

УДК 533.6.011

НЕЛИНЕЙНЫЕ СУБРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ТРУБЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДАВЛЕНИЯ

НИ А. Л.

Рассматриваются одномерные нелинейные колебания идеального газа в трубе, один конец которой закрыт, а на другом задано давление, периодически изменяющееся со временем. Для частот, близких к субрезонансным, получены асимптотические уравнения, управляющие периодическими движениями газа. Построены решения, содержащие ударные волны.

Ранее подобная задача, но для другого диапазона длин труб исследовалась в [1-4]. В [2] уравнения колебаний были получены методом деформированных координат Пуанкаре - Лайтхилла. Проблема сводилась к определению решений обыкновенного дифференциального уравнения на участках гладкости с последующим введением разрывов на основе специальных дополнительных предположений. В [1,4] был дан последовательный подход к решению данного класса задач, в рамках которого вопрос о разрывах решался корректно из анализа эволюции волн сжатия.

Субрезонансные колебания в закрытых трубах исследовались в [5,6]. Было установлено, что их амплитуда совпадает с амплитудой вынуждающей силы. В настоящей работе обнаружены два субрезонансных режима, причем их амплитуда ε выражается через амплитуду вынуждающей силы δ зависимостями $\varepsilon \sim \delta^{1/2}$ и $\varepsilon \sim \delta^{3/2}$.

Линейный анализ задачи не приводит к каким-либо особенностям. В данном случае имеем дело с сингулярными возмущениями, когда при формальной записи решения в виде ряда по малому параметру влияние высших членов разложения оказывается преобладающим.

Установлено, что неединственность решений для субрезонансных колебаний имеет структуру, отличную от [1]. Здесь все возможные решения не исчерпываются двумя - непрерывным и разрывным. Они существенным образом зависят от начальных условий.

Исследования данной работы в значительной степени основаны на результатах [1]. Поэтому выполненные там громоздкие выкладки опускаются. Выводы о применимости изэнтропического приближения и возможности пренебрежения изменением инвариантов Римана при взаимодействии характеристик с ударными волнами сохраняют силу и для субрезонансных колебаний.

1. Уравнения движения. Уравнения газовой динамики в характеристической форме имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\xi} + \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\xi} &= 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\eta} - \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\eta} = 0, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\zeta} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\xi} &= \frac{\partial}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\eta} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\zeta} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

Здесь $(\partial/\partial t)_{\xi}$, $(\partial/\partial t)_{\eta}$, $(\partial/\partial t)_{\zeta}$ - операторы дифференцирования вдоль характеристик C^+ , C^- , C^0 , t - время, x - декартова координата, u - скорость газа, p - давление, ρ - плотность, s - энтропия, a - скорость звука.

Будем рассматривать волны малой амплитуды ε . Как станет ясно из дальнейшего, для решения поставленной задачи надо уметь вычислять давление на границе с точностью $O(\varepsilon^3)$. Легко убедиться, что при этом из-

менением энтропии в ударных волнах можно пренебречь и течение считать изэнтропическим [1].

Уравнения движения приводятся к виду

$$\left(\frac{\partial J^+}{\partial t}\right)_{\xi} = 0, \quad \left(\frac{\partial J^-}{\partial t}\right)_{\eta} = 0$$

Рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть на правом конце трубы задано условие непротекания $u(X, t) = 0$, а на левом — давление, периодически меняющееся со временем по закону

$$p(0, t) = p_0[1 + \delta f(t)], \quad f(t+T) = f(t)$$

где δ — малый параметр, T — период, X — длина трубы.

