

УДК 532.69.013.4

ВЛИЯНИЕ РАСТВОРИМЫХ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ НА МЕЖФАЗНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОЙ КАПЛИ

ГОЛОВИН А. А., РАБИНОВИЧ Л. М.

Исследование влияния веществ, изменяющих поверхностное натяжение, на гидродинамическую устойчивость жидкой капли представляет большой интерес в связи с проблемой интенсификации массообмена на границе раздела жидкость — жидкость, жидкость — газ.

Известно, что массоперенос веществ, обладающих поверхностно-активными свойствами, при определенных условиях приводит к потере гидродинамической устойчивости межфазной границы под действием сил, связанных с градиентом поверхностного натяжения (эффект Марангони [1, 2]). Изучению концентрационно-капиллярной неустойчивости поверхностей различной геометрии, вызванной поверхностно-активными веществами (ПАВ), посвящено большое количество работ. Показательные примеры такого исследования содержатся в работах [3, 4], в которых рассматривалась в рамках линейного анализа устойчивость жидких пленок и струй при наличии реагирующих ПАВ.

Задача об устойчивости сферической границы раздела фаз (поверхности капли или пузыря) в наиболее общей постановке была сформулирована в работе [5]. В ней был проведен линейный анализ устойчивости с учетом деформации поверхности, получено дисперсионное уравнение и проведено исследование условий нейтральной устойчивости в ряде важных частных случаев. В [5] предполагалось существование локального термодинамического равновесия между границей раздела и примыкающими к ней слоями жидкости, что соответствует случаю бесконечно быстрой адсорбции. Учет конечной скорости адсорбции в исследовании устойчивости плоской межфазной поверхности, разделяющей две бесконечные по глубине фазы, был проведен в [6].

Проведенный в настоящей работе линейный анализ устойчивости жидкой капли при конвективной диффузии ПАВ в объеме и конечной скорости адсорбции, сопровождающей его перенос через межфазную границу, позволил уточнить и обобщить результаты известного анализа Соренсена и Хенненберга [5], в первую очередь при описании зависимости характера устойчивости от отношения коэффициентов диффузии в контактирующих фазах. Показано, что в рассматриваемой ситуации существуют два критических значения отношения коэффициентов диффузии, зависящие от профилей концентрации ПАВ в стационарном состоянии и кинетических констант адсорбции, которые выделяют интервал значений, вне которого межфазная неустойчивость возникает при переносе ПАВ только в одном направлении, а внутри может возникать при любом направлении массопереноса.

1. Рассмотрим покоящуюся каплю жидкости, погруженную в другую, бесконечную, несмешивающуюся жидкость. Из капли во внешнюю жидкость (или наоборот) за счет молекулярной диффузии происходит стационарный массоперенос ПАВ, сопровождающийся процессом адсорбции-десорбции его на межфазной поверхности. Будем считать, что стационарность массопереноса обеспечивается наличием источников концентрации (химическая реакция), распределенных в объемах фаз, которые также определяют и вид стационарного профиля концентрации. Пусть ПАВ образуется (исчезает) внутри капли за счет реакции нулевого порядка и диффундирует во внешнюю жидкость (из внешней жидкости). Тогда стационарные распределения концентрации в фазах, удовлетворяющие уравнению $\Delta C_1 = 0$ вне капли и $\Delta C_2 = Q = \text{const}$ внутри капли, будут $C_1 \sim r^{-1}$, $C_2 \sim r^2$, C_i — концентрация ПАВ, индекс $i=1$ относится к внешней жид-

кости, $i=2$ — к жидкости капли, Q — плотность источников (скорость реакции нулевого порядка). Если источники есть и вне капли, то $C_{1,2} \sim r^2$; такой случай рассмотрен в [5] (без учета конечной скорости адсорбции ПАВ на межфазной границе). В настоящей работе будут рассматриваться сферически-симметричные стационарные профили концентрации вида

$$C_1 = C_{10}(1 - a_1 r^{-n_1}), \quad C_2 = C_{20}(1 - a_2 r^{-n_2})$$

где C_{i0} , a_i , n_i — константы.

