

УДК 532.543

**ДВИЖЕНИЕ ДОННЫХ НАНОСОВ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ
ПОТОКА ЖИДКОСТИ**

ПЕТРОВ П. Г.

Получены уравнения движения водогрунтовой смеси в придонном слое. Водогрунтовая смесь моделируется вязкосыпучей средой, ускорение смеси предполагается малым и не учитывается.

Справедливость полученных уравнений подтверждается экспериментальными данными для следующих характеристик равномерного движения потока: для скорости начала трогания частиц на ровном дне и с учетом откосов дна, а также для расхода наносов на ровном дне.

Задача определения деформаций размываемого дна в настоящее время решается или чисто эмпирически, или с применением численных расчетов уравнений мелкой воды, дополненных уравнением баланса наносов. Для замыкания системы уравнений расход донных наносов определяется по одной из эмпирических формул [1].

Цель данной работы — получить уравнения движения водогрунтовой смеси, которые позволили бы находить теоретически замыкающее соотношение для расхода донных наносов.

Движущаяся водогрунтовая смесь принимается однородной с плотностью $\rho = \rho_r f + \rho_b(1-f)$, где ρ_r — плотность частиц грунта; ρ_b — плотность воды, f — объемная концентрация твердых частиц движущегося грунта. Движение смеси происходит в тонком слое на поверхности дна.

Выберем ортогональную криволинейную систему координат, в которой s и l — координаты точки на поверхности дна.

Толщина движущегося слоя наносов a_0 мала по сравнению с характерным размером в плане, силы инерции малы по сравнению с силами трения, поэтому можно получить следующее уравнение движения:

$$\tau_\xi - \tau - a \operatorname{grad}(\rho g \xi + p) = 0 \quad (1)$$

где τ_ξ и p — касательные напряжение и давление на поверхности смеси, ξ — высота расположения точки на поверхности смеси; τ — касательное напряжение на линиях тока, расположенных на расстоянии a от поверхности смеси; g — ускорение силы тяжести. Векторное уравнение (1) имеет две проекции на оси s и l .

Для касательных напряжений в водогрунтовой смеси принимаем следующее реологическое соотношение:

$$\tau = - \left(\rho_s g a \cos \gamma \operatorname{tg} \varphi + \mu \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \right| \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} / \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \right| \quad (2)$$

где $\rho_s = \rho - \rho_b = f(\rho_r - \rho_b)$; \mathbf{u} — скорость смеси с проекциями u_s и u_l ; μ — коэффициент вязкости водогрунтовой смеси; $\varphi \approx 28^\circ$ — угол внутреннего трения; γ — острый угол между вертикалью и нормалью к поверхности дна.

Соотношение (2) включает в себя закон Кулона для сыпучей среды и закон Ньютона для вязкой жидкости. Для простоты будем считать постоянными величины φ , f , μ . В уравнения входят два неизвестных параметра f и μ , которые дальше определим из опытов.

На поверхности скольжения при $a = a_0$ принимаются условия отсутствия движения и непрерывности касательного напряжения, откуда следует:

$$\mathbf{u} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} = 0 \quad (a = a_0) \quad (3)$$

Таким образом, уравнения (1), (2) и граничное условие (3) образуют замкнутую систему уравнений, которая при заданных τ_ξ , p и ξ позволяет определить для любого a значение \mathbf{u} .

Перейдем к рассмотрению частных случаев.

Найдем значение скорости воды v_T , соответствующей началу трогания частиц на дне канала цилиндрической формы с углом откоса γ при равномерном движении.

В этом случае

$$\tau_{\xi l} = \frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad \tau_{\xi s} = \tau_{\xi}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial l} = \sin \gamma, \quad \frac{\partial p}{\partial l} = -\rho_b g \sin \gamma$$

Из уравнений (1) и (2) с учетом условий (3) получим

$$\tau_{\xi}^2 + (\rho_s g a_0 \sin \gamma)^2 = (\rho_s g a_0 \cos \gamma \operatorname{tg} \varphi)^2.$$

Примем, что частицы грунта начинают двигаться при $a_0 = d$, где d — средний диаметр твердых частиц грунта и при касательном напряжении, равном τ_{γ}

$$\tau_{\gamma} = \rho_s g d \cos \gamma \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \varphi}\right)^2} \quad (4)$$

Отношение касательного напряжения τ_{γ} к касательному напряжению τ_0 , соответствующему началу трогания частиц на ровном дне, равно

$$\frac{\tau_{\gamma}}{\tau_0} = \cos \gamma \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \varphi}\right)^2}$$

Это соотношение хорошо известно, согласуется с опытными данными и используется в практике проектирования каналов.

