

УДК 533.6.011

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА
В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ
ПРИ МАЛЫХ И УМЕРЕННЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

БРЫКИНА И. Г., РУСАКОВ В. В.

Исследуется гиперзвуковое пространственное обтекание затупленных тел вязким газом при малых и умеренных числах Рейнольдса с учетом эффектов скольжения и скачка температуры на поверхности. Уравнения пространственного вязкого ударного слоя решаются интегральным методом последовательных приближений и конечно-разностным методом в окрестности критической точки. В первом приближении метода найдено аналитическое решение задачи.

На основе анализа полученного решения предлагается простая формула, с помощью которой расчет теплового потока в трехмерную критическую точку сводится к расчету теплового потока в осесимметричную критическую точку. Приводится формула для относительного теплового потока, полученная в результате обобщения известного решения Ченга [1]. Путем сравнения аналитических и численных решений оценивается точность и область применимости полученных формул.

Ранее пространственные задачи теории сверхзвукового вязкого ударного слоя при небольших числах Рейнольдса в аналогичной постановке, но без учета эффектов скольжения рассматривались в [2-5].

1. Рассмотрим стационарное трехмерное обтекание гладкого затупленного тела гиперзвуковым потоком вязкого газа при малых и умеренных числах Рейнольдса. Течение исследуется в рамках модели, аналогичной распространенной двухслойной модели вязкого ударного слоя, предложенной в [1] для осесимметричного обтекания и основанной на предположении о малой толщине возмущенной области течения.

Выберем систему координат, нормально связанную с обтекаемой поверхностью, так, чтобы ее начало совпадало с точкой торможения потока, поверхности $x^3 = \text{const}$ были параллельны поверхности тела, а x^1 и x^2 выберем так, чтобы в критической точке направления соответствующих координатных линий лежали в плоскостях главных кривизн. В качестве характерного размера R выберем меньший из радиусов главных кривизн.

Уравнения пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки в переменных типа переменных Дородницына имеют вид

$$-(\varphi^1 + \kappa\varphi^2) \frac{dw^\alpha}{d\xi} + d_\alpha (w^\alpha)^2 + 2d_\alpha \frac{p_2^\alpha}{\rho} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\mu\rho}{\text{Re} \Delta^2} \frac{dw^\alpha}{d\xi} \right)$$

$$w^\alpha = \frac{d\varphi^\alpha}{d\xi}, \quad \frac{dp_2^\alpha}{d\xi} = d_\alpha \Delta (w^\alpha)^2, \quad \alpha = 1, 2$$

$$-(\varphi^1 + \kappa\varphi^2) \frac{dG}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\mu\rho}{\text{Re} \sigma \Delta^2} \frac{dG}{d\xi} \right) \quad (1.1)$$

$$v = -\frac{1}{\rho} (\varphi^1 + \kappa\varphi^2), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} T, \quad G = \frac{T-T_w}{1-T_w}$$

$$\begin{aligned} \mu &= T^\omega, \quad d_1=1, \quad d_2=\kappa, \quad \text{Re} = \frac{R\rho_\infty V_\infty}{\mu(T_0)} \\ T_0 &= \frac{V_\infty^2}{2c_p}, \quad p_2^\alpha(\zeta) = \frac{1}{2(d_\alpha)^2} \frac{\partial^2 p}{\partial (\xi^\alpha)^2} \Big|_{\xi^1=0, \xi^2=0} \\ \xi^\alpha &= \frac{x^\alpha}{R} \quad (\alpha=1, 2), \quad \zeta = \frac{1}{R\Delta} \int_0^{x^3} \rho dx^3, \quad \Delta = \frac{1}{R_0} \int_0^{x^3} \rho dx^3 \end{aligned}$$

Здесь κ — отношение главных кривизн в критической точке ($0 \leq \kappa \leq 1$), $\rho_\infty \rho$ — плотность, $\rho_\infty V_\infty^2 p$ — давление, $T_0 T$ — температура, $\mu \mu(T_0)$ — вязкость, $V_\infty \xi^1 w^1$, $V_\infty \kappa \xi^2 w^2$, $V_\infty v$ — физические составляющие вектора скорости в направлениях ξ^1 , ξ^2 , ζ соответственно, Re — число Рейнольдса, σ — число Прандтля, γ — отношение удельных теплоемкостей. Индексы ∞ , s и w соответствуют значениям величин в невозмущенном потоке, за ударной волной и на поверхности обтекаемого тела.