При $n_1=1$, $n_2=2$ или $n_1=-2$, $n_2=2$ эти распределения совпадают с упомянутыми выше, а при других значениях констант n_i могут рассматриваться как приближения реальных стационарных или квазистационарных профилей, соответствующих распределенным источникам или стокам другого вида. Введение таких стационарных концентрационных распределений делается с целью выяснить влияние формы начального стационарного распределения концентрации на устойчивость системы.

Исследуем устойчивость такой системы по отношению к бесконечно малым возмущениям концентрации и скорости жидкости. Поверхность капли будем считать сферической и недеформируемой (межфазное натяжение σ велико), σ является линейной функцией поверхностной концентрации ПАВ. Выберем сферическую систему координат (r', θ, φ) с центром в центре капли. В качестве масштаба длины выберем радиус капли a , в качестве масштаба времени — характерное время адсорбции ПАВ τ .

Возмущения скорости описываются безразмерными линеаризованными уравнениями Навье — Стокса и неразрывности течения, а также граничными условиями на поверхности

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p_i}{\partial r} + R_i^{-1} \left(\Delta u_i - \frac{2}{r^2} u_i - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (v_i \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_i) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_i) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.1)$$

$$u_1 = u_2 = 0, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2, \quad r = 1$$

$$t = \frac{t'}{\tau}, \quad r = \frac{r'}{a}, \quad (u_i, v_i, w_i) = \left(u_i' \frac{\tau}{a}, v_i \frac{\tau}{a}, w_i \frac{\tau}{a} \right)$$

$$p_i = \frac{p_i' \tau^2}{\rho_i' a^2}, \quad R_i = \frac{a^2}{\nu_i \tau}$$

Здесь t' — время, u_i' , v_i' , w_i' — компоненты скорости по r' , θ , φ ; ρ_i' , p_i' — плотность и давление, ν_i — кинематическая вязкость.

Линеаризованные безразмерные уравнения конвективной диффузии ПАВ в объемах фаз и на поверхности с учетом адсорбционного потока на поверхность, а также условия баланса адсорбционного и диффузионного потоков на границу раздела фаз имеют следующий вид:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial z_{i0}}{\partial r} = \chi_i^{-1} \Delta z_i \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma_0 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_1) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) = \chi_s^{-1} L^2 \gamma + \\ + b_x \gamma + b_{1z} z_1 + b_{2z} z_2, \quad r = 1 \\ (-1)^i \frac{\partial z_i}{\partial r} = b_i \gamma + b_{iz} z_i, \quad r = 1 \quad (1.2)$$

$$z_i = \frac{C_{i0} - C_i}{C_{i0}}, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_*}, \quad \chi_i = \frac{a^2}{D_i \tau}, \quad \chi_s = \frac{a^2}{D_s \tau}$$

$$d_i = \frac{D_i \tau C_{i0}}{a \Gamma_*}, \quad b_z = b_1 + b_2, \quad b_i = \frac{\tau}{\Gamma_*} \left[\frac{\partial J_i(C_i, \Gamma)}{\partial \gamma} \right]_0$$

$$b_{iz} = \tau \Gamma_*^{-1} \left[\frac{\partial J_i(C_i, \Gamma)}{\partial z_i} \right]_0$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad L^2 = \Delta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Здесь C_i (C_{i0}) — концентрация вещества в i -й фазе (концентрация на бесконечности и в центре капли в стационарном состоянии), Γ — поверхностная концентрация, D_i и D_s — коэффициенты диффузии и поверхностной диффузии, Γ_* — концентрация ПАВ, соответствующая насыщению межфазной поверхности, J_i — функция, описывающая кинетику адсорбционно-десорбционного процесса; нижний индекс 0 соответствует значениям величин в стационарном состоянии.