В практических расчетах используется следующая формула для касательных напряжений на дне водотоков:

$$\tau_{\xi} = 0,5 \lambda \rho_b v^2, \quad \lambda = 2gn^2/h^{1/6} \quad (5)$$

где λ — коэффициент гидравлического трения; n — коэффициент шероховатости; h — глубина в метрах. При $\gamma = 0$ из уравнения (4) с учетом (5) получим

$$v_{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{f \operatorname{tg} \varphi \frac{2g(\rho_r - \rho_b) d}{\rho_b}} \quad (6)$$

Формула (6) совпадает с известной формулой В. Н. Гончарова [2], которая хорошо согласуется с многочисленными опытными данными [3], если принять $f = 0,0357 \operatorname{ctg} \varphi \approx 0,065$. Найденное из эксперимента значение f определяет первую неизвестную постоянную, входящую в систему уравнений (1) и (2).

Получим значение расхода наносов при одномерном движении. Из уравнений (1) и (2) можно сделать вывод о линейной зависимости du/da от a . Следовательно, с учетом граничных условий (3) из условия $\tau = \tau_{\xi}$ при $a = 0$, вытекающего из (1), получим

$$u = (a_0 - a)^2 \tau_{\xi} / (2a_0 \mu).$$

Интегрируя скорость u по a от 0 до a_0 , получим удельный объемный расход смеси $q = \tau_{\xi} a_0^2 / (6\mu)$, где толщина a_0 движущегося слоя смеси определяется из уравнений (1) и (2) с учетом граничных условий

$$a_0 = \tau_{\xi} \left(\rho_s g \cos \gamma \operatorname{tg} \gamma + \rho g \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} \right)^{-1}$$

Массовый расход наносов на ровном дне при $\partial \xi / \partial s = \partial p / \partial s = 0$ равен

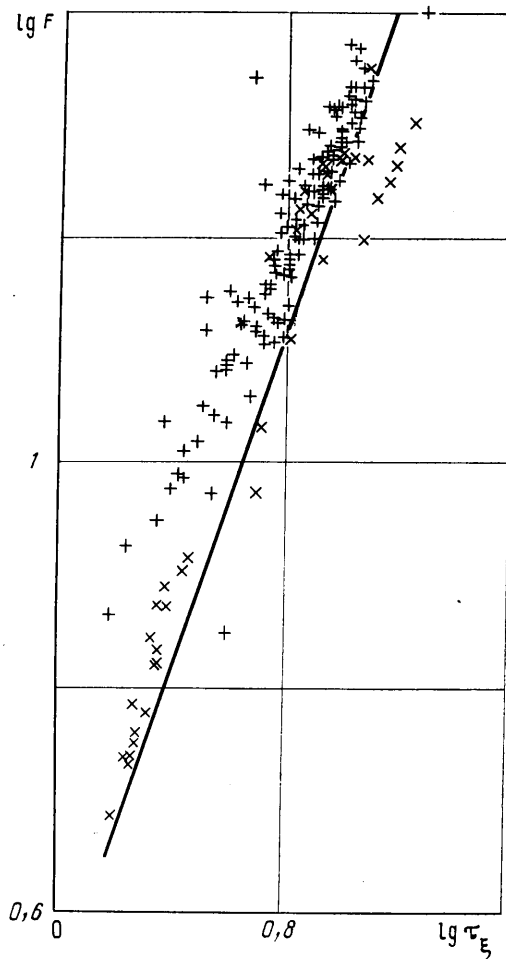
$$G = f \rho_r q = \frac{\rho_r \tau_{\xi}^3}{6\mu f [(\rho_r - \rho_b) g \operatorname{tg} \varphi]^2} \quad (7)$$

Учитывая, что при равномерном движении касательные напряжения линейно изменяются по глубине, при больших a_0/h следует τ_{ξ} определять по формуле

$$\tau_{\xi} = (1 - a_0/h) 0,5 \lambda \rho_b v^2$$

Таким образом, с помощью формулы (7) можно рассчитать расход наносов при одномерном течении воды.

Вытекающая из предложенной модели формула (7) для расхода наносов подтверждается опытными материалами из [2, 4]. В [2] приведено 198 опытов для 23 различных грунтов. В [4] — 43 опыта для 3 грунтов, из них 18 опытов проводилось с шариками полистирола с плотностью 1060 кг/м³ (в 2,6 раза легче песка). Диапазон



изменения средних диаметров частиц в различных опытах 0,2–8 мм, диапазон изменения скоростей $1,5v_T - 2$ м/с, диапазон изменения массового расхода наносов 0,09–3,7 кг/(с.м). На фигуре принято следующее обозначение: $F = G(\rho_0 g \operatorname{tg} \varphi)^2 / \rho_r$. Сплошной линией проведена теоретическая зависимость, полученная с помощью формулы (7) при $f = 0,065$, $\varphi = 28^\circ$, $n = 0,018$, $\mu = 0,1$ кг/(м.с). Отклонение опытных данных от теоретической зависимости – в пределах точности экспериментов. Искользующиеся в практике эмпирические зависимости для G , подобранные на этом же массиве данных, имеют примерно такое же отклонение.

