

УДК 536.25

**ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ  
В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ НАЛИЧИИ РАСТВОРИМОГО  
ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА**

**НЕПОМНЯЩИЙ А. А., СИМАНОВСКИЙ И. Б.**

Термокапиллярная неустойчивость слоя жидкости со свободной поверхностью, на которую нанесено нерастворимое поверхностно-активное вещество (ПАВ), исследовалась в [1]. Учет процессов адсорбции и десорбции осуществлен в [2]. Однослойный подход, использовавшийся в упомянутых работах, потребовал постановки модельных граничных условий для температуры на свободной поверхности. В [3] задача о возникновении термокапиллярной конвекции при наличии нерастворимого ПАВ решалась в двухслойной постановке с учетом гидродинамических и тепловых процессов по обе стороны от границы раздела. Этот подход привел к обнаружению нового типа колебательной неустойчивости.

В настоящей работе изучается влияние растворимости ПАВ на монотонную и колебательную термокапиллярную неустойчивость равновесия в двухслойной системе. Установлено, что с ростом параметра, характеризующего растворимость ПАВ, происходит понижение порога монотонной неустойчивости; в итоге монотонные возмущения становятся наиболее опасными.

1. Пусть пространство между двумя твердыми горизонтальными пластинами, на которых поддерживается постоянная разная температура (разность температур равна  $\theta$ ), заполнено двумя вязкими несмешивающимися средами. Начало координат помещено на границе раздела; ось  $x$  направлена горизонтально, ось  $y$  — вертикально вверх. Уравнения твердых границ:  $y = a_1$  и  $y = -a_2$ . Коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности и температуропроводности соответственно равны  $\eta_m, \nu_m, \kappa_m, \chi_m$  ( $m=1$  для верхнего слоя,  $m=2$  — для нижнего). Влияние архимедовой подъемной силы и искривления границы раздела не учитывается; граница считается плоской и недеформируемой ( $y=0$ ).

Полагаем, что в нижней жидкости растворена поверхностно-активная примесь, характеризуемая объемной концентрацией  $C(x, y)$  и поверхностной концентрацией  $\Gamma(x)$ . Термодинамически равновесное значение поверхностной концентрации  $\Gamma_e$  связано со значениями объемной концентрации  $C$ , температуры  $T_2$  и давления  $p_2$  в нижней жидкости на границе раздела некоторым соотношением  $\Gamma_e = f(C, T_2, p_2)$ , явный вид которого в дальнейшем не используется. При малом отклонении  $\Gamma$  от  $\Gamma_e$  возникает поток примеси

$$j = -\frac{1}{\tau} [\Gamma - f(C, T_2, p_2)] \quad (1.1)$$

где  $\tau$  — время релаксации ( $j > 0$ , если поток направлен из объема к поверхности). Изменение поверхностной концентрации ПАВ с учетом конвекции, диффузии, адсорбции и десорбции описывается уравнением

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x \Gamma) = D_0 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + j \quad (1.2)$$

где  $v_x$  — горизонтальная компонента скорости жидкости на границе раздела,  $D_0$  — коэффициент поверхностной диффузии ПАВ. Распределение

объемной концентрации  $C$  определяется краевой задачей

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + v \nabla C = D_c \Delta C, \quad -a_2 < y < 0 \\ y = -a_2: \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \quad y = 0: \quad -D_c \frac{\partial C}{\partial y} = j \end{aligned} \quad (1.3)$$

Предполагается линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и поверхностной концентрации ПАВ

$$\sigma = \sigma_0 - \alpha_T T - \alpha_\Gamma \Gamma$$

Механическое равновесие характеризуется постоянным значением вертикального градиента температуры, равным  $-s\theta\kappa_2/(a_1\kappa_2 + a_2\kappa_1)$  в верхней среде и  $-s\theta\kappa_1/(a_1\kappa_2 + a_2\kappa_1)$  — в нижней среде ( $s = -1$  при подогреве сверху,  $s = 1$  при подогреве снизу), а также постоянными значениями поверхностной и объемной концентрации ПАВ:  $\Gamma_0$  и  $C_0$ . Равновесные температуру и давление на границе раздела обозначим через  $T_0$  и  $p_0$ .