На поверхности тела задаются граничные условия, учитывающие скорость скольжения и скачок температуры [6]

$$\begin{aligned} \zeta=0: \quad w^\alpha &= \frac{Q}{\Delta} T^{\omega-1/2} \frac{dw^\alpha}{d\zeta}, \quad \alpha=1, 2 \\ G &= \frac{Q^r}{\Delta} T^{\omega-1/2} \frac{dG}{d\zeta}, \quad \varphi^1 + \kappa \varphi^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$Q = \frac{2-\theta}{\theta} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\gamma-1}} \frac{1}{\text{Re}}, \quad Q^r = \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{2\gamma}{\gamma+1} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\gamma-1}} \frac{1}{\sigma \text{Re}}$$

Здесь θ — коэффициент диффузного отражения, α — коэффициент аккомодации (при расчетах принимается $\theta=1$, $\alpha=1$).

На ударной волне используются обобщенные условия Ренкина — Гюнио

$$\begin{aligned} \zeta=1: \quad w^\alpha &= 1 - \frac{\mu\rho}{\text{Re} \Delta} \frac{dw^\alpha}{d\zeta}, \quad p_2^\alpha = -1, \quad \alpha=1, 2 \\ \varphi^1 + \kappa \varphi^2 &= \frac{1}{\Delta}, \quad G = 1 - \frac{\mu\rho}{\sigma \text{Re} \Delta} \frac{dG}{d\zeta} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Коэффициенты трения и теплопередачи вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_f^\alpha &= \frac{2\tau^\alpha}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2(\mu\rho)_w}{\Delta \text{Re}} \left(\frac{dw^\alpha}{d\zeta} \right)_w, \quad \tau^\alpha = \left(\mu \mu(T_0) \frac{d(V_\infty w^\alpha)}{dx^3} \right) \\ c_H &= \frac{q}{\rho_\infty V_\infty c_p (T_0 - T_w)}, \quad q = \left(\lambda \frac{d(TT_0)}{dx^3} \right)_w, \quad \alpha=1, 2 \end{aligned}$$

2. Уравнения (1.1) будем решать интегральным методом последовательных приближений аналогично [7, 8].

Метод последовательных приближений для двумерных уравнений пограничного слоя был впервые предложен в [9]. Затем в [7, 8] был разработан метод последовательных приближений применительно к решению двумерных задач теории гиперзвукового вязкого ударного слоя. В дальнейшем он в ином виде (по-другому организовывался итерационный процесс) использовался для решения некоторых пространственных задач вязкого ударного слоя в [2, 4], но без учета эффектов скольжения и скачка температуры на теле, а в [4] и без учета продольных составляющих градиента давления, что приводит к существенным ошибкам при определении тепловых потоков и напряжения трения при небольших числах Рейнольдса (см. разд. 5).

Проинтегрировав уравнения импульсов и энергии по ζ сначала от ζ до 1, а затем от 0 до ζ с учетом граничных условий, получим следующую систему интегральных

уравнений (в дальнейшем будем полагать $\omega=0,5$):

$$w^\alpha = \Delta A_*^\alpha + \Delta^2 A^\alpha(\zeta), \quad \alpha=1,2, \quad G = \Delta A_*^T + \Delta^2 A^T(\zeta) \quad (2.1)$$

$$A^\alpha(\zeta) = \text{Re} \int_0^\zeta [(1-w^\alpha)(\varphi^1 + \kappa\varphi^2) + \theta^\alpha - \theta_p^\alpha] l d\zeta \quad (2.2)$$

$$A^T(\zeta) = \sigma \text{Re} \int_0^\zeta [(1-G)(\varphi^1 + \kappa\varphi^2) + \eta] l d\zeta$$