Определим значение расхода наносов в произвольном потоке. Введем вектор $\mathbf{P} = \tau_t - a \operatorname{grad}(\rho g \xi + p)$. Из (1)–(3) следует:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial a} \right| = \frac{|\mathbf{P}| - a \rho_0 g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}{\mu}$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = - \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} \left| \frac{\partial u}{\partial a} \right|$$

С помощью интегрирования по частям получим

$$\frac{G}{f \rho_r} = \int_0^{a_0} da \int_{a_0}^a \frac{\partial u}{\partial a} da = a \int_{a_0}^a \frac{\partial u}{\partial a} da \Big|_0^{a_0} - \int_0^{a_0} a \frac{\partial u}{\partial a} da$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю. Таким образом

$$G = f \rho_r \int_{a_0}^a a \frac{\partial u}{\partial a} da \quad (8)$$

Из уравнений (1), (2) при условии (3) можно получить следующее квадратное уравнение для a_0 :

$$a_0^2 \left[(\rho_s g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial s} (\rho g \xi + p) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial l} (\rho g \xi + p) \right)^2 \right] + 2a_0 \left[\tau_{\xi s} \frac{\partial}{\partial s} (\rho g \xi + p) + \tau_{\xi l} \frac{\partial}{\partial l} (\rho g \xi + p) \right] - (\tau_{\xi s}^2 + \tau_{\xi l}^2) = 0 \quad (9)$$

Значение a_0 определяется как положительный корень уравнения (9).

Следует иметь в виду, что задача (1)–(3) имеет решение только при выполнении условия $\rho_s g \cos \gamma \operatorname{tg} \varphi > |\operatorname{grad}(\rho g \xi + p)|$, которое в случае гидростатического закона для p можно записать в виде $\gamma < \varphi$.

Автор благодарит А. Г. Куликовского, В. Я. Шкадова, М. Э. Эглит за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беликов В. В., Волченков Г. Я. Расчет нестационарных плановых деформаций подмостовых русел методом конечных элементов // Тез. докл. на 4-й Респ. конф. по науч.-техн. проблемам гидравлики дорожных водопропускных сооружений. Саратов, 1985.
2. Гончаров В. Н. Основы динамики русловых потоков. Л.: Гидрометеоздат, 1954. 452 с.
3. Мирзхулава Ц. Е. Разрыв русел и методика оценки их устойчивости. М.: Колос, 1967. 179 с.
4. Железняков Г. В., Дебольский В. К. О зависимости расхода наносов от критерия их подвижности // Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп. 1968. Вып. 288.

Москва

Поступила в редакцию
22.X.1985

УДК 532.546

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ К ПЛОСКИМ

АКСЕНОВ Б. Г., МЕДВЕДСКИЙ Р. И.

Точные решения осесимметричных задач теории фильтрации и теплопроводности имеют более сложную структуру, чем решения аналогичных им плоских задач [1–5]. Особенно это относится к задачам, в которых параметры фильтрации зависят от давления, что значительно сужает возможности не только точного, но и приближенного их решения. Например, для плоских нелинейных задач фильтрации даже при немонотонном возмущении на границе легко строится сужающаяся система оценок [6]. Однако для осесимметричных задач эта процедура утрачивает свою эффективность вследствие неудобства работы с функцией Грина в цилиндрической области. Перечисленные недостатки в ряде важных для практики случаев устраняются, если воспользоваться установленным в данной работе простым приближенным соотношением между решениями одномерных осесимметричных и плоских задач нестационарной фильтрации. С его помощью получены простые приближенные представления решений некоторых нелинейных осесимметричных задач нестационарной фильтрации при монотонных и немонотонных возмущениях на границе. Для линейных задач аналогичное соотношение было получено в [7].

1. Решение задач линейной фильтрации. При упругом режиме фильтрации жидкости в пористой среде давление жидкости удовлетворяет линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = K \Delta p_i, \quad \Delta p_i = \frac{1}{x^i} \frac{\partial}{\partial x} x^i \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad x \in [a, b], \quad t > 0 \quad (1.1)$$

где t – время, K – физическая константа; $i=0, 1$ соответствует плоскому и осесимметричному движению.

Дополним уравнения (1.1) краевыми условиями

$$p_i(x, 0) = p_i(b, t) = p_n, \quad i=0, 1 \quad (1.2)$$