Решения системы (1.1)–(1.2) должны удовлетворять уравнению баланса тангенциальных компонент напряжений на поверхности капли с учетом поверхностных вязкостей [8], инерции адсорбированного вещества и эффекта Марангони, вызывающего дополнительное касательное напряжение, связанное с градиентом поверхностного натяжения

$$\begin{aligned} \gamma_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = & m_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - v_1 \right) - m_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial r} - v_2 \right) + M \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \\ & + \kappa_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_1 \sin \theta) + \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right] \right\} + \\ & + \kappa_2 \left\{ 2v_1 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (w_1 \sin \theta) \right) \right] \right\}, \quad r=1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = & m_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - w_1 \right) - m_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - w_2 \right) + \\ & + M \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \kappa_1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v_1 \sin \theta) + \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) \right\} + \\ & + \kappa_2 \left\{ 2w_1 - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (w_1 \sin \theta) \right) \right] \right\}, \quad r=1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$m_i = \frac{\eta_i \tau}{a \Gamma_*}, \quad \kappa_1 = \frac{(k + \varepsilon) \tau}{a^2 \Gamma_*}, \quad \kappa_2 = \frac{\varepsilon \tau}{a^2 \Gamma_*}$$

$$M = \frac{d\sigma}{d\Gamma} \frac{\tau^2}{a^2}, \quad \frac{d\sigma}{d\Gamma} = \text{const}$$

Здесь η_i — динамические вязкости жидкостей, k и ε — поверхностные дилатационная и сдвиговая вязкости. Нормальные напряжения на поверхности капли не рассматриваются, так как поверхностное натяжение σ считается большим, и баланс нормальных компонент напряжений сводится к несущему давлению на поверхности капли.

2. Решение задачи (1.1)–(1.4) ищем в виде рядов по сферическим функциям

$$p_i = \sum_{l=1}^{\infty} P_{il}(r) Y_l(\theta, \varphi) e^{\omega_l t}, \quad u_i = \sum_{l=1}^{\infty} r^{-1} U_{il}(r) Y_l(\theta, \varphi) e^{\omega_l t}$$

$$z_i = \sum_{l=1}^{\infty} Z_{il}(r) Y_l(\theta, \varphi) e^{\omega_l t}, \quad \gamma = \sum_{l=1}^{\infty} \Gamma_l Y_l(\theta, \varphi) e^{\omega_l t}$$
(2.1)

Здесь $Y_l(\theta, \varphi)$ – сферические функции; мода $l=0$ не рассматривается, так как жидкости несжимаемые.

Для $P_{il}(z)$, $U_{il}(r)$, $Z_{il}(r)$ получаем уравнения, решения которых, ограниченные в центре капли и затухающие на бесконечности, имеют вид

$$P_{1l} = \Pi_{1l} r^{-l-1}, \quad P_{2l} = \Pi_{2l} r^l, \quad U_{1l} = A_{1l} r^{-l-1} + B_{1l} K_{l+\frac{1}{2}}^*(q_1 r)$$

$$U_{2l} = A_{2l} r^l + B_{2l} I_{l+\frac{1}{2}}^*(q_2 r), \quad Z_{1l} = C_{1l} K_{l+\frac{1}{2}}^*(s_1 r) + B_{1l} \beta_{1l}(s_1) I_{l+\frac{1}{2}}^*(s_1 r) + \xi_{1l}(r),$$

$$Z_{2l} = C_{2l} I_{l+\frac{1}{2}}^*(s_2 r) + B_{2l} \beta_{2l}(s_2) K_{l+\frac{1}{2}}^*(s_2 r) + \xi_{2l}(r)$$
(2.2)

$$\beta_{1l}(s_1) = \chi_{1l} a_1 n_1 s_1^{n_1} \int_{s_1}^{\infty} t^{-n_1} K_{l+\frac{1}{2}}^*(t) [K_{l+\frac{1}{2}}^*(\lambda_1 t) - s_1^{-l+1} t^{-l-1} K_{l+\frac{1}{2}}^*(\lambda_1 s_1)] dt$$

