$$

Ненулевые элементы матрицы P имеют вид (2.3) при вполне определенном выборе матрицы G . Следуя методу [9, 10] построения асимптотического решения системы типа (2.2), представим U в виде

$$U = \exp\left(i\omega \int_{x^*}^x q dx\right) \{w[(-i\omega)^{1/2}\xi(x)]U_1(x) + (-i\omega)^{-1/2}w'[(-i\omega)^{1/2}\xi(x)]U_2(x)\} \quad (2.4)$$

Здесь w и w' — решение дифференциального уравнения Эйри и его производная соответственно, U_1 и U_2 — векторные функции, представляемые в виде асимптотических рядов по обратным степеням w ; функция $\xi(x)$ определяется ниже. Подстановка (2.4) в (2.2) приводит к однородной линейной алгебраической системе для векторов $U_1^{(0)}$ и $U_2^{(0)}$, являющихся главными членами разложений для U_1 и U_2 :

$$\frac{d\xi}{dx}U_1^{(0)} + (P-qI)U_2^{(0)} = 0, \quad \xi \frac{d\xi}{dx}U_2^{(0)} + (P-qI)U_1^{(0)} = 0 \quad (2.5)$$

Решения системы (2.5), отвечающие акустическим волнам, можно найти, полагая

$$U_1^{(0)} = -\alpha_2(x) \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} e_1 - \alpha_1(x) R \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} e_2 \quad (2.6)$$

$$U_2^{(0)} = \alpha_1(x) e_1 + \alpha_2(x) e_2, \quad \xi = \left(\frac{3}{2} \int_{x^*}^x \sqrt{R} dx\right)^{2/3}$$

Здесь e_1 и e_2 — векторы, у которых либо первая, либо вторая (в случае вектора e_2) координата равна единице. Остальные шесть координат этих векторов равны нулю. Функции α_1 и α_2 определяются из условий разрешимости неоднородной системы линейных алгебраических уравнений для следующих членов асимптотических разложений: $U_1^{(1)}(x)$ и $U_2^{(1)}(x)$. Эти условия представляют собой систему из двух однородных линейных дифференциальных уравнений относительно $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, которая разрешима в квадратурах [9]. Ее решения $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ можно записать в виде

$$\alpha_1 = \alpha_0 \left(\xi \frac{d\xi}{dx}\right)^{-1/2} \exp \psi_1(x) \operatorname{sh} \psi_2(x), \quad \alpha_2 = -\alpha_0 \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{1/2} \exp \psi_1(x) \operatorname{ch} \psi_2(x) \quad (2.7)$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{2} \int_{x^*}^x (S_{11} + S_{22}) dx, \quad \psi_2 = \frac{1}{2} \int_{x^*}^x \frac{S_{21} + RS_{12}}{\sqrt{R}} dx$$

где α_0 — произвольная постоянная.

Совокупность формул (2.4), (2.6) и (2.7) позволяет рассчитать акустическую волну в области, содержащей критическое сечение. В зависимости от выбора одного из двух линейно-независимых решений w^+ или w^- уравнения Эйри можно получить решения, асимптотика которых при больших значениях $\zeta = (-i\omega)^{1/2}\xi$ описывает в области $\omega_c(x) < \omega$, двумерную волну, движущуюся вниз или вверх по потоку. Для получения асимптотик волн по обе стороны от критического сечения можно использовать известные асимптотические разложения функций Эйри Ai, Vi или связанной с ними функции Эйри — Фока [9]. При этом значение ζ , отвечающее рассматриваемому действительному значению x , должно находиться в том из секто-

ров регулярности, ограниченном линиями Стокса, для которого справедливо используемое асимптотическое разложение.

3. Построение двумерных волноводных решений, удовлетворяющих условиям непротекания на стенках $y = \pm h_y$, проводится методом, аналогичным разработанному в [5] для случая, когда критические сечения отсутствуют. Волноводное решение, отвечающее волне, распространяющейся вниз по потоку, получается линейной комбинацией двух «элементарных» акустических волн вида (1.4) с $k_x = 0$, $k_y = \pi m / 2h_y$ и $k_x = 0$, $k_y = -\pi m / 2h_y$ соответственно, где m — целое число. Для указанных «элементарных» волн зависимости $f'(x)$ и $E'(x)$ определяются из формулы $F = GU$, где вектор U рассчитывается из (2.4), (2.6) и (2.7). При этом в качестве $w = w^+$ выбирается то из решений уравнения Эйри, асимптотика которого при $|\xi| \gg 1$ и $\omega_c(x) < \omega_r$ представляет волну, движущуюся вниз по потоку. Волноводная мода, распространяющаяся вверх по потоку, строится аналогично с использованием второго решения уравнения Эйри. При определенных допущениях, которые будут сформулированы ниже, можно получить следующие асимптотические формулы для возмущений давления в прямой и обратной волноводных модах:

