

УДК 537.84

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ С ПРОВОДНИКОМ С ТОКОМ И ПОСТОЯННЫМ МАГНИТОМ

КИРЮШИН В. В., НАЗАРЕНКО А. В.

Равновесие магнитной жидкости во внешних магнитных полях исследовалось в ряде работ. В рамках модели намагничивающейся сплошной среды [1, 2] определена форма свободной поверхности магнитной жидкости в магнитном поле малого постоянного магнита, одного или двух горизонтальных проводников с током [3], вертикального проводника с током [3-5], вертикальной полосы с током, горизонтального витка с током, квадрупольной магнитной линзы [6]. Подробный обзор перечисленных работ имеется в [2]. Менее изучено обратное влияние магнитной жидкости на источники поля; имеется лишь экспериментальный результат о силе, действующей на постоянный магнит, погруженный в магнитную жидкость вблизи ее свободной поверхности [7].

В данной работе исследуется сила, действующая со стороны магнитной жидкости на проводник с током или постоянный магнит, расположенный около ее бесконечной свободной поверхности. Показано, что эта сила равна весу жидкости, поднятой магнитным полем выше первоначального горизонтального уровня. Найдена сила, когда жидкость слабомагнитная и когда форма поверхности жидкости мало отличается от плоской. Рассмотрено равновесие магнита, подвешенного на пружинке около поверхности магнитной жидкости. Найдена критическая высота, при которой магнит перестает удерживаться пружиной и срывается в жидкость. Экспериментально полученные значения величины силы, действующей на магнит, и высоты срыва магнита в жидкость хорошо согласуются с теоретическими результатами.

1. Рассмотрим взаимодействие магнитной жидкости с расположенным около ее свободной поверхности проводником с током или постоянным магнитом. На жидкость во внешнем магнитном поле действует сила, которая изменяет ее первоначально плоскую бесконечную горизонтальную поверхность. Равная, но противоположно направленная сила  $F$  действует на проводник с током или магнит. Будем предполагать, что жидкость несжимаема, а ее магнитная проницаемость  $\mu$  постоянна. Выберем декартову систему координат  $(x, y, z)$  так, что ось  $z$  вертикальна и проходит через геометрический центр магнита или ось проводника. Пусть  $z=h(x, y)-l$  — уравнение свободной поверхности жидкости  $\Sigma$ . Уровень жидкости на бесконечности, где нет магнитного поля, совпадает с плоскостью  $z=-l$ . При этих предположениях уравнение свободной поверхности жидкости имеет вид [3]

$$\rho gh = \frac{\mu-1}{8\pi} (\mu H_n^2 + H_\tau^2) |_\Sigma \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$ ,  $g$ ,  $H_n$ ,  $H_\tau$  — плотность жидкости, ускорение силы тяжести, нормальная и тангенциальная компоненты напряженности магнитного поля в жидкости соответственно.

Магнитное поле  $\mathbf{H}$  удовлетворяет стационарным уравнениям Максвелла и представляется в виде суммы поля  $\mathbf{H}_0$  проводника или магнита в отсутствие жидкости и поля  $\mathbf{H}'$ , обусловленного присутствием магнитной жидкости. Скалярный потенциал  $\phi'$  магнитного поля  $\mathbf{H}'$  является потен-

циалом простого слоя

$$\varphi' = \int_{\Sigma} \frac{\sigma(\mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|} d\Sigma, \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_e+\mathbf{H}', \quad \mathbf{H}'=-\nabla\varphi' \quad (1.2)$$

Здесь  $\sigma(\mathbf{r}_s)$  — функция координат точек поверхности  $\Sigma$ .

Учитывая формулу для скачка нормальной производной потенциала простого слоя [8] и соотношения для магнитного поля на границе раздела жидкость — воздух  $\Sigma$ , получим уравнение для  $\sigma$

$$(\mu-1) \left[ H_{en}(\mathbf{r}) + \int_{\Sigma} \sigma(\mathbf{r}_s) \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^3} d\Sigma - 2\pi\sigma(\mathbf{r}) \right] = 4\pi\sigma(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

Здесь вектор нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\Sigma$  направлен в сторону воздуха. Введем безразмерные переменные

$$h^* = \frac{h}{|l|}, \quad \mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{|l|}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{H_c}, \quad H_c = H_e(0, 0, -l) \quad (1.4)$$

$$\alpha = \frac{\mu-1}{8\pi\rho g |l|} H_c^2, \quad H_e^* = \frac{H_e}{H_c}$$

Здесь  $|l|$ ,  $H_c$  — расстояние от невозмущенной поверхности жидкости до геометрического центра магнита или оси проводника и характерная величина магнитного поля соответственно.