Введем безразмерные переменные формулами

$$p = p_0(1 + \varepsilon p'), \quad a = a_0(1 + \varepsilon a'), \quad u = a_0 \varepsilon u'$$

$$J^{\pm} = a_0 \left(\varepsilon J^{\pm'} \pm \frac{2}{\kappa - 1} \right), \quad t = T t', \quad x = a_0 T x'$$

Ниже штрихи над безразмерными переменными опускаются. В новых переменных уравнения движения и граничные условия записываются так

$$\left(\frac{\partial J^+}{\partial t}\right)_{\xi} = 0, \quad \left(\frac{\partial J^-}{\partial t}\right)_{\eta} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi} = 1 + \frac{\kappa+1}{4} \varepsilon J^+(\xi) + \frac{3-\kappa}{4} \varepsilon J^-(\eta),$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\eta} = -1 + \frac{\kappa+1}{4} \varepsilon J^-(\eta) - \frac{3-\kappa}{4} \varepsilon J^+(\xi)$$

$$J^+(n, t) + J^-(n, t) = 0, \quad J^+(0, t) - J^-(0, t) = \frac{2\delta}{\kappa \varepsilon} f(t), \quad n = \frac{X}{a_0 T}$$

Будем отождествлять характеристическую переменную $\xi(\eta)$ с моментом выхода соответствующей характеристики $C^+(C^-)$ с левой (правой) границы. Тогда, интегрируя уравнения для характеристик, находим

$$C^+: \quad x = \left[1 + \frac{\kappa+1}{4} \varepsilon J^+(\xi) \right] (t - \xi) + \frac{3-\kappa}{4} I^+$$

$$C^-: \quad x = n - \left[1 - \frac{\kappa+1}{4} \varepsilon J^-(\eta) \right] (t - \eta) + \frac{3-\kappa}{4} I^-$$

$$I^+ = \int_{\xi}^t J^-(\eta) dt, \quad I^- = \int_{\eta}^t J^+(\xi) dt$$

Интегралы в выражениях для I^{\pm} берутся вдоль характеристик $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$.

Как видно из последующего анализа, положение характеристик необходимо определять с точностью ε^2 . Будем искать периодические решения задачи о колебаниях в предположении $\varepsilon \gg \delta$.

Интегралы I^{\pm} вычислим последовательными приближениями, используя в качестве первого приближения характеристики невозмущенного газа $x = t - \xi$, $x = -t + \eta + n$. Очевидно, интегралы

$$I_0^+ = \int_{\xi}^t J^-(2\tau - \xi - n) d\tau, \quad I_0^- = \int_{\eta}^t J^+(2\tau - \eta - n) d\tau$$

на кусочно-гладких решениях отличаются от точных значений I^{\pm} на величины порядка ε . Отсюда делаем вывод, что уравнения характеристик

с заменой в них величин I^\pm на I_0^\pm определяют в плоскости (t, x) кривые, отклоняющиеся от истинных характеристик течения на величины $O(\varepsilon^2)$.

Полученные в первом приближении уравнения характеристик используем для вычисления следующего приближения I^\pm .

В результате довольно громоздких выкладок [1] получим формулу для момента возвращения характеристики C^+ на левую границу после ее отражения от жесткой стенки

$$t_2 = 2n \left[1 - \frac{\kappa+1}{4} \varepsilon J^+(\xi) \right] + \varepsilon^2 \alpha J^{+2}(\xi) + \varepsilon^2 \beta + \xi - \delta \Phi(\xi) \quad (1.1)$$

$$\Phi(\xi) = \frac{3-\kappa}{4\kappa} \int_{\xi}^{t_2} f(\xi) d\xi, \quad \alpha = \frac{(3\kappa+7)(\kappa+1)}{32}, \quad \beta = \frac{(3-\kappa)(13-3\kappa)}{64} \int_{\xi}^{t_2} J^{+2} d\xi$$

$$J^+(t_2) = -J^+(\xi) + 2\delta f(t_2)/(\kappa\varepsilon) \quad (1.2)$$

Соотношение (1.1) и связь (1.2), вытекающая из граничных условий, образуют замкнутую систему уравнений, определяющую решение задачи.

Отметим здесь, что при выводе (1.1) учитывалась возможность пересечения соответствующей характеристики с ударными волнами противоположного семейства [1].