$$\delta p = \delta p^+ + \delta p^- \quad (R_r > 0), \quad \delta p = \delta p_1 + \delta p_2 \quad (R_r < 0)$$

$$\delta p^\pm = D_\pm \tau_m(y) \mu_\pm(x) \exp \left[\int_{x^*}^x \{i\omega(q \pm \sqrt{R}) + a + b\} dx - i\omega t \right]$$
(3.1)

$$\delta p_{1,2} = D_{1,2} \tau_m(y) \mu_{1,2}(x) \exp \left[\int_{x^*}^x \{i\omega(q \pm i\sqrt{-R}) + a \mp ib\} dx - i\omega t \right]$$

$$\tau_m = \cos(\pi m y / 2h_y) \quad (m = 2m'), \quad \tau_m = \sin(\pi m y / 2h_y) \quad (m = 2m' + 1)$$

$$a(x) = \frac{H_{11} + H_{22}}{2}, \quad b(x) = -\frac{H_{21} + R_r H_{12}}{2V|R_r|}, \quad H_{ij} = \frac{S_{ij}(x; \kappa_m) + S_{ij}(x; -\kappa_m)}{2}$$
(3.2)

Переход в (3.1) от формул для δp^\pm к формулам для $\delta p_{1,2}$ определяется сменой знака функции $R_r = R(x; \kappa_m^2)$, где $\kappa_m = \pi m / 2h_y \omega_r$. Функция R , стоящая под знаком радикала, отличается от R_r , если $\omega_i \neq 0$. Функции $\mu_\pm(x)$ и $\mu_{1,2}(x)$ вблизи критического сечения ($x \rightarrow x_r^*$) имеют порядок $O(|R|^{-1/4})$. При $R \rightarrow 0$ отношения μ_+/μ_+ , μ_+/μ_- и μ_1/μ_2 стремятся к единице. В том случае, когда $R_r < 0$ при $x < x_r^*$, решение δp_1 описывает экспоненциально нарастающую, а решение δp_2 — затухающую волну при удалении от точки x_r^* влево. В этом случае константы $D_{1,2}$ и D_\pm связаны соотношениями

$$D_1 = e^{-i\pi/4} (D_+ + iD_-), \quad D_2 = 1/2 e^{i\pi/4} (D_+ - iD_-)$$
(3.3)

Если область $x < x_r^*$ имеет бесконечную протяженность и в ней отсутствуют источники возмущений, то амплитуду возмущения, экспоненциально нарастающего при $x \rightarrow -\infty$, следует принять равной нулю, т. е. $D_1 = 0$ и, следовательно, $D_+ = -iD_-$. Таким образом, отражение высокочастотной волны давления от критического сечения происходит с сохранением амплитуды и потерей фазы на величину $\pi/2$. Для неподвижной среды с одномерной неоднородностью скорости звука аналогичный вывод содержится в [11]. Указанная связь между падающей и отраженной волнами приближенно сохраняется при конечной длине канала.

При получении (3.1)–(3.3) использовались асимптотические разложения функций Эйри при больших значениях аргумента ($|\omega^2 \xi| \gg 1$). Поэтому при больших $|\omega|$ ВКБ-асимптотики (3.1) справедливы вне малой окрестности критического сечения. Выражения для a и b записаны в предположении $\omega_r \gg |\omega_i|$, позволяющем также считать, что переход от первой группы формул (3.1) ко второй определяется сменой знака R_r . Если область $R_r < 0$ имеет конечную протяженность ($0 < x < x_r^*$), то для

удовлетворения граничному условию на входе в канал (например, условию фиксированного давления $\delta p = 0$ при $x = 0$) необходимо использовать оба решения — δp_1 и δp_2 . Вместе с тем даже на конечном интервале одновременное сохранение резко растущей и затухающей экспонент имеет смысл только при условии $|D_1| \ll |D_2|$. Поэтому в пределах точности асимптотического метода вместо второй формулы (3.3) можно использовать любую из формул вида $D_2 = \exp(i\pi/4) D_+$ или $D_2 = \exp(-i\pi/4) D_-$. Если область $R_r < 0$ расположена справа от критического сечения ($x > x_r^*$), то решение δp_1 описывает затухающую, а δp_2 — растущую волну и в формулах (3.3) следует произвести замену: $D_{1,2} \rightarrow D_{2,1}$, $D_{\pm} \rightarrow D_{\mp}$. Величину h_y в (3.1) можно считать медленно меняющейся функцией от x , если при $m \neq 0$ выполнены условия

$$\pi m \left| \frac{d \ln h_y}{dx} \right| \ll |k_x^{\pm}| \ll \pi^2 m^2 \left(4h_y^2 \left| \frac{d \ln h_y}{dx} \right| \right)^{-1} \quad (3.4)$$