Перейдем к исследованию устойчивости равновесия. Введем обозначения:  $\eta = \eta_1/\eta_2$ ,  $v = v_1/v_2$ ,  $\kappa = \kappa_1/\kappa_2$ ,  $\chi = \chi_1/\chi_2$ ,  $a = a_2/a_1$ . В качестве единиц длины, времени, функции тока, температуры, поверхностной концентрации, объемной концентрации и плотности потока выберем соответственно  $a_1$ ,  $a_1^2/v_1$ ,  $v_1$ ,  $\theta$ ,  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_0/l$ ,  $\Gamma_0 v_1/la_1$ , где  $l = (\partial f/\partial C)_{c_0, T_0, p_0}$ . Наложим на состояние равновесия возмущения функции тока  $\psi_m$ , температуры  $T_m$ , объемной концентрации  $C'$  и поверхностной концентрации  $\Gamma'$

$$\begin{aligned} (\psi_1', T_1', \psi_2', T_2', C', \Gamma', j') = \\ = (\psi_1(y), T_1(y), \psi_2(y), T_2(y), C(y), \Gamma, j) \exp[ikx - (\lambda + i\omega)t] \end{aligned}$$

Здесь  $k$  — волновое число;  $\lambda + i\omega$  — комплексный декремент.

Линеаризованные уравнения для возмущений функции тока и температуры имеют вид [4]

$$\begin{aligned} (\lambda + i\omega) D \psi_m = -d_m D^2 \psi_m \\ - (\lambda + i\omega) T_m - ik \psi_m A_m = \frac{b_m}{Pr} D T_m \quad (m=1, 2) \\ D = \frac{d^2}{dy^2} - k^2, \quad d_1 = b_1 = 1, \quad d_2 = \frac{1}{v}, \quad b_2 = \frac{1}{\chi} \\ Pr = \frac{v_1}{\chi_1}, \quad A_1 = -\frac{s}{(1 + \kappa a)}, \quad A_2 = \frac{-s\kappa}{(1 + \kappa a)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $Pr$  — число Прандтля;  $A_1, A_2$  — безразмерные градиенты температуры в верхней и нижней жидкости. Обозначая дифференцирование по  $y$  штрихом, запишем условия на твердых границах

$$y = 1: \psi_1 = \psi_1' = T_1 = 0, \quad y = -a: \psi_2 = \psi_2' = T_2 = 0 \quad (1.5)$$

и на границе раздела

$$y = 0: \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \psi_1' = \psi_2', \quad T_1 = T_2, \quad \kappa T_1' = T_2' \quad (1.6)$$

$$\eta \psi_1'' - ik(Mr T_1 + B\Gamma) = \psi_2'', \quad Mr = \frac{\alpha_T \theta a_1}{\eta_2 v_1}, \quad B = \frac{\alpha_\Gamma \Gamma_0 a_1}{\eta_2 v_1} \quad (1.7)$$

При линеаризации уравнения (1.1) учтем только зависимость термодинамически равновесного значения поверхностной концентрации  $\Gamma_e$  от объемной концентрации вблизи поверхности (зависимостью от температуры и давления пренебрегаем).

Тогда возмущение безразмерного потока примеси определяется выражением

$$y=0: \quad j=-AE(\Gamma-C), \quad E=\frac{l^2}{\nu_1\tau}, \quad A=\frac{a_1}{l} \quad (1.8)$$

где  $E$  — безразмерный параметр, характеризующий время релаксации, а параметр  $A$  пропорционален толщине слоя.

Уравнения (1.2), (1.3) после обезразмеривания и линеаризации приводятся к виду

$$-(\lambda+i\omega)C=Sc^{-1}DC, \quad Sc=\nu_1/D_c \quad (1.9)$$

$$y=-a: C'=0, \quad y=0: C'=-Sc j$$

$$y=0: -(\lambda+i\omega)\Gamma+ik\psi_1'=-D_s k^2\Gamma+Aj, \quad D_s=D_0/\nu_1 \quad (1.10)$$

где  $Sc$  — число Шмидта.

2. Краевая задача (1.9), (1.10) с учетом (1.8) допускает аналитическое решение

$$C(y)=\frac{AE Sc \Gamma \operatorname{ch}[q(y+a)]}{q \operatorname{sh} qa+AE Sc \operatorname{ch} qa}, \quad q=[k^2-(\lambda+i\omega)Sc]^{1/2}$$

Отсюда находим

$$j=-AE\Gamma/F, \quad F=1+AE Sc \operatorname{cth}(qa)q^{-1} \quad (2.1)$$

Исключая  $\Gamma$  из уравнений (1.7), (1.10), получаем

$$y=0: \quad \eta\psi_1''-ik \operatorname{Mg} T_1 + \frac{k^2 B \psi_1'}{\lambda+i\omega-D_s k^2-A^2 E F^{-1}} = \psi_2'' \quad (2.2)$$

При  $A^2 E = a_1^2/\nu_1\tau \rightarrow 0$  (время релаксации для процесса растворения велико по сравнению с характерным гидродинамическим временем) растворение ПАВ не оказывает влияния на термокапиллярную неустойчивость равновесия.

