

Из уравнений (1), (2) при условии (3) можно получить следующее квадратное уравнение для a_0 :

$$a_0^2 \left[(\rho_s g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial s} (\rho g \xi + p) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial l} (\rho g \xi + p) \right)^2 \right] + 2a_0 \left[\tau_{\xi s} \frac{\partial}{\partial s} (\rho g \xi + p) + \tau_{\xi l} \frac{\partial}{\partial l} (\rho g \xi + p) \right] - (\tau_{\xi s}^2 + \tau_{\xi l}^2) = 0 \quad (9)$$

Значение a_0 определяется как положительный корень уравнения (9).

Следует иметь в виду, что задача (1)–(3) имеет решение только при выполнении условия $\rho_s g \cos \gamma \operatorname{tg} \varphi > |\operatorname{grad}(\rho g \xi + p)|$, которое в случае гидростатического закона для p можно записать в виде $\gamma < \varphi$.

Автор благодарит А. Г. Куликовского, В. Я. Шкадова, М. Э. Эглит за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беликов В. В., Волченков Г. Я. Расчет нестационарных плановых деформаций подмостовых русел методом конечных элементов // Тез. докл. на 4-й Респ. конф. по науч.-техн. проблемам гидравлики дорожных водопропускных сооружений. Саратов, 1985.
2. Гончаров В. Н. Основы динамики русловых потоков. Л.: Гидрометеоздат, 1954. 452 с.
3. Мирзхулава Ц. Е. Разрыв русел и методика оценки их устойчивости. М.: Колос, 1967. 179 с.
4. Железняков Г. В., Дебольский В. К. О зависимости расхода наносов от критерия их подвижности // Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп. 1968. Вып. 288.

Москва

Поступила в редакцию
22.X.1985

УДК 532.546

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ К ПЛОСКИМ

АКСЕНОВ Б. Г., МЕДВЕДСКИЙ Р. И.

Точные решения осесимметричных задач теории фильтрации и теплопроводности имеют более сложную структуру, чем решения аналогичных им плоских задач [1–5]. Особенно это относится к задачам, в которых параметры фильтрации зависят от давления, что значительно сужает возможности не только точного, но и приближенного их решения. Например, для плоских нелинейных задач фильтрации даже при немонотонном возмущении на границе легко строится сужающаяся система оценок [6]. Однако для осесимметричных задач эта процедура утрачивает свою эффективность вследствие неудобства работы с функцией Грина в цилиндрической области. Перечисленные недостатки в ряде важных для практики случаев устраняются, если воспользоваться установленным в данной работе простым приближенным соотношением между решениями одномерных осесимметричных и плоских задач нестационарной фильтрации. С его помощью получены простые приближенные представления решений некоторых нелинейных осесимметричных задач нестационарной фильтрации при монотонных и немонотонных возмущениях на границе. Для линейных задач аналогичное соотношение было получено в [7].

1. Решение задач линейной фильтрации. При упругом режиме фильтрации жидкости в пористой среде давление жидкости удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = K \Delta p_i, \quad \Delta p_i = \frac{1}{x^i} \frac{\partial}{\partial x} x^i \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad x \in [a, b], \quad t > 0 \quad (1.1)$$

где t – время, K – физическая константа; $i=0, 1$ соответствует плоскому и осесимметричному движению.

Дополним уравнения (1.1) краевыми условиями

$$p_i(x, 0) = p_i(b, t) = p_n, \quad i=0, 1 \quad (1.2)$$

$$x=a: \quad -a \frac{\partial p_i}{\partial x} + h p_i = h f(t) \quad (1.3)$$

Для вывода нужного соотношения введем малый параметр ε в качестве множителя перед производной по времени. Тогда каждая из функций $p_0(x, t)$ и $p_1(x, t)$ помимо указанных аргументов x, t и параметра ε будет зависеть еще от координаты правой границы b , причем монотонно. Исключение b приводит к искомой зависимости $p_1(x, t) = \varphi(p_0(x, t))$. Последняя функция затем представляется в виде ряда по степеням параметра ε и находится $\varphi_k(p_0(x, t))$ при использовании одного ($k=1$), двух ($k=2$) или более членов разложения. Таким образом, в принципе возможно последовательное уточнение функции $\varphi_k(p_0(x, t))$. Результаты расчетов показывают, что достаточно точные простые формулы получаются при использовании только главного члена разложения ($k=1$).