При этом к функциям $a(x) \pm b(x)$ надо добавить слагаемые $-1/2 (d \ln h_y / dx) \times (ck_x^{\pm} / k^{\pm} W_x^{\pm})$, вид которых сохраняется и при $m = 0$. В последнем случае для применимости (3.1) необходимо выполнение неравенства $|k_x^{\pm}| \gg |d \ln h_y / dx|$. Первое неравенство (3.4) позволяет приближенно удовлетворить условиям непротекания для возмущений скорости на наклонных стенках. Второе неравенство (3.4) позволяет рассматривать «элементарные» волны вида (1.4) с плавно меняющейся зависимостью $k_y(x)$ в качестве приближенных решений исходных уравнений (1.1) — (1.3). Для применимости формул (3.1) необходимы также следующие ограничения:

$$N_h = |j_x| B h_y / \rho c^2 \ll 1, \quad |k_x^{\pm}| h_y \gg 1 \quad (3.5)$$

Если $N_h \approx 1$, то необходимо учитывать зависимость коэффициентов усиления волноводных мод не только от x , но и от поперечной координаты y (в отличие от случая $N_h \ll 1$, когда коэффициенты усиления определяются функциями $a(x)$ и $b(x)$). Процедура построения волноводных решений при конечных N_h , характеризующихся двумерными распределениями коэффициентов усиления, описана в [5]. Второе неравенство (3.5) позволяет рассчитывать акустические возмущения без учета электродинамических граничных условий на стенках МГД-канала, так как оно обеспечивает малость толщин пограничных слоев для электродинамических возмущений, создаваемых звуковыми волнами [12, 13]. В (3.1) не учтено также влияние диссипативных процессов в турбулентных пограничных слоях на ослабление акустических волн, распространяющихся в ядре потока. Роль таких процессов мала по сравнению с магнитным трением, создающим затухание с декрементом $\sim \sigma B^2 / \rho$, если выполнено условие [13]

$$\frac{\gamma v (1/h_y + 1/h_z)}{\Delta \ln |v / (c \Delta^2 k_x^{\pm})|} \ll \frac{\sigma B^2}{\rho} \quad (3.6)$$

Здесь Δ — толщина ламинарного подслоя, v — кинематическая вязкость среды в этом подслое. Выражение в левой части (3.6) представляет собой оценку декремента затухания звуковой волны за счет пристенного трения при условии $\Delta / \Delta_T \ll c \Delta^2 |k_x^{\pm}| / v \ll 1$, где Δ_T — толщина турбулентного пограничного слоя. При $c \Delta^2 |k_x^{\pm}| / v \gg 1$ знаменатель дроби в левой части (3.6) заменяется величиной $\sqrt{v} / |k_x^{\pm}| c$.

Формулы (3.1) естественным образом обобщаются на случай трехмерных волноводных мод — в них появляются дополнительные множители вида $\cos(\pi l z / 2h_z)$ при четных l и $\sin(\pi l z / 2h_z)$ при нечетных l . Элементы матрицы H_{ij} , через которые выражаются функции $a(x)$ и $b(x)$, представляют собой средние арифметические четырех слагаемых вида $S_{ij}(x; \kappa_y, \kappa_z)$ при $\kappa_y = \pm \kappa_m$, $|\kappa_z| = \kappa_l$, где $\kappa_m = \pi m / 2h_y \omega_r$, $\kappa_l = \pi l / 2h_z \omega_r$, а функция $R_r = R(x; \kappa_m^2 + \kappa_l^2)$. Формулы (3.1), (3.2) допускают также обобщение на случай квазидвумерных возмущений, зависимость которых от третьей координаты z является слабой и обусловлена исключительно влиянием переменного расстояния между стенками $z = \pm h_z(x)$. Для таких возмущений можно принять $l = 0$, а в суммы $a \pm b$ включить дополнительные слагаемые вида $-1/2 (d \ln h_z / dx) \cdot (ck_x^{\pm} / k^{\pm} W_x^{\pm})$ [5].