Задача (1.4)–(1.6), (2.2) описывает как монотонные, так и колебательные ветви неустойчивости. Для границы монотонной неустойчивости ( $\lambda=\omega=0$ ) можно получить аналитическое выражение, обобщающее аналогичный критерий для нерастворимого ПАВ, полученный в [3]

$$\operatorname{Mg} = sp/q$$

$$p=4k^2(1+\kappa a)(s_1 c_2 + s_2 c_1 \kappa) \left[ 2 \left( \eta \frac{s_1 c_1 - k}{s_1^2 - k^2} + \frac{s_2 c_2 - \kappa a}{s_2^2 - k^2 a^2} \right) + \right. \quad (2.3)$$

$$\left. + \frac{Bk}{D_s k^2 + A^2 E (1 + AE Sc c_2 / ks_2)^{-1}} \right]$$

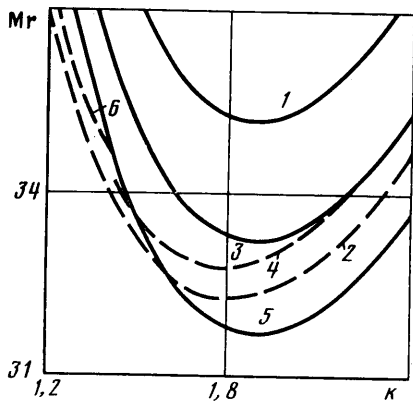
$$q = \kappa \operatorname{Pr} \left[ \chi \frac{s_1 (s_2^3 - k^3 a^3 c_2)}{s_2^2 - k^2 a^2} - \frac{s_2 (s_1^3 - k^3 c_1)}{s_1^2 - k^2} \right]$$

$$s_1 = \operatorname{sh} k, \quad c_1 = \operatorname{ch} k, \quad s_2 = \operatorname{sh} \kappa a, \quad c_2 = \operatorname{ch} \kappa a$$

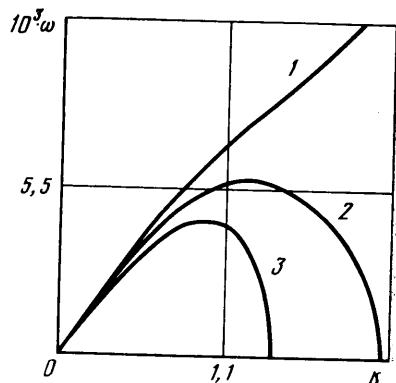
Из выражения (2.3) следует, что для заданной системы жидкостей с ПАВ, характеризуемой фиксированным значением параметра  $E$ , пороговое значение числа  $\operatorname{Mg}$  с ростом  $A$  монотонно убывает. Скорость убывания порогового числа проще всего оценить в области не слишком больших значений волнового числа  $k \ll AE Sc$ . В этом случае влияние растворимости ( $A \neq 0$ ) сводится к эффективному уменьшению параметра  $B$

$$\operatorname{Mg}(A, B, k) = \operatorname{Mg}(0, B_e(k), k)$$

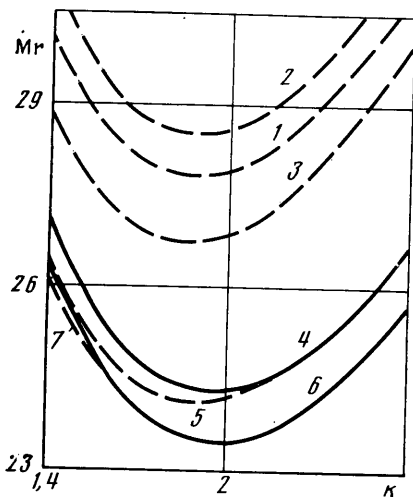
$$B_e(k) = \frac{B}{1 + A(k \operatorname{cth} \kappa a)^{-1} H}, \quad H = (D_s Sc)^{-1}$$



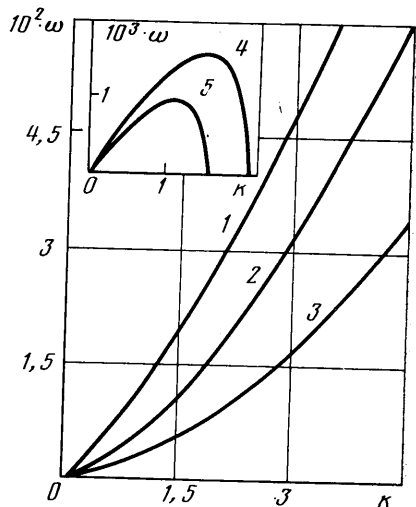
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Отсюда видно, что определяющее влияние на скорость снижения порога монотонной неустойчивости с ростом  $A$  оказывает параметр  $H = D_c/D_0$ . Критическое значение  $Mr$  при  $A \rightarrow 0$  такое же, как для нерастворимого поверхностно-активного вещества, а при  $A \rightarrow \infty$  такое же, как для случая термокапиллярной конвекции в отсутствие ПАВ.