Главный член разложения получается проще всего из решений задач (1.1)–(1.3) при $\varepsilon=0$. При $p_H=0$, $f(t) \equiv 1$ имеем

$$p_0 = \frac{h(b-x)}{a+h(b-a)}, \quad p_1 = 1 - \frac{1+h \ln(x/a)}{1+h \ln(b/a)}$$

Исключая b , получаем приближенное соотношение между p_1 и p_0

$$p_1 \approx \varphi_1(p_0) = 1 - (1+h \ln \rho) \left\{ 1 + h \ln \left[1 + \frac{\rho + h(\rho-1)}{h(1-p_0)} \right] \right\}^{-1}, \quad \rho = \frac{x}{a} \quad (1.4)$$

Эта зависимость между p_0 и p_1 используется затем при любом ε , в частности при $\varepsilon=1$.

Если при $\rho=1$ задано условие первого рода ($h \rightarrow \infty$), то (1.4) преобразуется в формулу

$$p_1 \approx \varphi_1(p_0) = 1 - \ln \rho \ln^{-1} \left(1 + \frac{\rho-1}{1+p_0} \right) \quad (1.5)$$

которая совпадает с эвристическим соотношением, полученным в [8].

Теперь, если известно решение $p_0(x, t)$, приближенная формула для $p_1(x, t)$ имеет вид

$$p_1(x, t) \approx p_H + q_1(\rho) (f(t) - p_H), \quad x = a\rho$$

$$q_1(\rho) = 1 - (1-h \ln \rho) \left\{ 1 + h \ln \left[1 + \frac{q_0(\rho) + h(\rho-1)}{h(1-q_0(\rho))} \right] \right\}^{-1}$$

$$q_0(\rho) = \frac{p_0(x, t) - p_H}{f(t) - p_H}$$

Как показывают расчеты, этот метод дает хорошие результаты при любых достаточно гладких функциях $f(t)$. Погрешность не превышает 5% даже при значениях b , стремящихся к бесконечности. Метод может быть использован, если граничное условие при $x=a$ имеет вид $-a \partial p_i / \partial x + h p_i = h f(t)$, где $f(t)$ монотонна.

Непосредственно применять этот метод к задачам с немонотонным возмущением на границе нельзя, так как в зависимости (1.5) теряется взаимная однозначность q_0 и q_1 .

В этом случае немонотонные функции $p_i(x, t)$ можно представить в виде суммы монотонных функций

$$p_i(x, t) = u_i(x, t) + v_i(x, t) \quad (1.6)$$

которые находятся из решений двух пар задач

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = K \frac{1}{x^i} \frac{\partial}{\partial x} x^i \frac{\partial u_i}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = K \frac{1}{x^i} \frac{\partial}{\partial x} x^i \frac{\partial v_i}{\partial x}$$

$$x=a: \quad -\frac{\partial u_i}{\partial x} + h u_i = h f_1(t), \quad -\frac{\partial v_i}{\partial x} + h v_i = h f_2(t)$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (1.8)$$

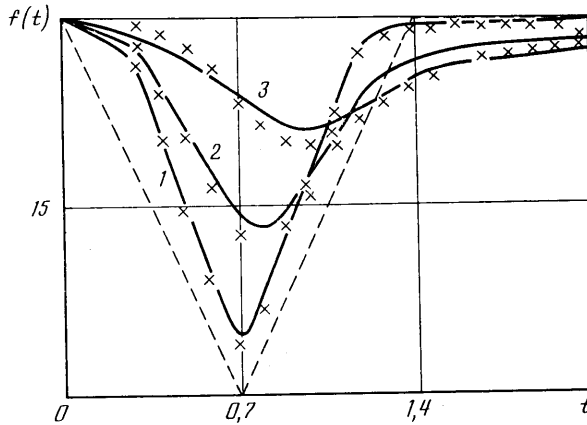
где $f_1(t)$ — монотонно возрастающая, а $f_2(t)$ — монотонно убывающая функции.