4. Участок дозвукового тракта $x_1 < x < x_2$ назовем внутренним резонатором, если для всех $x \in (x_1, x_2)$ выполнено условие $\omega_c(x) < \omega_r$ и если хотя бы на одном из концов этого участка выполняется равенство $\omega_c = \omega_r$. В зависимости от выполнения последнего условия на одном или на двух концах отрезка $[x_1, x_2]$ будем называть внутренний резонатор одно-сторонним или двухсторонним. Частота отсечки трехмерных волноводных мод в канале прямоугольного сечения определяется формулой

$$\omega_c(x) = (\pi/2) [(c^2 - u^2) (m^2/h_y^2 + l^2/h_z^2)]^{1/2} \quad (4.1)$$

Для того чтобы выяснить, какие типы внутренних резонаторов возможны в неоднородных дозвуковых течениях, рассмотрим знак производ-

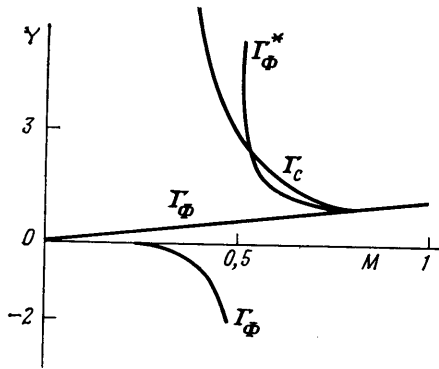
ной $d\omega_c/dx$ или, что эквивалентно, знак $d\Phi/dx$, где $\Phi=4\omega_c^2/\pi^2$. Величину $d\Phi/dx$ можно выразить через параметры невозмущенного квазиодномерного течения, если воспользоваться соответствующей системой стационарных уравнений. После необходимых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} = & \left(\frac{m^2}{h_y^2} + \frac{l^2}{h_z^2} \right) [\rho u (1-M^2)]^{-1} \left\{ (\gamma+1) \rho u^3 \frac{d \ln \Sigma}{dx} + (\gamma-1+M^2) j E - \right. \\ & \left. - \gamma(\gamma+1) M^2 \left(\frac{j^2}{\sigma} - \tau u \right) + (\gamma-1) [1 - (\gamma+2) M^2] \theta \right\} - \\ & - 2(c^2 - u^2) \left(\frac{m^2}{h_y^2} \frac{d \ln h_y}{dx} + \frac{l^2}{h_z^2} \frac{d \ln h_z}{dx} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь $\Sigma(x)$ — площадь поперечного сечения канала, $\tau < 0$ — сила гидравлического сопротивления в стационарном течении, рассчитанная на единицу объема, θ — плотность внешних источников (стоков) тепла, отличных от джоулева тепловыделения. Формула (4.2) справедлива для квазиодномерных течений в различных устройствах, использующих низкотемпературную плазму — в МГД-генераторах с фарадеевской j_y и холловской j_x составляющими плотности тока, в плазмотронах с продольным или поперечным к направлению движения среды электрическим током.

При известных ограничениях эту формулу можно применять к стационарным течениям, в которых тепловыделение θ определяется экзотермическими реакциями или поглощением излучения, создаваемого внешним источником.

Если один из поперечных размеров канала постоянен, например $h_y = \text{const}$, то для двумерных возмущений в плоскости (x, y) увеличение $\Sigma(x)$ за счет $h_z(x)$ способствует росту ω_c вниз по потоку. Для двумерных возмущений в плоскости (x, z) при $h_y = \text{const}$, а также для трехмерных возмущений в случае $h_y/h_z = \text{const}$, увеличение $\Sigma(x)$ способ-



Фиг. 1

ствует росту $\omega_c(x)$, если $M_\gamma < M < 1$, и убыванию $\omega_c(x)$ при $0 < M < M_\gamma$, где $2M_\gamma = \sqrt{\gamma+5} - \sqrt{\gamma+1}$. Гидравлическое сопротивление τ способствует убыванию $\omega_c(x)$. При $M^2 < 1/(\gamma+2)$ аналогичное действие оказывает теплоотвод, а при $1/(\gamma+2) < M^2 < 1$ — внешний подвод тепла. В МГД-генераторе убыванию ω_c вниз по потоку способствует увеличение магнитной индукции и электропроводности среды.

Рассмотрим поведение $\omega_c(x)$ в идеально секционированном МГД-генераторе с диагональным соединением эквипотенциальных электродов под углом χ к направлению течения. Компоненты плотности тока j_x, j_y и локальный электрический к.п.д. η такого генератора определяются формулами [14]

$$j_x = \sigma u B \left[\frac{\beta(1-Z)}{1+\beta^2} - \frac{Z \operatorname{ctg} \chi}{1+\operatorname{ctg}^2 \chi} \right], \quad j_y = -\sigma u B \left(\frac{1-Z}{1+\beta^2} + \frac{Z}{1+\operatorname{ctg}^2 \chi} \right) \quad (4.3)$$

$$\eta = Z(1-Z) (\beta + \operatorname{ctg} \chi)^2 [1 + \operatorname{ctg}^2 \chi + Z(\beta^2 - \operatorname{ctg}^2 \chi)]^{-1}, \quad Z = -(E_x/uB) [\sin \chi (\beta + \operatorname{ctg} \chi)]^{-1}$$