Перейдем к рассмотрению колебательной неустойчивости. В [3] для случая нерастворимого ПАВ была получена длинноволновая асимптотика частоты колебаний

$$\omega = \omega^{(1)}k, \quad \omega^{(1)2} = Bf(\text{Pr}, \eta, \nu, \kappa, \chi, a)$$

Здесь  $f$  — известная функция параметров системы, принимающая положительное значение, в частности, для системы воздух — вода при  $a=1$ . Длинноволновые разложения, аналогичные выполненным в [3], приводят для растворимого ПАВ к уравнению

$$\omega^{(1)2} = Bf/(1+aA) \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что частота длинноволновых колебаний с ростом параметра  $A$  уменьшается, однако в длинноволновой области колебательная неустойчивость сохраняется при любых значениях  $A$ .

3. Опишем результаты численных расчетов, выполненных для системы воздух — вода со следующими параметрами:  $\text{Pr}=0,758$ ;  $\eta=0,0182$ ;  $\nu=$

$=15,1$ ;  $\kappa=0,0396$ ;  $\chi=138$ ;  $a=1$  (подогрев снизу). Расчеты проводились для  $D_s=10^{-3}$ ;  $E=10^2$ ;  $Sc=10^2$  (фиг. 1, 2) и  $Sc=10^3$  (фиг. 3, 4).

Монотонные нейтральные кривые, изображенные сплошными линиями на фиг. 1, 3, строились на основе точной формулы (2.3). Расчет колебательных нейтральных кривых (штриховые линии) осуществлялся численно. Интегрирование уравнений (1.4) для  $\lambda=0$  при фиксированных значениях  $Mg$  и  $\omega$  производилось методом Рунге — Кутты. Подбор значений  $Mg$  и  $\omega$ , при которых решение может удовлетворять граничным условиям, осуществлялся методом Гаусса.

Обсудим сначала результаты расчетов при  $Sc=10^2$ . На фиг. 1 показаны нейтральные кривые, построенные для значений параметра  $A=1$  (кривые 1, 2); 1,2 (кривые 3, 4); 1,4 (кривые 5, 6). В рассматриваемом случае  $H=10$  и существенная дестабилизация монотонной моды имеет место уже при  $A \sim 1$ . Колебательная нейтральная кривая с ростом  $A$  смещается в сторону больших  $Mg$ . При  $A \sim 1,3$  монотонная неустойчивость становится более опасной. Графики зависимости частоты колебаний  $\omega$  от волнового числа  $k$  для тех же значений параметра  $A$  (кривые 1—3) показаны на фиг. 2. В точках окончания колебательной нейтральной кривой на монотонной кривой частота колебаний обращается в нуль.

На фиг. 3 изображены нейтральные кривые при  $Sc=10^3$  для значений параметра  $A=0$  (кривая 1); 4,5 (2); 13,5 (3); 53,5 (4, 5); 73,5 (6, 7). В данном случае  $H=1$ , поэтому дестабилизация монотонной моды с ростом  $A$  происходит значительно медленнее. Заметим, что при увеличении  $A$  колебательная нейтральная кривая смещается сначала в сторону больших, а затем в сторону меньших значений числа  $Mg$ . На фиг. 4 представлены графики зависимости частоты колебаний  $\omega$  от волнового числа  $k$  для тех же значений параметра  $A$ , что и на фиг. 3 (кривые 1—5).

Таким образом, эволюция нейтральных кривых с ростом параметра растворимости  $A$  существенно зависит от отношения коэффициентов объемной и поверхностной диффузии ПАВ. Если величина  $H$  велика, то уже при сравнительно небольших значениях параметра  $A$  колебательная неустойчивость равновесия сменяется монотонной. В противном случае растворимость ПАВ может приводить к снижению порога колебательной неустойчивости. Однако при достаточно больших значениях  $A$  наиболее опасной модой неустойчивости становится монотонная.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Berg J. C., Acrivos A. The effect of surface active agents on convection cells induced by surface-tension // Chem. Eng. Sci. 1965. V. 20. № 8. P. 737—745.
2. Palmer H. J., Berg J. C. Hydrodynamic stability of surfactant solutions heated from below // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. Pt 2. P. 385—402.
3. Непомнящий А. А., Симаковский И. Б. Термокапиллярная конвекция в двухслойных системах при наличии поверхностно-активного вещества на границе раздела // Изв. АН СССР: МЖГ. 1986. № 2. С. 3—8.
4. Непомнящий А. А., Симаковский И. Б. О колебательной конвективной неустойчивости равновесия двухслойных систем при наличии термокапиллярного эффекта // ПМТФ. 1985. № 1. С. 62—65.

Пермь

Поступила в редакцию  
6.IV.1987