$$\beta_{2l}(s_2) = -\chi_{2l} a_2 n_2 s_2^{-n_2} \int_0^{s_2} t^{n_2} I_{l+\frac{1}{2}}^*(t) [I_{l+\frac{1}{2}}^*(\lambda_2 t) - s_2^{-l} t^l I_{l+\frac{1}{2}}^*(\lambda_2 s_2)] dt$$

$$\xi_{il}(r) = I_{l+\frac{1}{2}}^*(s_i r) \int_1^r K_{l+\frac{1}{2}}^*(s_i r) h_i(r) W^{-1} dr - K_{l+\frac{1}{2}}^*(s_i r) \int_1^r I_{l+\frac{1}{2}}^*(s_i r) h_i(r) W^{-1} dr$$

$$h_i(z) \chi_i U_{il}(r) r^{-1} dz_{i0}/dr, \quad W = \pi (2s_i r^2)^{-1}, \quad z_{i0} = a_i r^{(-1) i n_i}$$

$$h_i(z) = \chi_i U_{il}(r) r^{-1} dz_{i0}/dr, \quad W = \pi (2s_i r^2)^{-1}, \quad z_{i0} = a_i r^{(-1) i n_i}$$

$$I_{l+\frac{1}{2}}^*(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} I_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad K_{l+\frac{1}{2}}^*(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} K_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

Здесь $I_{l+\frac{1}{2}}^*(x)$ и $K_{l+\frac{1}{2}}^*(x)$ – модифицированные сферические функции Бесселя первого и третьего рода [9], Π_{il} , A_{il} , B_{il} , C_{il} , Γ_i ; $i=1, 2$ – произвольные постоянные.

Подставляя (2.1)–(2.2) в граничные условия задачи (1.1)–(1.4), получаем алгебраическую линейную однородную систему уравнений седьмого порядка относительно постоянных A_{il} , B_{il} , C_{il} , Γ_i ; $i=1, 2$. Приравняв нулю определитель системы, получим характеристическое уравнение для собственных частот ω_l .

Для исследования условий возникновения неустойчивости рассмотрим состояния с нейтральной устойчивостью без осцилляций: $\text{Re } \omega_l = \text{Im } \omega_l = 0$. Положив в характеристическом уравнении $\text{Im } \omega_l = 0$ и переходя к пределу $\text{Re } \omega_l \rightarrow 0$, используя свойства функций $I_{l+\frac{1}{2}}^*(x)$, $K_{l+\frac{1}{2}}^*(x)$ [9], после ряда преобразований получим следующее условие нейтральной устойчивости (в размерном виде):

$$\frac{d\sigma}{d\Gamma} \frac{dC_{20}}{dr'} a = H \frac{k_1^\Gamma D_{1l} + k_2^\Gamma D_{2l} + D_{s1}}{l(l+1)(2l+1) [k_{2l} \Phi_{l2} - (D_2/D_1) k_{1l} \Phi_{l1}] - \Gamma_{0l}}$$

$$H = (\eta_1 + \eta_2)(2l+1) + (k+\varepsilon)l(l+1)/a - 2\varepsilon/a$$
(2.3)

$$D_{il} = \frac{D_i(l + \delta_{il})}{ak_i^c + D_i(l + \delta_{il})}, \quad k_{il} = \frac{ak_i^c}{ak_i^c + D_i(l + \delta_{il})}$$

$$\Gamma_{0l} = \frac{\Gamma_0 l(l+1)}{aa_2 n_2 C_{20}}, \quad k_i^c = \left[\frac{\partial J_i(C_i, \Gamma)}{\partial C_i} \right]_0, \quad k_i^\Gamma = \left[\frac{\partial J_i(C_i, \Gamma)}{\partial \Gamma} \right]_0$$

$$\varphi_{1l} = [(2l+1)(2l+n_1+1)(2l+n_1-1)]^{-1}, \quad \varphi_{12} = [(2l+1)(2l+n_2+1)(2l+n_2+3)]^{-1}$$

Формула (2.3) представляет собой обобщение формулы (51) из [5] на случай конечной скорости адсорбции и при $k_i^\Gamma \rightarrow \infty$, $ak_i^c \rightarrow \infty$, $k_i^c/k_i^\Gamma \rightarrow K_p = \text{const}$ переходит в формулу (51) из [5] без члена, учитывающего деформацию поверхности.