Здесь Z — коэффициент нагрузки. Для двумерных возмущений при $h_y = \text{const}$ и $l=0$ условие $d\Phi/dx=0$ в случае $\tau=0, \theta=0$ можно записать в виде

$$Y = Y_\Phi(M) = \frac{(\beta + \operatorname{ctg} \chi) Z (1-Z)}{(1+\beta^2)(1+\operatorname{ctg}^2 \chi)} \left[\frac{\gamma-1+M^2}{(\gamma+1)M} + \frac{\gamma M(1-\eta)}{\eta} \right] \left(Y \equiv \frac{\rho c}{\sigma B^2} \frac{d \ln \Sigma}{dx} \right) \quad (4.4)$$

Величина $1/Y$ имеет смысл параметра МГД-взаимодействия, определенного по скорости звука и характерной длине изменения $\Sigma(x)$. Для двумерных возмущений при $h_y = \text{const}$ и $m=0$, а также для трехмерных возмущений при $h_y/h_z = \text{const}$ условие $d\Phi/dx=0$ принимает вид

$$Y = Y_{\Phi}^*(M) = Y_{\Phi}(M) [1 - (1 - M^2)^2 (\gamma + 1)^{-1} M^{-2}]^{-1} \quad (4.5)$$

где $Y_{\Phi}(M)$ определено в (4.4). На плоскости (M, Y) уравнение (4.4) определяет кривую Γ_{Φ} (уравнение (4.5) – кривую Γ_{Φ}^*), разделяющую области, где $d\omega_c/dx > 0$ (над кривой Γ_{Φ}) и $d\omega_c/dx < 0$. Для течения с $j_x=0$, $j_y = -\sigma u B$, которое при $\beta=0$ осуществляется в короткозамкнутом фарадеевском канале, а при $\beta \neq 0$ – в холловском канале с разомкнутой внешней цепью, на фиг. 1 показаны линии Γ_{Φ} и Γ_{Φ}^* при $\gamma=1,25$. На этой же фигуре показана нейтральная кривая отсечки Γ_c , определение которой будет дано в разд. 5. Дозвуковое течение в канале изображается некоторой линией Γ_0 на плоскости (M, Y) , которую назовем траекторией течения. Если траектория не пересекает Γ_{Φ} , то в таком течении возможен только односторонний внутренний резонатор. Если же Γ_0 пересекает Γ_{Φ} так, что с ростом x осуществляется переход из области $Y < Y_{\Phi}$ в область $Y > Y_{\Phi}$, то распределение $\omega_c(x)$ имеет локальный минимум, в окрестности которого возможен двухсторонний внутренний резонатор.

5. Рассмотрим спектр собственных колебаний при $h_y = \text{const}$, $l=0$ в канале с односторонним внутренним резонатором. Примем для определенности, что $d\omega_c/dx < 0$ при $0 \leq x \leq L$, где L – длина канала. Пусть величина ω_r лежит в интервале $(\omega_c(L), \omega_c(0))$ и $\omega_r \gg |\omega_i|$. Тогда положение критического сечения $x = x_r^*$ определяется из (2.1). Зададим граничные условия на концах канала в виде

$$(\delta p_1 + K_0 \delta p_2)_{x=0} = 0, (\delta p^+ + K_L \delta p^-)_{x=L} = 0 \quad (5.1)$$

где K_0 и K_L – комплексные коэффициенты отражения, которые могут зависеть от ω . Используя асимптотические представления (3.1), формулы связи (3.3) и удовлетворяя граничным условиям (5.1), приходим к комплексному уравнению, из которого должен быть найден спектр собственных значений ω

$$iK_L \frac{\mu_+(L)}{\mu_-(L)} \int_{x^*}^L (A_+ - A_-) dx = 1 + iK_0 \frac{\mu_2(0)}{\mu_1(0)} \int_0^{x^*} (A_1 - A_2) dx \quad (5.2)$$

Здесь $A_{\pm}(x, \omega)$ и $A_{1,2}(x, \omega)$ – подынтегральные функции в формулах (3.1) для δp^{\pm} и $\delta p_{1,2}$ соответственно. Уравнение (5.2) получено в линейном приближении по малому параметру D_1/D_2 . В дальнейшем при вычислении интегралов не будем различать x^* и x_r^* , подразумевая x^* вещественным, так как при $|\omega_i| \ll \omega_r$ малая мнимая добавка к координате точки поворота не дает вклада в первые члены асимптотик для собственных частот ω_r и инкрементов ω_i . При выполнении условия

$$\exp \left[\frac{4}{3} \omega_r (c^2 - u^2)^{-1/2} \Lambda^{-1/2} (x^*)^{3/2} \right] \gg |K_0 \mu_2(0) / \mu_1(0)| \quad (5.3)$$