$$\theta^\alpha(\zeta) = \int_0^\zeta (w^1 + \kappa w^2)(1-w^\alpha) d\zeta, \quad l = \frac{1}{\mu\rho}$$

$$\theta_p^\alpha(\zeta) = d_\alpha \int_0^\zeta \left[(w^\alpha)^2 + \frac{2p_2^\alpha}{\rho} \right] d\zeta, \quad p_2^\alpha(\zeta) = -1 - d_\alpha \int_0^\zeta (w^\alpha)^2 d\zeta$$

$$A_*^\alpha = Q \text{Re} l_w [\theta^\alpha(0) - \theta_p^\alpha(0)], \quad \alpha=1,2$$

$$A_*^T = Q^T \text{Re} \sigma l_w \eta(0), \quad \eta(\zeta) = \int_0^\zeta (1-G)(w^1 + \kappa w^2) d\zeta$$

Для решения системы (2.1) строится итерационный процесс, выражающий каждое последующее приближение для искомых функций через предыдущее таким образом, чтобы все приближения удовлетворяли граничным условиям как на теле, так и на ударной волне. Итерационный алгоритм, по которому, задавая каким-либо способом нулевое приближение, можно определить все последующие приближения для искомых функций, аналогичен по виду алгоритму, предложенному в [8], и поэтому здесь не приводится.

В первом приближении указанного метода получено аналитическое решение задачи при задании нулевого приближения в следующем виде, где константы a, b, c, d определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} w^{\alpha(0)} &= a(\zeta+b), \quad G^{(0)} = c(\zeta+d) \quad \alpha=1,2 \\ b &= \frac{Q_* a}{1-2Q_* a}, \quad d = \frac{Q_*^T a}{1-2Q_*^T a}, \quad c = \frac{\sigma a}{1+\sigma a(1+d) - a(1+b)} \quad (2.3) \\ a^4 \sigma (1-a(2Q_* - Q_*^T)) + a^3 (1-a(2Q_* + 1) + a^2 Q_*) - \\ &- \sigma (1-T_w) E (1-a(2Q_* - Q_*^T)) (1-a(2Q_* + 1) + a^2 Q_*)^2 = 0 \\ Q_* &= \frac{Q(1+\kappa)}{2}, \quad Q_*^T = \frac{Q^T(1+\kappa)}{2}, \quad E = \frac{4}{(1+\kappa)^2} \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \text{Re} \right)^2 \end{aligned}$$

Нужный корень уравнения для a лежит в интервале

$$0 \leq a \leq (1+2Q_* - \sqrt{1+4Q_*^2}) / (2Q_*)$$

Для компонент скорости, энтальпии, коэффициентов трения и числа Стантона в первом приближении получены следующие выражения:

$$w^\alpha(n) = \eta_0^\alpha \Delta_{(\alpha)} + \alpha_0 \Delta_{(\alpha)}^2 (T^1(n) - F^\alpha(n)) \quad (2.4)$$

$$G(n) = \beta_0 \Delta_H + \alpha_0 \sigma \Delta_H^2 T^2(n), \quad n = \zeta + d$$

$$c_f^\alpha = 2\eta^\alpha \Delta_{(\alpha)}, \quad \eta^\alpha = r^{-1/3} a ((1+b)^3 - b^3) - R^\alpha(d), \quad \alpha=1,2 \quad (2.5)$$

$$c_H = \beta \Delta_H, \quad \beta = r^{-1/3} c (1 + 3/2(d+b) + 3bd) \quad (2.6)$$

$$\Delta_{(\alpha)} = \frac{-\eta_1^\alpha + \sqrt{(\eta_1^\alpha)^2 + 4\eta_2^\alpha}}{2\eta_2^\alpha}, \quad \Delta_H = \frac{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + 4\beta_2}}{2\beta_2}$$

$$\eta_1^\alpha = \eta_0^\alpha + r(1-a(1+b)), \quad \eta_0^\alpha = \alpha_i \eta^\alpha$$