3. В большинстве интересных для приложений случаев можно пренебречь поверхностной диффузией ПАВ и его инерцией. Опустив соответствующие члены (член D_{sl} в числителе и член Γ_{0l} в знаменателе), рассмотрим две предельные ситуации: когда перенос ПАВ лимитируется диффузией ($D_i \ll ak_i^c$) и когда лимитирующей стадией процесса переноса является адсорбция ($D_i \gg ak_i^c$). В обоих случаях уравнение (2.3) удобно переписать в виде уравнения для безразмерного числа Марангони Ма, характеризующего отношение сил, связанных с градиентом поверхностного натяжения, к силам вязкости

$$Ma = H_* \frac{K(l+1) + D_* El}{l(l+1)(2l+1)(\varphi_{12} - D_* \varphi_{1l})K}, \quad D_i \ll ak_i^c \quad (3.1)$$

$$Ma = H_* \frac{D_*(1+E)}{l(l+1)(2l+1)(l^{-1}\varphi_{12}K - D_*^2(l+1)^{-1}\varphi_{1l})}, \quad D_i \gg ak_i^c \quad (3.2)$$

$$H_* = (1 + \eta_*) (2l+1) + \varepsilon_1 l(l+1) - 2\varepsilon_2, \quad \eta_* = \eta_2/\eta_1, \quad D_* = D_2/D_1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{k + \varepsilon}{a\eta_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{a\eta_1}, \quad K = \frac{k_2^c}{k_1^c}, \quad E = \frac{k_2^\Gamma}{k_1^\Gamma}$$

$$Ma = \frac{d\sigma}{d\Gamma} \frac{dC_{20}}{dr'} \frac{a^2}{\eta_1 D_1} \frac{k_1^c}{k_1^\Gamma}$$

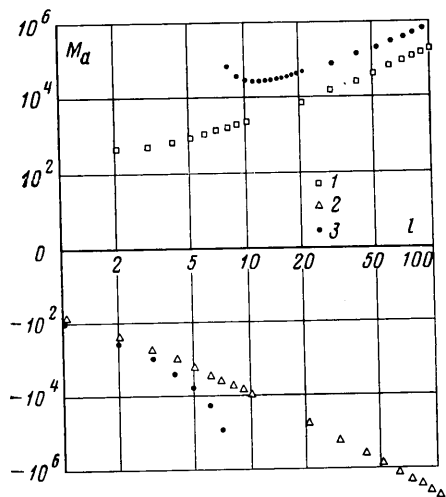
Пусть перенос ПАВ направлен из капли в окружающую жидкость. Тогда $dC_{20}/dr' < 0$, $d\sigma/d\Gamma < 0$ и $Ma > 0$. В этом случае неустойчивость без осцилляций может возникнуть, если

$$D_* < F(l) = \begin{cases} \varphi_{12}/\varphi_{1l}, & D_i \ll ak_i^c \\ [K\varphi_{12}(l+1)/(\varphi_{1l})]^{1/2}, & D_i \gg ak_i^c \end{cases} \quad (3.3)$$

В случае, если перенос направлен в каплю, необходимо изменить знак неравенства в (3.3).