В безразмерных переменных (1.4) система уравнений (1.1)–(1.3) имеет вид (звездочки при безразмерных переменных  $h^*$ ,  $\mathbf{r}^*$ ,  $\sigma^*$ ,  $\mathbf{H}^*$ ,  $H_e^*$  далее опускаются)

$$h = \alpha(\mu H_n^2 + H_r^2)|_{\Sigma}, \quad H_n = \frac{4\pi\sigma}{\mu-1} \quad (1.5)$$

$$H_{en} + \int_{\Sigma} \sigma(\mathbf{r}_s) \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^3} d\Sigma = \frac{\mu+1}{\mu-1} 2\pi\sigma$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \int_{\Sigma} \sigma(\mathbf{r}_s) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^3} d\Sigma$$

Перечеркнутый интеграл в последней формуле (1.5) понимается в смысле главного значения. Решение системы уравнений (1.5) зависит от двух безразмерных параметров  $\mu-1$ ,  $\alpha$  и безразмерного поля  $H_e$  в отсутствие жидкости.

Если постоянный магнит или проводник с током расположен не в воздухе, а внутри магнитной жидкости, то необходимо, вообще говоря, решать уравнения Максвелла для искаженного поля  $\mathbf{H}'$  не в двух, а в трех областях: жидкости, воздуха и магнита или проводника. В этом нет необходимости, если внешнее магнитное поле можно представить созданным системой точечных «магнитных зарядов» или бесконечно тонких проводников с током. Система уравнений (1.5) будет справедлива и в этом случае, причем поле  $H_e$  является полем системы точечных источников в безграничной жидкости с проницаемостью  $\mu$ .

2. Покажем, что сила  $\mathbf{F}$ , действующая на постоянный магнит, расположенный около бесконечной поверхности магнитной жидкости, равна весу жидкости, поднятой выше первоначального горизонтального уровня, который был в отсутствие магнита

$$\mathbf{F} = \rho g \int_{\Sigma_0} h d\Sigma \quad (2.1)$$

Здесь  $\Sigma_0$  — плоскость  $z=-l$ .

Рассмотрим контрольный объем — прямой круговой цилиндр  $V$ , ось которого совпадает с осью  $z$ , а основания горизонтальны, причем нижнее основание находится в жидкости, а верхнее — в воздухе. Постоянный магнит расположен внутри контрольного объема. Запишем уравнение равновесия объема  $V$  и, учтя выражение для тензора напряжений в магнитной жидкости и воздухе [1], получим

$$F^i = \int_{\Sigma_1} \sigma_{ik} n^k d\Sigma - \frac{1}{2} \rho g \int_S n^i h^2 ds + m_1 g^i \quad (2.2)$$

Здесь  $\Sigma_1$  — поверхность объема  $V$ ,  $m_1$  — масса жидкости в объеме  $V$  выше плоскости  $z = -l$ ,  $\sigma_{ik}$  — тензор максвелловских напряжений,  $S$  — линия, полученная при пересечении цилиндра  $V$  с горизонтальной плоскостью  $z = -l$ .

Будем увеличивать радиус и длину контрольного объема до бесконечности. Тогда интеграл по окружности  $S$  и интеграл от максвелловских напряжений в формуле (2.2) устремляются к нулю. В пределе уравнение (2.2) переходит в искомую формулу для силы (2.1).

Аналогично показывается, что сила  $F$ , действующая на прямолинейный проводник с током, параллельный поверхности жидкости, рассчитанная на единицу его длины, равна весу жидкости, поднятой выше первоначального горизонтального уровня в слое единичной толщины и перпендикулярном оси проводника.

Отметим, что полученный результат для силы (2.1) справедлив независимо от того, где находится проводник или магнит — вне жидкости или внутри ее.