$$\begin{aligned}
\eta_2^\alpha &= \alpha_0 (T^1(1+d) - F^\alpha(1+d)) \\
\beta_1 &= \beta_0 + r(1-c(1+d)), \quad \beta_2 = \alpha_0 \sigma T^2(1+d) \\
\beta_0 &= \alpha_1 \frac{2\gamma}{\gamma+1} \beta, \quad \alpha_i = \varepsilon \sqrt{\frac{\gamma\pi}{\gamma-1}} (cd + T_w) \\
\alpha_0 &= \operatorname{Re} \varepsilon (c(1-G_w))^{1/2} / a(1+\kappa), \quad r = b + 1/2, \quad \varepsilon = (\gamma-1)/2\gamma \\
T^j(n) &= \sum_{i=0}^3 \tau_i^j \left[\frac{T_w}{2c} \left(\frac{n^{i+1/2} - d^{i+1/2}}{i+1/2} \right) + \frac{n^{i+3/2} - d^{i+3/2}}{i+3/2} \right], \quad j=1, 2 \\
\tau_0^1 &= r - 1/3a [(b+1)^3 - b^3 + 1/2 d^2 (3b-d)], \quad \tau_1^1 = ad(b-d/2) \\
\tau_2^1 &= -aq/2, \quad \tau_3^1 = -a/6, \quad \tau_0^2 = r + 1/6c(1+d)^2(d-3b-2) \\
\tau_1^2 &= dc(b-d/2), \quad \tau_2^2 = -cq/2, \quad \tau_3^2 = -c/6, \quad q = b-d \\
R^\alpha(n) &= \frac{d_\alpha}{1+\kappa} \frac{a}{3} ((1+b)^3 - (n+q)^3) + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^3 \frac{q_i h_j^\alpha}{i+j} ((1+d)^{i+j} - n^{i+j}) \\
h_3^\alpha &= \frac{2}{3} \frac{d_\alpha}{(1+\kappa)^2}, \quad h_2^\alpha = 3q h_3^\alpha, \quad h_1^\alpha = 3q^2 h_3^\alpha \\
h_0^\alpha &= -2/a - h_3^\alpha ((1+b)^3 - q^3) \\
F^\alpha(n) &= \sum_{i=0}^3 t_i^\alpha \left[\frac{T_w}{2c} \left(\frac{(1+d)^{i+1/2} - n^{i+1/2}}{i+1/2} \right) + \frac{(1+d)^{i+3/2} - n^{i+3/2}}{i+3/2} \right] + \\
&+ \varepsilon \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^3 \frac{q_i h_j^\alpha}{i+j} \left[(1+d)^{i+j} \left(\frac{T_w}{c} (n^{1/2} - d^{1/2}) + 2/3 (n^{3/2} - d^{3/2}) \right) - \right. \\
&\left. - \frac{T_w}{2c} \left(\frac{n^{i+j+1/2} - d^{i+j+1/2}}{i+j+1/2} \right) - \frac{n^{i+j+3/2} - d^{i+j+3/2}}{i+j+3/2} \right], \quad \alpha=1, 2 \\
t_3^\alpha &= -\frac{ad_\alpha}{3(1+\kappa)}, \quad t_2^\alpha = 3qt_3^\alpha, \quad t_1^\alpha = 3q^2 t_3^\alpha, \quad t_0^\alpha = R^\alpha(0) \\
q_1 &= T_w, \quad q_2 = c(1-T_w)
\end{aligned}$$

Анализ (2.6) показывает, что значение коэффициента теплопередачи c_H зависит от чисел Re и κ только в их комбинации $\operatorname{Re}/(1+\kappa)$. Таким образом, число Стантона в критической точке с произвольным отношением главных кривизн κ ($0 \leq \kappa \leq 1$) можно определить по формуле

$$c_H(\kappa, \operatorname{Re}) = c_{\text{НОС}}(\operatorname{Re}_0), \quad \operatorname{Re}_0 = \frac{2 \operatorname{Re}}{1+\kappa} \quad (2.7)$$

где $c_{\text{НОС}}$ — число Стантона в осесимметричной критической точке, определяемое при числе Рейнольдса Re_0 .