2. Исследование уравнений колебаний. Чтобы нагляднее понять структуру решений, воспользуемся приемом [1, 4]. Из (1.1) определим момент времени t_{2k+1} возвращения характеристики C^+ на левую границу после $2k$ -кратного прохождения трубы в прямом и обратном направлении

$$t_{2k+1} = \sum_{i=1}^{2k} \left[2n \left(1 - \frac{\kappa+1}{4} \varepsilon J_i^+ \right) + \varepsilon^2 (\beta + \alpha J_i^{+2}) - \delta \Phi_i \right] +$$

$$+ t_1 = t_1 + 4nk - \frac{\kappa+1}{\kappa} \delta n \sum_{i=1}^k f_{2i} + 2k\varepsilon^2 (\alpha J_1^{+2} + \beta) - \delta \sum_{i=1}^{2k} \Phi_i$$

$$J_i^+ = J^+(t_i), \quad f_i = f(t_i), \quad \Phi_i = \frac{3-\kappa}{4\kappa} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau) d\tau$$

Значение инварианта J^+ в момент времени t_{2k+1} в силу граничных условий и предыдущей формулы с точностью до членов высшего порядка малости таково

$$J_{2k+1}^+ = J_1^+ - \frac{2\delta}{\kappa\varepsilon} \sum_{l=2}^{2k+1} (-1)^l f_l = J_1^+ - \frac{2\delta}{\kappa\varepsilon} \times$$

$$\times \sum_{l=2}^{2k+1} (-1)^l \left\{ f_{l_0} + f_{l_0}' \left[(2\Delta + \varepsilon^2 \alpha J_1^{+2} + \varepsilon^2 \beta) (l-1) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\kappa+1}{2} n\varepsilon \sum_{j=1}^{l-1} J_j^+ - \delta F_l \right] \right\} = J_1^+ - \frac{2\delta}{\kappa\varepsilon} (S_1 + \varepsilon S_2 + \Delta S_3 + \varepsilon^2 S_4 + \delta S_5)$$

$$n = n_0 + \Delta, \quad \Delta \ll 1, \quad t_{l_0} = 2n_0(l-1)$$

$$f_{l_0} = f(t_{l_0}), \quad F_l = \frac{3-\kappa}{4\kappa} \int_{t_l}^{t_i} f(\xi) d\xi$$

Положим для определенности $f(t) = \cos 2\pi t$. В этом случае суммы, стоящие в (2.1), (2.2), вычисляются особенно просто.

Будем искать периодические решения (2.1), (2.2) с периодом $M = 4n_0$. Легко убедиться, что не все суммы в (2.2) — нули в трех случаях (в последующих выражениях опускаются члены высшего порядка малости, N — целое число).

В первом случае, когда $n_0 = (2N+1)/4$

$$J_{2k+1}^+ = J_1^+ - \frac{2\delta}{\kappa\varepsilon} k \cos 2\pi t_1$$

$$t_{2k+1} = 4k(n_0 + \Delta) + 2k\varepsilon^2(\alpha J_1^{+2} + \beta) + t_1$$

Разлагая величину J_{2k+1}^+ в ряд Тейлора в окрестности $t_{2k+1,0} = t_1 + 4n_0 k$ и используя условие периодичности, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет решение на участках гладкости

$$J^{+'}(4\Delta + 2\varepsilon^2\alpha J^{+2} + \varepsilon^2\beta)k = -\frac{2\delta}{\kappa\varepsilon} k \cos 2\pi t_1 \quad (2.3)$$

Отсюда сразу следуют связи $\Delta \sim \varepsilon^2$, $\varepsilon \sim \delta^{1/2}$. Это уже известный случай резонансных колебаний [1].

Во втором случае, когда $n_0 = N/2$

$$J_{2k+1}^+ = J_1^+ + \frac{\kappa+1}{\kappa} J_1^+ \psi' \cdot n_0 \delta$$

$$t_{2k+1} = t_1 + 4k(n_0 + \Delta) - \frac{\kappa+1}{\kappa} n_0 \delta \psi + 2k\varepsilon^2(\alpha J_1^{+2} + \beta)$$

$$\psi = \sum_{l=1}^k f_{2l0} = k \cos 2\pi t_1$$

$$J^{+'}[4\Delta + 2\varepsilon^2(\alpha J^{+2} + \beta)]k = \frac{\kappa+1}{\kappa} \delta (J^+ \psi)_{n_0}' \quad (2.4)$$

Отсюда $\Delta \sim \varepsilon^2$, $\varepsilon \sim \delta^{1/2}$.