В обоих случаях сила  $F$  направлена вертикально вниз. Введем безразмерную силу  $F^* = F/\rho g l^n$ , где  $n=3$  в случае постоянного магнита и  $n=0$  в случае проводника с током. Далее звездочка у безразмерной переменной  $F^*$ , как и у других безразмерных переменных, будет опускаться.

3. Рассмотрим случай  $\alpha \ll 1$ ,  $\mu - 1 \sim 1$ . Решение системы уравнений (1.5) в этом случае представляется в виде ряда по степеням  $\alpha$ . В нулевом приближении по  $\alpha$  поверхность жидкости  $\Sigma$  — плоская, а в первом приближении определяется уравнением

$$h = \alpha \frac{4}{(1+\mu)^2} [(\mu H_{e1\tau} + H_{e2\tau})^2 + \mu (H_{e1n} + H_{e2n})^2] |_{z=-1} \quad (3.1)$$

Здесь  $H_{e1}$  и  $H_{e2}$  — магнитные поля, создаваемые «источниками» поля, расположенными внутри и вне магнитной жидкости.

Рассмотрим случай, когда внешнее магнитное поле  $H_e$  создается тонким прямолинейным проводником с током  $J$ , который параллелен поверхности жидкости и отстоит от нее на расстоянии  $l$ . Характерная величина поля на поверхности жидкости  $H_c = 2J/cl$ , где  $c$  — скорость света в вакууме. В этом случае форма поверхности жидкости в первом приближении по  $\alpha$  имеет вид

$$h = \alpha h_1, \quad h_1 = \frac{4}{(1+\mu)^2} \frac{\mu x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Форма поверхности  $h_1(x)$  качественно различна при  $\mu < 2$  и  $\mu > 2$ . Оба случая изображены на фиг. 1. При  $\mu < 2$  (кривая 1) профиль поверхности  $h_1(x)$  имеет единственный максимум в точке  $x=0$ . При  $\mu > 2$  (кривая 2)

профиль поверхности  $h_1(x)$  имеет в точке  $x=0$  минимум, а в точках  $x_c = \pm\sqrt{1-2/\mu}$  — максимумы. Высота жидкости под проводником  $h(0)$  с ростом параметра  $\mu$  от 1 до 3 увеличивается, а при дальнейшем увеличении  $\mu$  уменьшается до нуля. Значения боковых максимумов  $h(x_c)$ , существующих при  $\mu > 2$ , с ростом  $\mu$  монотонно увеличиваются.

Сила  $F$ , действующая на единицу длины проводника, в рассматриваемом случае равна  $2\pi\alpha/(\mu+1)$ .

Рассмотрим случай, когда внешнее магнитное поле создается однородно намагниченным постоянным магнитом. Магнит имеет форму тонкого цилиндра высотой  $2A$  и радиусом  $R$ , расположенного вертикально, а его намагниченность  $I$  направлена вдоль его оси. Магнитное поле такого магнита на достаточном удалении от его полюсов асимптотически совпадает с полем «магнитных зарядов» величиной  $\pm\pi R^2 I$ , расположенных на концах цилиндра. Подставив выражение для поля магнита в формулу (3.1), найдем уравнение формы поверхности жидкости. Интегрируя найденное уравнение формы поверхности согласно (2.1), получим силу  $F$ , действующую на магнит со стороны жидкости в первом приближении по  $\alpha$

$$F = \frac{2\pi\epsilon^2\alpha}{\mu+1} \left[ \frac{\gamma_1}{(1-a)^2} + \frac{\gamma_2}{(1+a)^2} - 2\gamma_3 \right], \quad \epsilon^{-1} = \frac{1}{(1-a)^2} + \frac{1}{(1+a)^2} \quad (3.2)$$

Если магнит вне жидкости,  $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=1$ ; если магнит частично погружен в жидкость,  $\gamma_1=1/\mu$ ,  $\gamma_2=1$ ,  $\gamma_3=0$ ; если магнит полностью расположен в жидкости,  $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=1/\mu$ . Параметр  $a$  является отношением половины длины магнита  $A$  к расстоянию  $l$  от его центра до невозмущенной поверхности жидкости.