3. Для осесимметричного течения в окрестности критической точки в [1] было получено приближенное аналитическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя без учета эффектов скольжения и скачка температуры на поверхности. При этом предполагалось, что $\mu r = \text{const}$ и продольной составляющей градиента давления можно пренебречь. Обобщим это решение на случай учета скольжения и скачка температуры, а затем с помощью соотношения (2.7) получим формулу для определения теплового потока в трехмерную критическую точку.

Уравнения тонкого вязкого ударного слоя в осесимметричной критической точке при сделанных предположениях имеют вид

$$-2\varphi\varphi'' + \varphi'^2 = \frac{\lambda}{\Delta^2} \varphi''', \quad -2\varphi G' = \frac{\lambda}{\sigma \Delta^2} G''$$

$$\lambda = \frac{\mu\rho(h^*)}{\text{Re}}, \quad h^* = \frac{1}{2}(1-T_w) + T_w \quad (3.1)$$

$$\xi=0: \varphi' = \frac{Q}{\Delta} \varphi'', \quad G = \frac{Q^T}{\Delta} G', \quad \varphi=0$$

$$\xi=1: \varphi' = 1 - \frac{\lambda}{\Delta} \varphi'', \quad G = 1 - \frac{\lambda}{\Delta\sigma} G', \quad \varphi = \frac{1}{2\Delta}$$

С точностью $O(\varepsilon)$, что согласуется с исходной постановкой задачи, решение первого из уравнений (3.1) имеет вид

$$\varphi = a\xi^2 + b\xi \quad (3.2)$$

$$a = \frac{-(1+2Q) + \sqrt{1+4\lambda+4Q^2}}{4(\lambda-Q)}, \quad b = \frac{4Qa^2}{1-4Qa}, \quad \Delta = \frac{1}{2(a+b)} \quad (3.3)$$

Зная φ , уравнение для G можно проинтегрировать. С точностью $O(\varepsilon)$ его решение имеет вид

$$G = G_w + \left(\frac{dG}{d\xi} \right)_s e^{a\xi^{1/2} + b\xi} \frac{\gamma(1/3, \Omega a^{1/2}(a\xi^3 + 3/2 b\xi^2))}{3a^{1/2}\Omega^{1/3}}, \quad \Omega = \frac{2\sigma\Delta^2}{3\lambda a^{1/2}}$$

Здесь $\gamma(1/3, x)$ — неполная гамма-функция порядка $1/3$. Учитывая граничные условия, запишем выражение для коэффициента теплопередачи

$$c_H = \frac{\lambda}{\sigma\Delta} k_1 \left(\frac{\lambda}{\sigma\Delta} + k_1 \left(\frac{Q^T}{\Delta} + k_2 \right) \right)^{-1}$$

$$k_1 = \exp\left(\Omega a^{1/2} \left(a + \frac{3}{2}b\right)\right), \quad k_2 = \frac{\gamma(1/3, \Omega a^{1/2}(a + 3/2b))}{3a^{1/2}\Omega^{1/3}} \quad (3.4)$$

Используя найденную ранее связь между тепловыми потоками в пространственном и осесимметричном случаях (2.7), получим следующее выражение для коэффициента теплообмена в критической точке с произвольным отношением главных кривизн κ :

$$c_H(\kappa) = \frac{\lambda_*}{\sigma\Delta} \left(\frac{\lambda_*}{\sigma\Delta} \frac{1}{k_1} + \frac{Q_*^T}{\Delta} + k_2 \right)^{-1} \quad (3.5)$$