где Λ – характерный пространственный масштаб изменения функции $c^2(x) - u^2(x)$, в (5.2) можно пренебречь членом, содержащим экспоненту интеграла от разности $A_1 - A_2$, имеющей отрицательную вещественную часть. Более того, при $|K_0| \leq 1$ и $|\omega^{3/2} \xi| \gg 1$ учет этого экспоненциально малого члена при расчете спектра внутреннего резонатора был бы превышением точности метода ВКБ, в котором характерным малым параметром является величина ϵ , определенная в (1.5). В результате при $\omega_r \gg |\omega_i|$ получим формулы

$$\omega_r = \left[\pi \left(n - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \arg \frac{\mu_-(L)}{\mu_+(L) K_0(\omega_r)} \right] / \int_{x^*}^L \sqrt{R_r} dx \quad (5.4)$$

$$\omega_i = \left[\int_{x^*}^L b dx + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{K_L(\omega_r) \mu_+(L)}{\mu_-(L)} \right| \right] / \int_{x^*}^L c^{-2} (1 - M^2)^{-2} R_r^{-1/2} dx$$

Из (5.4) видно, что граничное условие на левом конце ($x=0$) не влияет на спектр колебаний в одностороннем резонаторе и на условия их раскачки. Этот вывод связан с исчезающей малостью собственных функций в области непропускания двумерной акустической волны ($0 < x < x^*$). Аналогичное рассмотрение собственных возмущений в канале, содержащем двухсторонний внутренний резонатор, приводит к асимптотическим формулам для спектра, не зависящим от граничных условий на концах $x=0$ и $x=L$:

$$\omega_r(n, m) = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right) / \int_{x^*}^{x^{**}} \sqrt{R_r} dx \quad (5.5)$$

$$\omega_i(n, m) = \int_{x^*}^{x^{**}} b dx / \int_{x^*}^{x^{**}} c^{-2} (1 - M^2)^{-2} R_r^{-1/2} dx, \quad R_r = R(x; \kappa_m^2)$$

Здесь x^* и x^{**} — корни уравнения $R_r(x; \kappa_m^2) = 0$, ближайшие к точке минимума функции $\omega_c(x)$. Целые числа n и m характеризуют количества узлов в направлениях x и y стоячей волны давления, локализованной в резонаторе.

Первая формула (5.5) аналогична записанному в ВКБ-приближении правилу квантования Бора — Зоммерфельда для частицы в потенциальной яме [15]. Сходство задач ВКБ-расчета волновой функции квантовой частицы вблизи границы классически недоступной области и расчета структуры высокочастотной звуковой волны в неоднородной среде вблизи сечения отсечки при $\omega_i = 0$ ранее отмечалось в литературе [8, 11]. Однако в случае формирования внутреннего резонатора в неоднородном течении, как правило, $\omega_i \neq 0$. Поэтому аналогия с уравнением Шредингера возможна только при использовании в нем комплекснозначного потенциала. Если мнимую часть потенциала рассматривать как малое возмущение, то приходим к ситуации с $|\omega_i| \ll \omega_r$, для которой условия локализации собственных мод определяются невозмущенным вещественным потенциалом, а его мнимая часть влияет только на инкрменты колебаний ω_i .

Важным свойством спектра, определенного в (5.5), являются соотношения подобия — величины $\omega_r / (2n - 1)$ и ω_i оказываются универсальными для данного течения функциями от отношения $m / (2n - 1) = \phi$. Величины x^* , x^{**} и κ_m также зависят только от ϕ . При этом значения ϕ , для которых существуют локализованные возмущения, должны быть ограничены снизу. Этот вывод согласуется с полученным в [6], где показано, что двумерные собственные колебания, характеризующиеся отсутствием критических сечений, возможны только при ограничении на ϕ сверху. Длина внутреннего резонатора $x^{**} - x^*$ с ростом ϕ уменьшается.