Случай, когда жидкость является слабомагнитной,  $\mu-1 \ll 1$ , а параметр  $\alpha \sim 1$ , исследовался в [3], где было получено выражение для формы поверхности магнитной жидкости в нулевом приближении по  $\mu-1$  для проводника с током. Сила  $F$ , действующая на единицу длины проводника, полученная на основе найденного в [3] уравнения формы поверхности, равна

$$F = 2 \int_0^{\xi_1} \sqrt{\frac{\alpha}{h+1} - h^2} dh \quad (3.3)$$

$$\xi+1 = \frac{\alpha}{\xi^2} \quad (3.4)$$

Здесь  $\xi_1$  — наименьший действительный корень уравнения (3.4).

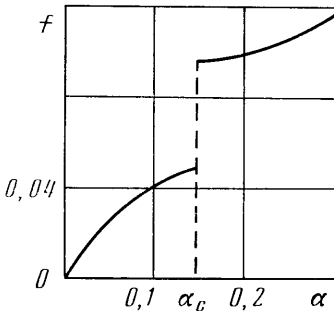
Интеграл в (3.3) выражается через эллиптические интегралы Лежандра первого и третьего рода. Из-за громоздкости полученное выражение не приводится. Зависимость безразмерной величины силы (3.3) от параметра  $\alpha$  изображена на фиг. 2. Скачок величины силы при  $\alpha=\alpha_c=4/27$  связан с существенно различной формой поверхности жидкости при  $\alpha < 4/27$  и  $\alpha > 4/27$  [3].

4. Рассмотрим равновесие цилиндрического постоянного магнита с намагниченностью  $I$ , радиусом  $R$  и длиной  $2A$ , подвешенного вертикально на пружинке жесткости  $K$  над поверхностью жидкости. Расстояние от точки закрепления пружинки до невозмущенной поверхности жидкости равно  $D$ , расстояние от геометрического центра магнита до невозмущенной поверхности жидкости равно  $l$ . Положение равновесия магнита определяется из условия равенства нулю суммы всех сил, действующих на него: упругой силы пружинки, веса магнита и силы притяжения магнита жидкостью  $F$ . Уравнение равновесия имеет следующий безразмерный вид:

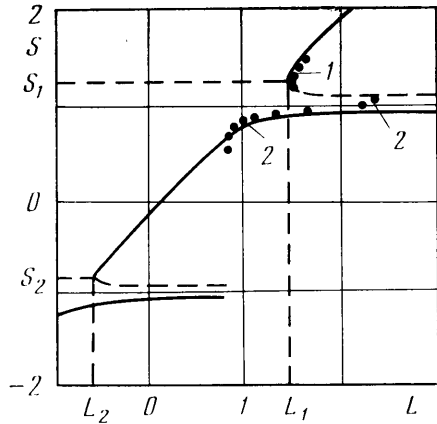
$$F(s) + k(s-L) = 0, \quad s = \frac{1}{a} = \frac{l}{A} \quad (4.1)$$

$$L = \frac{D-l_0-A}{A}, \quad k = \frac{4KA^3}{\pi^2 R^4 I^2}$$

Здесь  $l_0$  — длина пружинки, растянутой под действием веса магнита в отсутствие жидкости.



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим положение равновесия магнита в случае, когда  $\alpha \ll 1$ , а  $\mu \sim 1$ . В этом случае величина безразмерной силы  $F$  определяется формулой (3.2). Подставив выражение для силы (3.2) в уравнение (4.1), найдем уравнение для безразмерной высоты  $s$  подъема магнита

$$\frac{\gamma_1}{(s-1)^2} + \frac{\gamma_2}{(s+1)^2} - \frac{2\gamma_3}{s^2} = \frac{\mu+1}{\mu-1} k(L-s) \quad (4.2)$$

Положение равновесия магнита  $s$  определяется в зависимости от параметров  $k$ ,  $\mu$  и  $L$ . На фиг. 3 изображена зависимость  $s(L)$  для  $k=19,8$ ,  $\mu=1,4$ . Из графика видно, что при  $L < L_2$  имеется одно положение равновесия при  $L_2 < L < L_1$  — три, а при  $L > L_1$  таких положений пять. Критические значения  $s_1$  и  $s_2$  определяются из соотношений

$$\frac{1}{(s_1-1)^3} + \frac{1}{(s_1+1)^3} - \frac{2}{s_1^3} = \frac{\mu+1}{\mu-1} \frac{k}{2}, \quad s_1 > 1$$

$$\frac{1}{\mu(s_2-1)^3} + \frac{1}{(s_2+1)^3} = \frac{\mu+1}{\mu-1} \frac{k}{2}, \quad |s_2| < 1$$

Критические значения  $L_1$  и  $L_2$  определяются по значениям  $s_1$ ,  $s_2$  из формулы (4.2).