Представление функции $f(t)$ в виде (1.8) всегда возможно, если она имеет ограниченную вариацию. Начальные условия и условия на границе $x=b$ выбираются

так, чтобы при $x=b$ и $t=0$ выполнялось (1.6). Справедливость (1.6) для решений уравнений (1.7) при таких условиях доказывается простым сложением уравнений и краевых условий.

После нахождения монотонных функций u_0, v_0 описанным выше способом определяются приближенные значения функции u_1, v_1 , а затем по формуле (1.6) при $i=1$ находится искомая функция p_1 .

Данный метод был применен для решения модельной задачи с немонотонным граничным условием ($K=1, p_n=30$). На фигуре показаны графики функций $f(t)$ (штриховая линия) и $p_1(t)$ при $\rho=1,1$ (1), $1,4$ (2), $2,0$ (3). Выбранная функция $f(t)$ особенно неблагоприятна для описываемого метода, так как на границе $\partial p_1/\partial t$ претерпевает скачок. Точками показаны результаты расчета данным методом, линиями —



результаты прямого численного расчета. Видно, что точность приближенного расчета вполне приемлема.

2. Решение задач нелинейной фильтрации. Изложенное выше распространим на нелинейные задачи. В качестве примера рассмотрим уравнение Буссинеска, описывающее процесс изотермической фильтрации газа в пористой среде

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = K \frac{1}{x^i} \frac{\partial}{\partial x} p_i x^i \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad i=0, 1 \quad (2.1)$$

Если добавить к этому уравнению условия (1.2), то получим две краевые задачи для p_0 и p_1 (для простоты рассматриваем условия первого рода $h \rightarrow \infty$).

Введем зависимые переменные

$$s_i = K \int_0^{p_i} p \, dp = K \frac{p_i^2}{2}, \quad i=0, 1 \quad (2.2)$$

Для функций s_i получаем задачи

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} = K p_i \frac{1}{x^i} \frac{\partial}{\partial x} x^i \frac{\partial s_i}{\partial x}, \quad i=0, 1$$

$$s_i(x, 0) = K p_n^2 / 2 = s_n, \quad s_i(0, t) = K f^2(t) / 2 = F(t)$$

Соответствующие стационарные задачи будут аналогичны (1.3), (1.4).

При известном решении плоской задачи фильтрации приближенное осесимметричное решение той же задачи при тех же краевых условиях имеет вид

$$p_1(x, t) \approx (p_n^2 + q_1(\rho, t) (F^2(t) - p_n^2))^{1/2}, \quad x = a\rho$$

$$q_1(\rho) = 1 - (1 - h \ln \rho) \left\{ 1 + h \ln \left[1 + \frac{q_0(\rho) + h(\rho - 1)}{h(1 - q_0(\rho))} \right] \right\}^{-1}$$

$$q_0(\rho) = \frac{s_0(x, t) - s_n}{F(t) - s_n}$$

Таким образом, для нелинейных задач методика перехода от плоских задач к радиальным усложняется только прямым и обратным расчетом по формулам (2.2).

Для иллюстрации изложенного выше методом конечных разностей с одинаковой точностью вычислены значения $p_0(x, t)$ и $p_1(x, t)$ как решения задач (2.1), (1.2) при $p_n=100$, $F(t)=200$, $K=1$, $a=1$ (все величины безразмерные) для полубесконечного интервала ($b \rightarrow \infty$), т. е. в самом неблагоприятном случае для данного метода.