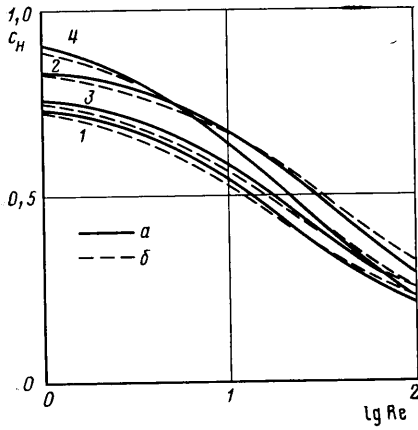
Здесь a, b, Δ вычисляются по формулам (3.3), в которые вместо Q, Q^T, λ надо подставить Q_*, Q_*^T и $\lambda_* = 1/2(1+\kappa)\lambda$. Очевидно, что в силу принятых выше допущений абсолютные величины тепловых потоков, найденные по (3.5), могут значительно отличаться от их значений, найденных из численных расчетов (см. разд. 5). Однако, как будет показано ниже, относительные величины (отнесены к соответствующим значениям в осесимметричной критической точке) при этом определяются с погрешностью, не превышающей нескольких процентов. Выражение для относительного теплового потока имеет вид

$$\frac{q_\kappa}{q_1} = \frac{e^{-z_1} + \eta + \sigma^{1/3} (\Delta_1/18a_1\lambda_1^2)^{1/3} \gamma(1/3, z_1)}{e^{-z_\kappa} + \eta + \sigma^{1/3} (\Delta_\kappa/18a_\kappa\lambda_\kappa^2)^{1/3} \gamma(1/3, z_\kappa)} \quad (3.6)$$

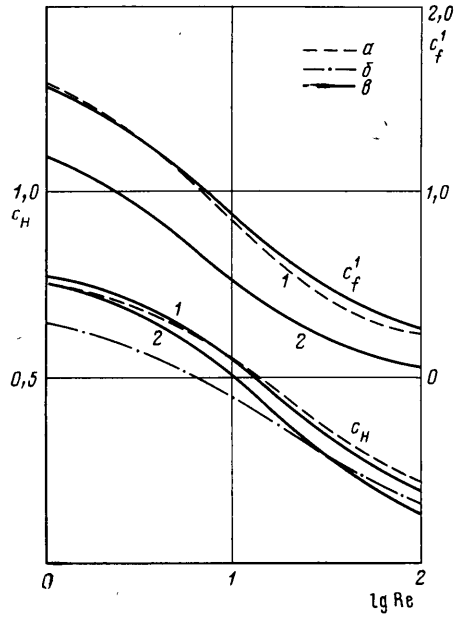
$$\eta = \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left[\frac{\pi\varepsilon}{2} (0,5(1-T_w) + T_w) \right]^{1/2}, \quad z_\kappa = \Omega a^{1/2} \left(a + \frac{3}{2}b\right)$$

Здесь нижний индекс показывает, для течения с каким κ определяется тепловой поток.

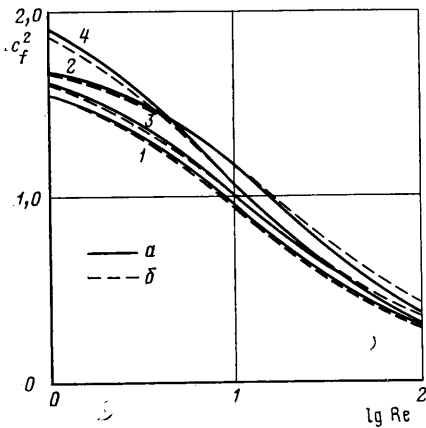
4. Для анализа точности полученных формул при различных значениях определяющих параметров поставленная задача (1.1)–(1.3) была решена численно. При этом использовалась разностная схема четвертого порядка точности аппроксимации по ξ . Каждое уравнение представлялось в виде соответствующей совокупности дифференциальных уравнений пер-



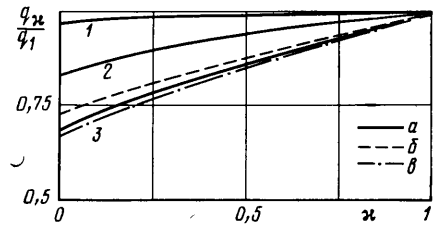
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