И наконец, в третьем случае при $n_0 = (2N+1)/8$

$$J_{2k+1}^+ = J_1^+ - \frac{2\delta^2}{\kappa\varepsilon} \left[\frac{\kappa+1}{\kappa} \pi n_0 (-1)^N \cos 4\pi t_1 - \frac{3-\kappa}{4\kappa} \cos 4\pi t_1 \right] k$$

$$t_{2k+1} = 4nk + 2k\varepsilon^2(\alpha J^{+2} + \beta) + t_1$$

$$J^{+'}[4\Delta + 2\varepsilon^2(\alpha J^{+2} + \beta)]k = -\frac{2\delta^2}{\kappa^2\varepsilon} k$$

$$\left[(\kappa+1)\pi n_0 (-1)^N - \frac{3-\kappa}{4} \right] \cos 4\pi t_1 \quad (2.5)$$

$$\Delta \sim \varepsilon^2, \quad \varepsilon \sim \delta^{2/3}$$

Из проведенного анализа уравнений колебаний следует, что причина возникновения субрезонансных колебаний имеет чисто нелинейную природу. Здесь в резонанс вступают гармоники с частотами, отличными от основной частоты. Они возникают в высших приближениях и обусловлены нелинейными членами. Третий случай, например, в силу аналогии уравнений (2.3), (2.5) можно трактовать как резонанс под действием эффективной силы с удвоенной частотой и амплитудой $\sim \delta^2$. Уравнения (2.3)–(2.5) просто интегрируются и дают однопараметрические семей-

ства кривых. С их помощью, зная значение соответствующего параметра на каждом участке гладкости и положение разрывов, можно скомпоновать непрерывное или разрывное решение поставленной задачи.

В таком подходе [2, 3, 5] одним из основных является вопрос о выборе констант интегрирования и правиле введения в решение сильных разрывов. На него нельзя ответить без привлечения специальных дополнительных предположений.

Будем поэтому в дальнейшем придерживаться пути исследования [1, 4]. Напомним, что там изучался широкий класс задач, в который как частный случай входят задачи о периодических нелинейных колебаниях газа в трубах. Последовательный асимптотический анализ уравнений движения позволил корректно обосновать способ введения в течение сильных разрывов. Одновременно был предложен алгоритм построения решения эволюционным путем. В его основе лежит тот факт, что дифференциальные уравнения характеристик в силу специфики течения удается проинтегрировать и определить их координаты (t, x) на конечных расстояниях от места их зарождения (формулы (1.1)).

Как отмечалось ранее, уравнение (1.1) с достаточной точностью определяет положение характеристик на границе с учетом возможного взаимодействия с ударными волнами. В то же время уравнения (1.2), (2.3)–(2.5) такого взаимодействия не учитывают.

Легко убедиться [1], что учет изменения инварианта Римана при отражении от ударной волны приводит к поправкам высшего порядка малости к решению.

Действительно, ударные волны в течении образуются от пересечения характеристик C^- на расстоянии $l \sim \varepsilon$ от левой границы, причем от нее они отражаются в виде волн разрежения [1]. Отсюда с очевидностью следует, что учет взаимодействия характеристики C^+ с ударной волной приводит к появлению в правой части (2.3)–(2.5) дополнительного члена $O(\varepsilon^2)$, который отличен от нуля в узких зонах протяженности ε , лежащих в окрестности ударной волны. Очевидно, его учет дает поправки к решению, имеющие порядок малости ε^3 , и им можно пренебречь.

Что же касается правила введения разрывов в области опрокидывания решения, то здесь целиком применимы рассуждения [1]. Разрыв должен вводиться в области многозначности решения из условия равенства площадей фигур, ограниченных кривой $J^+(x, t)$ при фиксированном x и лежащих по разные стороны от ударной волны.

Заметим при этом, что во втором случае в (1.1) интегральный член – величина высшего порядка малости и им можно пренебречь. Поэтому здесь из правила введения разрыва сразу следует интегральный закон сохранения импульса [1].