Последовательность $F(l)$ имеет предел и, следовательно, ограничена. Обозначим минимальное и максимальное значения $F(l)$ F_{\min} и F_{\max} . Тогда из (3.1) и (3.2) следует, что если $D_* < F_{\min}$ или $D_* > F_{\max}$, то возникновение межфазной неустойчивости возможно лишь при переносе ПАВ в одном направлении. Если же $F_{\min} < D_* < F_{\max}$, то неустой-

чивость может возникнуть при переносе ПАВ в обоих направлениях. Таким образом, если для плоской поверхности раздела двух бесконечных по глубине фаз имеется одно критическое значение отношения коэффи-



циентов диффузии $D_* = 1$ [6], то в случае капли существуют два критических значения, делящие всю область значений D_* на три подобласти, каждая из которых характеризуется различным направлением переноса ПАВ, соответствующим неустойчивому режиму. На фигуре в логарифмическом масштабе изображены зависимости числа Марангони, соответствующего нейтральной устойчивости, от номера гармоники возмущения l при $\beta = 0,5$, $\epsilon_1 = 0,01$, $\epsilon_2 = 0,02$, $E = 1,5$, $K = 5,0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, для различных значений D_* в случае медленной адсорбции. При указанных значениях параметров $F_{\min} = 1,51$, $F_{\max} = 2,24$; множество точек 1 соответствует значению $D_* = 1,5 < F_{\min}$, 2 — значению $D_* = 2,25 > F_{\max}$, 3 — значению $D_* = 2,0$.

Отметим, что величины F_{\min} и F_{\max} существенно зависят от показателей n_1 и n_2 , т. е. от вида стационарного распределения концентрации. В случае медленной адсорбции критические значения F_{\min} и F_{\max} определяются не только начальными распределениями концентрации, но и величиной параметра K , причем $F_{\min} \sim \sqrt{K}$ и $F_{\max} \sim \sqrt{K}$. При $K > 1$ всегда $F_{\max} > 1$, так что если адсорбция медленная, то всегда возможна неустойчивость при переносе ПАВ из капли, когда коэффициент диффузии в капле больше коэффициента диффузии во внешней жидкости.

В заключение отметим, что из (2.3) следует, что при исследовании устойчивости высших мод нельзя не учитывать конечность скорости адсорбции. При достаточно больших l , при которых, однако, еще не сказывается инерция адсорбированного вещества, условием возникновения неустойчивости будет $D_* = \sqrt{K}$, что соответствует результату, полученному в [7] для случая плоской поверхности раздела фаз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Scriven L. E., Sternling C. V.* The Marangoni effects // *Nature*. 1960. V. 187. № 4733. P. 186—188.
2. Гидродинамика межфазных поверхностей. Сб. статей/Под ред. Буевича Ю. А., Рабиновича Л. М. М.: Мир, 1984. 210 с.
3. *Рабинович Л. М.* О влиянии растворимых поверхностно-активных веществ на устойчивость жидких пленок и струй // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1978. № 6. С. 26—33.
4. *Дильман В. В., Найденов В. И.* О межфазной неустойчивости и влиянии градиента поверхностного натяжения на скорость хемосорбции при гравитационном течении жидкой пленки // *Теорет. основы хим. технологии*. 1986. Т. 20. № 3. С. 316—326.
5. *Соренсен Т. С., Хенненберг М.* Неустойчивость сферической капли при наличии поверхностных химических реакций и переноса поверхностно-активных веществ // *Гидродинамика межфазных поверхностей*. М.: Мир, 1984. С. 117—156.
6. *Hennenberg M., Sanfeld A., Bisch P. M.* Adsorption-desorption barrier, diffusional exchanges and surface instabilities of longitudinal waves for aperiodic regimes // *AIChE Journal*. 1981. V. 27. № 6. P. 1002—1008.
7. *Sternling C. V., Scriven L. E.* Interfacial turbulence: hydrodynamic stability and the Marangoni effect // *AIChE Journal*. 1959. V. 5. № 4. P. 514—523.
8. *Scriven L. E.* Dynamics of a fluid interface // *Chem. Eng. Sci.* 1960. V. 12. № 2. P. 98—108.
9. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.*: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.1.1987