Положение равновесия магнита устойчиво, если потенциальная энергия магнита в жидкости имеет минимум

$$\frac{d}{ds} (k(s-L) + F(s)) > 0 \quad (4.3)$$

Из условия (4.3) следует, что если положение равновесия единственно,  $L < L_2$ , то оно устойчиво. Если существует три положения равновесия,  $L_2 < L < L_1$ , то два крайних из них будут устойчивы, а промежуточное неустойчиво. В случае, если имеется пять положений равновесия, устойчивое и неустойчивое положения равновесия чередуются, причем крайние положения устойчивы. Неустойчивые ветви кривой  $s(L)$  отмечены на фиг. 3 пунктиром.

5. В эксперименте использовалась магнитная жидкость, полученная во ВНИИПИГазпереработка, г. Краснодара, представляющая собой суспензию магнетита в керосине с намагниченностью насыщения 57 кА/м и плотностью 1,67 г/см<sup>3</sup>. Стакан с магнитной жидкостью помещался на подвижной планке рейсмуса, которая вращением винта поднималась и опускалась. Над стаканом на пружинке жесткостью 156,4 дин/см подвешивался постоянный ферритовый магнит высотой 10 см, радиусом 0,4 см и намагниченностью 125 Гс. Сила, действующая на магнит, определялась по растяжению пружинки от начального положения, когда стакан с жидкостью отсутствовал. Одновременно измерялось расстояние от центра магнита до невозмущенной поверхности жидкости  $l$  и вычислялись безразмерные параметры  $s$ ,  $L$ . На фиг. 3 изображены точки, полученные в эксперименте: 1 — при уменьшении высоты, 2 — при увеличении. Наблюдалось, что при уменьшении  $l$  сила монотонно возрастает, а при критическом значении  $l=6,46$  см магнит скачком срывается в жидкость, при этом сила увеличивалась в 4 раза. Сила при критической высоте была равна 78,2 дин. При дальнейшем уменьшении высоты наблюдалось монотонное уменьшение силы. Если после срыва магнита в жидкость увеличивать расстояние  $l$ , то сила будет монотонно возрастать, а при  $h=5,28$  см магнит оторвется от поверхности жидкости с прилипшей на его полюсе каплей магнитной жидкости. Вес прилипшей капли равен 219 мг. Экспериментальные и теоретические результаты хорошо согласуются при  $s>1$  и  $s<1$ . Расхождение экспериментальных данных с теоретическими при  $s\sim 1$  объясняется неучетом силы поверхностного натяжения. Теоретическое значение критической высоты, полученное из уравнения (4.2), равно 6,27 см и близко к экспериментальному значению 6,46 см.

Авторы благодарят В. В. Гогосова за полезное обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука. 1976. 535 с.
2. Гогосов В. В., Налегова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ. 1981. Т. 16. С. 76–208.
3. Кирюшин В. В., Чыонг За Биль. Фигуры равновесия намагничивающейся жидкости в магнитном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 123–128.
4. Борисов И. Д. О равновесных формах поверхности намагничивающейся жидкости // Магнит. гидродинамика. 1976. № 4. С. 11–18.
5. Krueger D. A., Jones T. B. Hydrostatic profile of ferrofluid around a vertical current-carrying wire // Phys. Fluids. 1974. V. 17. № 10. P. 1831–1833.
6. Берковский Б. М., Орлов Л. П. К исследованию формы свободной поверхности и аналога пинч-эффекта в намагничивающихся жидкостях // Магнит. гидродинамика. 1973. № 4. С. 38–44.
7. Барков Ю. Д., Фертман В. Е. Экспериментальное исследование плавания магнитных тел в намагничивающейся жидкости // Магнит. гидродинамика. 1978. № 1. С. 23–26.
8. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука. 1976. 616 с.

Москва

Поступила в редакцию  
15.VII.1986