В таблице приведены значения $p_1(x, t)$, полученные непосредственно численным решением, а также величины $p_1^*(x, t)$, полученные описываемым здесь методом из $p_0(x, t)$. Видно, что погрешность не превышает 3%. Для инженерных задач такая

t	x=1		4		7		10		13		16	
	p_1	p_1^*	p_1	p_1^*	p_1	p_1^*	p_1	p_1^*	p_1	p_1^*	p_1	p_1^*
0,08	168,3	168,8	120,2	121,6	104,5	105,0	100,8	101,0	101,1	100,2	100,0	100,0
0,2	175,1	175,7	136,5	138,3	116,3	118,2	106,2	107,4	102,0	102,6	100,6	100,8
0,32	177,5	178,1	142,9	144,7	123,6	125,8	111,9	113,8	105,4	106,6	102,2	102,8
0,4	178,5	179,1	147,5	147,3	126,9	129,2	114,9	117,1	107,6	109,3	103,6	104,6
0,52	179,5	180,1	148,3	150,1	130,5	132,8	118,6	121,0	110,7	112,8	105,8	107,3
0,6	180,0	180,6	149,8	151,4	132,4	134,7	120,6	123,1	112,5	114,7	107,2	108,9
0,72	180,7	181,2	151,5	153,1	134,7	137,0	123,1	125,6	114,8	117,3	109,1	111,2
0,8	181,0	181,6	152,4	154,0	136,0	138,2	124,5	127,1	116,2	118,7	110,3	112,5
0,92	181,5	182,0	153,6	155,2	137,6	139,8	126,3	128,9	118,0	120,6	112,0	114,3
1,0	181,7	182,3	154,3	155,9	138,5	140,7	127,4	130,0	119,1	121,0	113,0	115,4

погрешность значительно ниже погрешности определения исходных данных. Заметим, что при конечном b погрешность приближения еще ниже.

3. Решение линейной задачи с нелинейным граничным условием. Пусть требуется решить линейное уравнение фильтрации для функции p_1 (в безразмерных переменных), удовлетворяющее условиям

$$p_1(\rho, t) = p_1(R, t) = 0, \quad R = b/a$$

$$\rho = 1: \quad -\rho \frac{\partial p_1}{\partial \rho} = h \sqrt{1-p_1}$$

Такое граничное условие возникает при определении давления на забое нефтяной скважины при заданном постоянном давлении на устье скважины и квадратичном законе сопротивления при движении нефти по подъемной колонне.

Решение вспомогательной задачи ($\varepsilon=0$) приводит к следующим результатам:

$$p_1 = 2 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{h \ln R} \right)^2} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\ln \rho}{\ln R} \right) \quad (3.1)$$

$$p_0 = 2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{h(R+1)^2}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\rho-1}{R-1} \right)$$

Из последнего получаем

$$R = 1 + \frac{\rho-1}{1-p_0} \left[1 - p_0 + \frac{1}{2} p_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4(1-p_0)}{h^2(\rho-1)^2}} \right) \right] \quad (3.2)$$

Подстановка (3.2) в (3.1) дает искомую зависимость между p_1 и p_0 : $p_1 \approx \varphi_1(p_0)$, которая затем используется для приближенного решения поставленной осесимметричной задачи.

Особый интерес в этой задаче представляет определение давления на забое скважины $p_1(1, t) = v(t)$. Предлагаемый метод приводит к выражению

$$v = 2 \left[1 + \sqrt{1 + (2/h \ln R)^2} \right]^{-1} \quad (3.3)$$

где R получается из (3.2) при $\rho=1$

$$R = 1 + \frac{u}{h\sqrt{1-u}}, \quad u = p_0(1, t)$$

а функция $u(t)$ определяется решением соответствующей плоской задачи. В частности, для полубесконечного призматического пласта получаем для $u(t)$ уравнение Вольтерра

$$u(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{1-u(\sigma)}}{\sqrt{h(t-\sigma)}} d\sigma \quad (3.4)$$