вого порядка. Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений решалась итерационным методом с линеаризацией по Ньютону. На каждой итерации линейные дифференциальные уравнения относительно поправок к значениям искомых функций с предыдущей итерации аппроксимировались линейными алгебраическими уравнениями, содержащими искомые функции и их производные в узлах сетки, с точностью $O(\Delta \xi^4)$. Полученная система двухточечных разностных уравнений решалась методом матричной прогонки. Для обращения матриц применялся метод Жордана с выбором главного элемента в столбце. При необходимости для обеспечения сходимости итерационного процесса использовалось демпфирование по схеме

$$f^{n+1} = f^n + \tau \Delta f^{n+1}$$

где Δf^{n+1} — поправка к соответствующей функции, найденная на $(n+1)$ -й итерации, $0 < \tau \leq 1$. Численное решение определялось на сетке с шагом $\Delta \xi = 0,1$; при этом для сходимости с точностью не ниже 10^{-6} требовалось

при задании линейного по скорости и энтальпии начального приближения от 6 до 10 итераций в зависимости от числа Рейнольдса.

5. Сравнение аналитического решения в первом приближении метода последовательных приближений с численным, проведенное в широком

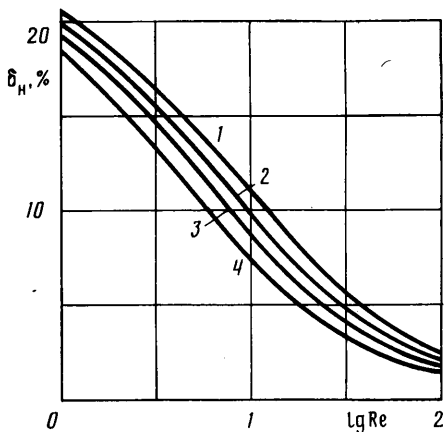
диапазоне изменения определяющих параметров задачи ($0 \leq \kappa \leq 1$, $1 \leq Re \leq 10^3$, $0 \leq T_w \leq 0,3$; $1,15 \leq \gamma \leq 1,4$), показало хорошую точность аналитических формул (2.5) и (2.6) для коэффициентов трения и теплообмена во всем рассматриваемом диапазоне изменения параметров. Это видно, например, из фиг. 1–3, где приведены характерные зависимости числа Стантона и коэффициентов трения от числа Re при различных значениях κ и γ ($T_w=0,1$, $\sigma=0,71$). На фиг. 1 и 2 линии 1 соответствуют случаю $\kappa=0,5$; $\gamma=1,4$; линии 2 – $\kappa=0,5$; $\gamma=1,15$; линии 3 – $\kappa=0,8$; $\gamma=1,4$. На фиг. 3 линии 1 соответствуют $\kappa=0,1$; $\gamma=1,25$. Численное решение на фиг. 1 и 2 – линии *a*, на фиг. 3 – *в*; расчет по формулам (2.5), (2.6) на фиг. 1 и 2 – линии *б*, на фиг. 3 – *а*.

Проведена также оценка точности формулы для коэффициента теплопередачи (3.4) (обобщение решения Ченга). В силу того что при выводе этой формулы был принят ряд допущений, рассчитанные по ней абсолютные значения c_H существенно отличаются от значений, полученных из численного решения, что можно видеть на фиг. 3 (линии *б* – расчет по (3.4)). Отличие же относительных величин (отнесенных к соответствующим значениям в осесимметричной критической точке), выраженных формулой (3.5), от численных значительно меньше, что видно из фиг. 4, где приведены зависимости относительных значений тепловых потоков от параметра κ при $Re=1, 10, 100$ – линии 1–3 соответственно ($\gamma=1,25$; $T_w=0,1$). Линии *a* – численное решение, *б* – расчет по формуле (2.6); *в* – расчет по формуле (3.5); при $Re=1$ и 10 линии *a*, *б*, *в* практически совпадают.