Из (5.5) заключаем, что критерием нарастания двумерных колебаний ($\omega_i > 0$) является положительность интеграла от функции $b(x)$ по длине резонатора. Вместо этого интеграла можно вычислять равный ему в пределах (x^*, x^{**}) интеграл от функции $b_1(x) = b + d \ln(\mu_+ / \mu_-) / dx$, имеющей смысл полусуммы коэффициентов пространственного усиления прямой и обратной волноводных мод в направлениях их групповых скоростей. Выражение для b_1 имеет вид

$$2b_1 = (1 - \omega_c^2 / \omega_r^2)^{-1/2} [J_1 + 2(M^2 + c^{-2} \kappa_m^{-2})^{-1} J_2] \quad (5.6)$$

$$J_1 = (1 - M^2)^{-1} \left[\frac{M(\gamma + 2 - M^2)}{(1 - M^2) \rho c^2} (j_y B + \tau) - \frac{(\gamma^2 - 1)(j^2 / \sigma + \theta - \tau u)}{\gamma c \rho (1 - M^2)} + \right.$$

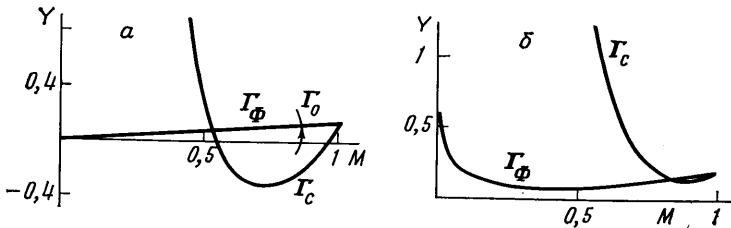
$$\left. + \frac{M(2 + (\gamma - 1)M^2)}{1 - M^2} \frac{d \ln \Sigma}{dx} - \frac{\sigma B^2}{\rho c} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(\gamma - 1)j_y B M}{\rho c^2} + \frac{\sigma_p}{\sigma} \left\{ M B (\beta j_x - j_y) + \frac{(\gamma - 1)}{\sigma c} (j_y^2 - j_x^2 - 2\beta j_x j_y) \right\} - \right.$$

$$- \beta_p \left\{ MBj_x - \frac{2(\gamma-1)}{\sigma c} j_x j_y \right\}]$$

$$J_2 c = \frac{du}{dx} - \frac{(\gamma-1)}{\sigma} \left[\frac{\sigma_p}{\sigma} (j_y^2 - j_x^2 - 2\beta j_x j_y) + 2\beta_p j_x j_y \right]$$

Здесь σ_p и β_p — изоэнтропические производные электропроводности и параметра Холла по давлению. Функция $J_1(x)$ равна сумме коэффициентов усиления прямой и обратной квазиодномерных волн. Каждое значение ϕ , от которого зависит параметр κ_m , определяет на плоскости (M, Y) «нейтральную» кривую Γ_ϕ , вдоль которой $b_1=0$. При достаточно больших ϕ все кривые Γ_ϕ будут расположены в малой окрестности нейтральной кривой отсечки Γ_c , определяемой уравнением $J_1+2J_2=0$. Пусть некоторый участок кривой Γ_ϕ расположен над Γ_c , т. е. в области $b_1>0$, а траектория стационарного течения Γ_0 проходит выше Γ_c и при воз-



Фиг. 2

растании x пересекает кривую Γ_ϕ снизу вверх (фиг. 2, а). Тогда можно гарантировать нарастание собственных двумерных колебаний в двухстороннем резонаторе.

На фиг. 2 показано взаимное расположение кривых Γ_c и Γ_ϕ в холловском МГД-генераторе ($\chi=\pi/2$) при $\gamma=1,25$, $\beta=3$, $(\partial \ln \sigma / \partial \ln p)_s=2$, $(\partial \ln \beta / \partial \ln p)_s=-0,9$. Фиг. 2, а отвечает случаю короткого замыкания ($Z=0$), фиг. 2, б — значению $Z=0,24$, при котором электрический к. п. д. холловского генератора с $\beta=3$ максимален ($\eta=0,52$). Видно, что в обоих случаях возможно возникновение неустойчивости к локализованным колебаниям. Для короткозамкнутого фарадеевского канала при $\beta=0$ и $(\partial \ln \sigma / \partial \ln p)_s=2$ кривая Γ_c проходит выше Γ_ϕ (см. фиг. 1). Поэтому условие $b_1>0$ не может выполняться на всем интервале (x^*, x^{**}) и для определения знака ω_i требуется расчет интеграла от функции $b(x)$ или $b_1(x)$ в пределах (x^*, x^{**}) .

Для применимости формул (5.5) необходимо выполнение условий, являющихся обобщением (5.3) на случай двухстороннего резонатора. Эти условия можно представить в виде неравенства

$$\exp \left[\frac{4}{3} \omega_r (c^2 - u^2)^{-1/2} \Lambda^{-1/2} (\Delta x)^{1/2} \right] \gg 1 \quad (5.7)$$

Здесь Δx — расстояние от каждого из критических сечений до ближайшей отражающей поверхности $x=\text{const}$ — соседнего критического сечения, скачка уплотнения (в случае смешанного течения) или открытого конца дозвукового тракта. В (5.7) учтено, что на таких поверхностях порядок величины $|K\mu_2/\mu_1|$ не превышает единицы. При снижении уровня неоднородности основного течения величина Λ растет, что приводит к возрастанию значений ω_r , необходимых для выполнения (5.7), и, следовательно, ввиду ограничения на параметр ϕ снизу — к большим значениям m . Поэтому при очень слабой неоднородности $c^2(x) - u^2(x)$ неустойчивость к локализованным возмущениям может и не возникнуть из-за сильного стабилизирующего влияния вязкости и теплопроводности при больших m .