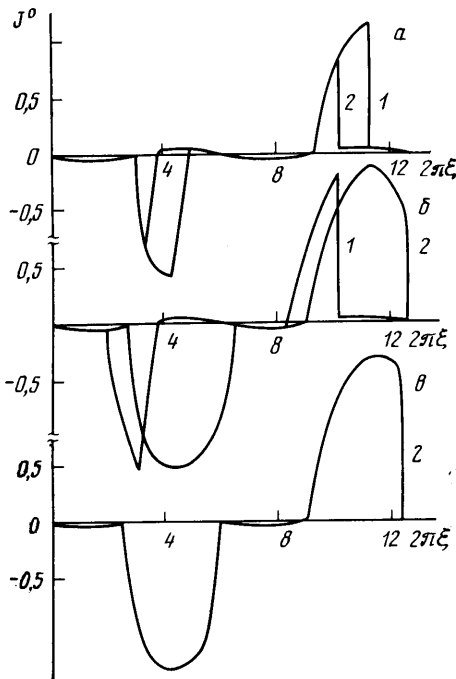
Для третьего случая членом $\delta\Phi(\xi)$, вообще говоря, пренебрегать нельзя. С другой стороны, его учет, как это следует из (2.5), представляется несущественным для субрезонансных колебаний. Член $\delta\Phi(\xi)$ в (1.1) приводит к несколько более сложному интегральному закону сохранения импульса. Забегая вперед, отметим, что расчеты дали близкие результаты с учетом и без учета члена $\delta\Phi(\xi)$ в (1.1).

3. Численные результаты. Периодические решения уравнений (1.1), (1.2) строились по схеме [1, 4]. Первоначально на отрезке (ξ_0, ξ_0+L) ($L=4n_0j$, $j=1, 2$, для второго и третьего случаев соответственно) задавалось некоторое распределение $J^+(\xi)$, удовлетворяющее условиям

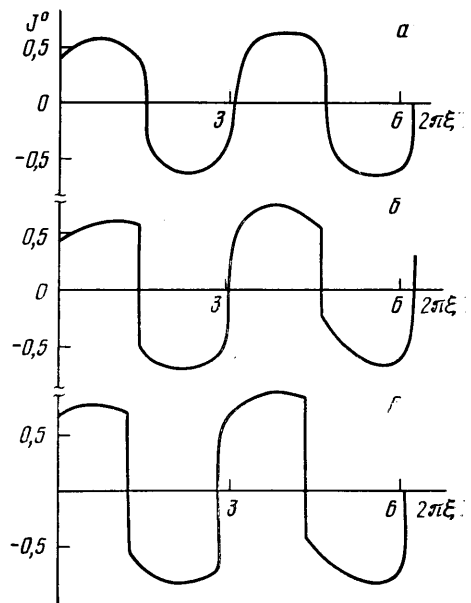
$$\int_0^{\xi_0+L} J^+(\xi) d\xi = 0, \quad J^+(\xi_0) = J^+(\xi_0+L) \quad (3.1)$$

Под действием преобразования (1.1) начальный отрезок переводился в $[t(\xi_0), t(\xi_0)+L]$. Если решение при этом «опрокидывалось», в областях многозначности вводились ударные волны по правилу площадей. Значения $J^+(\xi)$ на $[t(\xi_0), t(\xi_0)+L]$ определялись затем по формуле (1.2). Очевидно, новая построенная функция на $[t(\xi_0), t(\xi_0+L)]$ также удовлетворяет (3.1) (с учетом члена $\delta\Phi(\xi)$ первое условие, вообще говоря, не выполняется, но, как показали расчеты, интеграл в (3.1) тем не менее оказывается малым). Полученные новые значения $J^+(\xi)$ периодически продолжались на (ξ_0, ξ_0+L) , затем описанная процедура вновь повторялась до тех пор, пока не достигалось установление.