Для $v(t)$ справедливо более сложное уравнение

$$h\sqrt{1-v(t)} = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v(\sigma)}{\ln[1+\sqrt{\pi}(t-\sigma)]} d\sigma \quad (3.5)$$

Ниже приведены значения $v(t)$, найденные из уравнения (3.5), а также значения $v_*(t)$, рассчитанные по формуле (3.3) ($u(t)$ определены на (3.4)); относительная погрешность $\xi = 100\% \cdot (v(t) - v_*(t)) / v(t)$ не превышает 1,5%:

t	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$v_*(t)$	0,465	0,558	0,612	0,649	0,676	0,697	0,714	0,728
$v(t)$	0,463	0,555	0,607	0,642	0,668	0,688	0,704	0,717
$\xi, \%$	-0,40	-0,61	-0,88	-1,10	-1,25	-1,35	-1,42	-1,46

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 599 с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
5. Баренблатт Г. И. О приближенном решении задач одномерной нестационарной фильтрации в пористой среде // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 351-370.
6. Аксенов Б. Г., Даниэлян Ю. С. Приближенное решение нелинейных немонотонных задач теории фильтрации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 186-188.
7. Медведевский Р. И. Метод приведения осесимметричных задач напорной фильтрации к плоскосимметричным // Сб. научн. тр. Разведка, каптаж и охрана подземных вод Тюменской области. Тюмень: ЗапСибНИГНИ, 1986. Вып. 204. С. 187-194.
8. Чекалюк Э. В. Распределение пластовых давлений в радиальном пласте при постоянном забойном давлении // Тр. ВНИИНефть. 1968. Вып. 32. С. 40-42.

Тюмень

Поступила в редакцию
12.VI.1986.

УДК 533.6.011:536.423.4

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОНДЕНСАЦИИ НА ТЕЧЕНИЕ ПАРА ПРИ КОНДЕНСАЦИИ С ДО- И СВЕРХЗВУКОВЫМИ СКОРОСТЯМИ

КРЮКОВ А. П.

Представлена методика расчета процесса одномерной стационарной конденсации при произвольном значении коэффициента конденсации. Метод построен на основе использования решений [1], полученных для случая полного поглощения падающих молекул на межфазной поверхности, и применения правила пересчета, предложенного в [4]. Проведен анализ эксперимента [3] по сверхзвуковому натеканию потока воздуха на поверхность, охлаждаемую жидким гелием.

В [1] был рассчитан ряд режимов сверхзвуковой стационарной конденсации пара на плоской поверхности для коэффициента конденсации $\beta=1$. Цель настоящей работы - развитие метода [1] для случаев $\beta \neq 1$. Как и в [1], рассматривается течение одноатомного пара в полубесконечном пространстве $\infty > x > 0$, где x - координата, отсчитываемая по внешней нормали к плоскости, на которой осуществляется конденсация пара. Известна температура границы раздела фаз T_s , а следовательно, и соответствующая ей равновесная числовая плотность пара по кривой насыщения n_s и давление насыщения p_s . Поток пара движется вдоль x в отрицательном направлении.

В дозвуковом режиме задание двух газодинамических параметров вдали от межфазной поверхности, например числовой плотности n_∞ и температуры T_∞ , полностью определяет течение, т. е. вид зависимостей $n=n(x)$, $T=T(x)$ и $u=u(x)$, где n , T , u - соответственно числовая плотность, температура, скорость движения пара. В области сверхзвукового течения n_∞ , T_∞ , u_∞ могут быть заданы произвольно.

Как отмечалось в [1], область исходных параметров, например n_∞ , T_∞ или p_∞ , T_∞ , где p_∞ - давление пара вдали от межфазной поверхности, разделяется на две подобласти: в одной из них сверхзвуковой поток пара реализуется во всем полубесконечном пространстве $0 < x < \infty$, в другой вблизи поверхности $x=0$ осуществляется дозвуковое течение. Качественный ход кривой, разделяющей эти два режима течения пара, представлен в [1].