Приведем конкретный пример течения, неустойчивого к локализованным возмущениям. Рассмотрим дозвуковой поток плазмы продуктов сгорания в расширяющемся МГД-канале диагонального типа: $0 < x < L = 4$ м, $2h_y = 0,48$ м, $h_z/h_z^0 = \exp(0,3x)$ при $B=4$ Тл, $\chi=40^\circ$, $Z=0,2$. Температура и число Маха на входе: $T_0=2800$ К, $M_0=0,86$; давление на выходе $p_L=1,2$ атм. Зависимости σ и β от T и p рассчитывались

по формулам, приведенным в [16]. Численный расчет течения при $\tau=0$, $\theta=0$ показал, что зависимость $\omega_c(x)$, отвечающая квазидвумерным возмущениям с $l=0$, имеет минимум, поэтому возможна их локализация в двухстороннем резонаторе. Расчеты координат критических сечений x^* , x^{**} , частот ω_r и инкрементов ω_i привели к следующим результатам. Для $m/(2n-1)=1, 2$ и 3 получено $x^*=0,26; 0,42$ и $0,49$ м, $x^{**}=1,26; 1,12$ и $1,05$ м, $\omega_r/(2n-1)=3270, 6420$ и 9530 с $^{-1}$, $\omega_i=50, 63$ и 61 с $^{-1}$ соответственно.

Важность акустической неустойчивости рассмотренного типа определяется надежностью ее прогнозирования. Последняя достигается благодаря тому, что критерий раскачки локализованных возмущений не зависит от акустических свойств концов газодинамического тракта.

Авторы признательны участникам семинаров Л. М. Бибермана и Г. А. Любимова за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Velikhov E. P. Hall instability of current-carrying slightly ionized plasma // Proc. 1st Intern. Sympos. MHD Electr. Power Generation, Newcastle-upon-Tyne, 1962. London: Inst. Electr. Engrs, 1963. P. 135–136.
2. McCune J. E. Wave growth and instability in partially ionized gases // Proc. 2nd Intern. Sympos. MHD Electr. Power Generation, Paris, 1964. V. 2. P. 523–538.
3. Слободкина Ф. А. Устойчивость квазидвумерных магнитогидродинамических течений // ПММ. 1967. Т. 31, вып. 3. С. 406–445.
4. Колесников В. К., Хаит В. Д. Об акустической устойчивости дозвукового потока в МГД-канале // Теплофизика высоких температур. 1976. Т. 14, № 6. С. 1296–1304.
5. Руткевич И. М., Токарь П. М. Двумерные акустические колебания в неоднородном МГД-течении. Бегущие волны // Теплофизика высоких температур. 1984. Т. 22. № 5. С. 984–994.
6. Руткевич И. М., Токарь П. М. Двумерные акустические колебания в неоднородном МГД-течении. Собственные частоты и устойчивость дозвукового потока // Теплофизика высоких температур. 1984. Т. 22. № 6. С. 1183–1190.
7. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. Изд. 2-е. М.: Наука, 1981. 206 с.
8. Осипов А. А. Распространение трехмерных акустических возмущений в каналах переменной площади поперечного сечения при частотах, близких к частоте отсечки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 6. С. 149–159.
9. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
10. Olver F. Asymptotics and special functions. N. Y.; L.: Acad. Press, 1974. 572 с.
11. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. 343 с.
12. Руткевич И. М. Возникновение электродинамических пограничных слоев при распространении звука в ограниченной низкотемпературной плазме // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 4. С. 837–840.
13. Руткевич И. М. Устойчивость неоднородного дозвукового течения в мощном МГД-генераторе к квазидвумерным акустическим колебаниям // Теплофизика высоких температур. 1986. Т. 24. № 2. С. 340–352.
14. Монгарди А. МГД-генератор с последовательно соединенными электродами // Магнитогазодинамические генераторы электрической энергии. М.: ВИНТИ, 1963. С. 113–119.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Изд. 3-е. М.: Наука, 1974. 752 с.
16. Битурин В. А., Желнин В. А., Любимов Г. А., Медин С. А. Сопоставление результатов расчета течения в канале МГД-генератора с экспериментальными данными, полученными на установке У-25 // Теплофизика высоких температур. 1978. Т. 16. № 4. С. 854–867.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1987