По этой методике были проведены расчеты с различными значениями δ и длинами труб n . В дальнейшем в качестве меры отклонения длины трубы от субрезонансной используется величина $\sigma = \Delta/\varepsilon^2$, $\kappa = 1.4$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фигура 1 иллюстрирует результаты расчетов для второго случая. Здесь $\varepsilon=10^{-1}$, $\delta=10^{-2}$, $n_0=1/2$, $f=-2\kappa/(\kappa+1)\sin 2\pi t$. На фиг. 1, а приведены графики для $J^0=(\kappa+1)J^+/4$, отвечающие $\sigma=0,073$ и $0,012$ (кривые 1 и 2 соответственно). При построении этих решений в процессе установления длина трубы менялась таким образом, чтобы выполнялось условие $2\sigma+\beta=0$. В обоих случаях решения на участках гладкости подчиняются одному и тому же дифференциальному уравнению (2.4), а длина трубы вырабатывается в процессе счета. Кривые 1 и 2 получены для начальных распределений $J^0=16\varepsilon \sin \pi t/(\kappa+1)$ и $4\varepsilon \sin \pi t/(\kappa+1)$ соответственно. На общих участках гладкости они совпадают.

На фиг. 1, б, в нанесены решения соответственно для $\sigma=-0,292$, $-0,34$. В качестве начальных приближений при построении кривых 2 задавалась одна и та же функция $J^0=4 \sin \pi t/(\kappa+1)$. Начальными данными для кривых 1 на фиг. 1, б, в служили решения 1 на фиг. 1а, б. Для $\sigma=-0,34$ (фиг. 1, в) резонансного решения 1 с указанными выше начальными условиями найдено не было. В процессе установления вырабатывалось непрерывное решение порядка ε (кривая 1 не нанесена на 1, в).

При $\sigma=-0,42$ не удалось построить кривой 2 с большой амплитудой. Здесь также было получено непрерывное решение $\sim\varepsilon$. Переход от разрывных решений к непрерывным в обоих случаях происходит скачком (сравни с результатами [1]). Проведенные расчеты позволяют утверждать, что в данном случае полученное в процессе установления решение существенным образом зависит от начальных условий.

На всех приведенных графиках с участками, где решение имеет большую амплитуду, соседствуют области, где возмущения малы. В рамках анализа разд. 2 им отвечают нулевые решения уравнения (2.4), которые, как мы видим, играют особую роль. Полное решение во втором случае компонуется из нетривиальных решений (2.4) и областей покоя.

На фиг. 2, а, б нанесены решения для третьего случая, отвечающие $\sigma=-2,6 \cdot 10^{-2}$, $-4,1 \cdot 10^{-2}$, $-6 \cdot 10^{-2}$. Полагалось, что $\varepsilon=10^{-2}$, $\delta=10^{-3}$, $f=-2\kappa \sin 2\pi t/(\kappa+1)$ и $n_0=1/8$.

В качестве начального распределения J_0 для решения на фиг. 2, а давалось аналитическое решение (2.5) с $2\sigma + \beta = 0$. Начальными приближениями для каждой последующей фигуры принимались решения на предыдущей фигуре. На приведенных фигурах видны ударные волны и участки разрежения.

Несмотря на уже отмеченную выше аналогию уравнений (2.3) и (2.5), для третьего случая не удалось провести столь же детального численного анализа, что и для резонансных колебаний [1], и, в частности, определить критические длины труб, где происходит переход от разрывных решений к непрерывным. Это обусловлено необходимостью использования существенно больших ресурсов ЭВМ. Действительно, в приведенном варианте точность определения положения характеристики есть величина 10^{-4} . По крайней мере такую же разрешающую способность должна обеспечивать дискретная аппроксимация задачи. Это в свою очередь требует больших затрат памяти и машинного времени.

Автор благодарит А. Н. Крайко и В. Е. Фортова за внимание к работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hu A. L.* Нелинейные резонансные колебания газа в трубе под воздействием периодически изменяющегося давления // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 607–618.
2. *Jimenez J.* Nonlinear gas oscillations in pipes. Pt 1. Theory // J. Fluid Mech. 1973. V. 59. Pt 1. P. 23–46.
3. *Collins W. D.* Forced oscillations of systems governed by one-dimensional nonlinear wave equations // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1971. V. 24. Pt 2. P. 129–153.
4. *Крайко А. Н., Ну А. Л.* О приближении нелинейной акустики в задачах о колебаниях газа в трубах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 77–88.
5. *Галиев Ш. У., Ильгамов М. А., Садыков А. В.* О периодических ударных волнах в газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 2. С. 57–66.
6. *Mortell M. P., Seymour B. R.* A finite-rate theory of quadratic resonance in closed tube // J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 411–431.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.IV.1987