Следует отметить, что, как и для осесимметричных течений, при исследовании пространственного обтекания тел при небольших числах Рейнольдса необходимо учитывать скорость скольжения и скачок температуры на поверхности, так как неучет этих эффектов приводит к завышению напряжения трения и теплового потока (до 20%), что проиллюстрировано на фиг. 1 и 2 (линии 4 получены при тех же параметрах, что и линии 3, но без учета скольжения).

На фиг. 5 показано, как зависит влияние эффектов скольжения на тепловой поток от отношения главных кривизн κ . В качестве параметра, характеризующего степень этого влияния, выбрана величина $\delta_H = |(c_H - c_H^*) / c_H|$ (индекс звездочка соответствует значению числа Стантона, полученному при тех же условиях, но без учета скольжения и скачка температуры). Здесь $\kappa=1; 0,6; 0,3; 0$ – линии 1–4 соответственно; $\gamma=1,4$; $T_w=0,0535$; $\sigma=0,7$. Видно, что влияние указанных эффектов при постоянном числе Re возрастает с увеличением κ и является максимальным для осесимметричного течения.

Анализ полученных результатов показал также, что в уравнении импульсов нельзя опускать члены, содержащие продольные составляющие градиента давления, так как неучет этих членов приводит к большой ошибке при определении напряжения трения при малых и умеренных числах Re , что продемонстрировано на фиг. 3 (линии 2 – расчет без учета этих членов). Ошибка в определении теплового потока становится существ-



Фиг. 5

κ	Re=1	5	10	40	70	100
0	0,2	<0,1	0,4	0,2	0,7	1,3
0,3	0,1	0,1	<0,1	<0,1	0,3	0,7

венной при $Re \geq 10$, в то время как для напряжения трения результаты оказываются значительно заниженными во всем рассматриваемом диапазоне чисел Re (при $Re=1$ ошибка $\sim 25\%$, при $Re=100$ результаты занижены в 4 раза).

Сравнение с результатами численного решения во всем рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса — от 1 до 1000 показало высокую точность соотношения (2.7), выражающего тепловой поток в пространственную критическую точку через тепловой поток в критическую точку осесимметричного тела, что хорошо видно из таблицы, где приведена погрешность (в %) в определении c_H по формуле (2.7) при $1 \leq Re \leq 100$, $\gamma=1,4$, $\sigma=0,7$, $T_w=0,0535$. При $0,6 \leq \kappa < 1$ погрешность не превосходит $0,1\%$ для всех рассмотренных чисел Рейнольдса. Результаты расчета коэффициента теплопередачи по формуле (2.7) практически совпадают с результатами численного решения уравнений (1.1).

Следует отметить, что найденная зависимость (2.7) согласуется с аналогичным соотношением для тепловых потоков, полученным в теории пограничного слоя [10]: $c_H/c_{Hос} = ((1+\kappa)/2)^{1/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cheng H. K. Hypersonic Shock-Layer Theory of the Stagnation Region at Low-Reynolds Number // Proc. 1961. Heat Transfer Fluid Mechanics Institute. Stanford: Stanford Univ. Press, 1961. P. 161–175.
2. Гершбейн Э. А., Юницкий С. А. Исследование гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки при наличии вдува или отсоса // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 817–828.
3. Марков А. А. Исследование стационарного течения вязкого газа в тонком трехмерном ударном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 115–126.
4. Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А. Численные и приближенные аналитические решения уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя при умеренно малых числах Рейнольдса // Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 72–92.
5. Провоторов В. П. Численное исследование трехмерного гиперзвукового вязкого ударного слоя // Тр. ЦАГИ. 1981. № 2111. С. 157–169.
6. Шидловский В. П. Введение в динамику разреженного газа. М.: Наука, 1965. 218 с.
7. Брыкина И. Г. Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 154–166.
8. Брыкина И. Г. Применение метода последовательных приближений к решению уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя с учетом скольжения на поверхности // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 99–110.
9. Тирский Г. А. Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями, включая реакции ионизации // Отчет Ин-та механики МГУ, 1970. № 1016. 52 с.
10. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пространственный пограничный слой на проницаемой поверхности в окрестности плоскости симметрии // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 37–48.

Москва

Поступила в редакцию
17. III. 1987