

УДК 532.546.013

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

ЗОБНИН А. И., КУДРЯВЦЕВ Б. А., ПАРТОН В. З.

Рассматривается возможность исследования фильтрации в существенно неоднородных системах посредством анализа модельных периодических структур [1]. В акустическом приближении получено интегродифференциальное уравнение, описывающее движение вязкой жидкости в жесткой пористой среде периодической структуры. Используется представление вектора скорости и давления в виде асимптотических рядов по малому параметру, характеризующему размер ячейки периодичности, а также известная процедура усреднения линеаризованных уравнений гидродинамики с малыми коэффициентами вязкости [2, 3]. Представлено решение локальной задачи на ячейке периодичности для структуры, состоящей из двоякопериодической системы бесконечно длинных стержней кругового сечения и сжимаемой вязкой жидкости, заполняющей пространство между ними, а также для структуры, образованной системой ортогональных, заполненных вязкой жидкостью прямолинейных каналов в твердом теле.

1. Рассматривается сжимаемая вязкая жидкость, заполняющая объем Ω_f , образованный полостями жесткого пористого тела с периодической структурой. Каждый период Y состоит из жидкой части Y_j и твердой части Y_s с гладкой границей Γ , причем объединения всех частей Y_j и Y_s являются связными множествами [2]. Примером подобной периодической структуры может служить заполненная жидкостью система ортогональных прямолинейных каналов. Здесь периодически повторяющимся элементом среды — ячейкой периодичности — является куб с ребром ε , малый по сравнению со всем телом (фиг. 1). В дальнейшем ε рассматривается как малый безразмерный параметр.

В акустическом приближении обычно пренебрегают вязкостью жидкости, но при решении локальной задачи на ячейке периодичности необходимо учитывать малый коэффициент вязкости [2]. Линеаризованные уравнения Навье — Стокса для сжимаемой баротропной жидкости имеют вид [2]

$$\rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t = \text{grad } p + \nu \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v} + \eta \varepsilon^2 \text{grad div } \mathbf{v} \quad (1.1)$$

$$\partial p / \partial t + \rho_0 c^2 \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

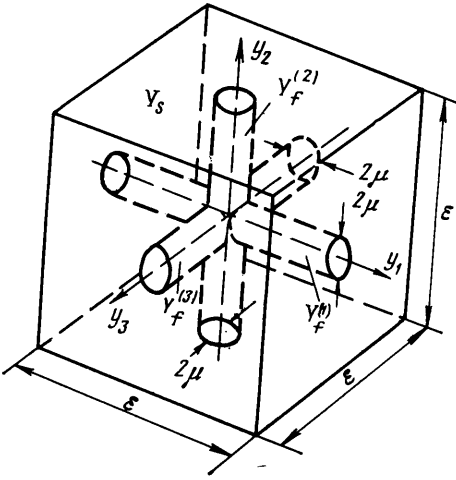
где $\nu \varepsilon^2$, $\eta \varepsilon^2$ — коэффициенты вязкости, p и \mathbf{v} — возмущения давления и скорости, ρ_0 — плотность в невозмущенном состоянии, c — скорость звука.

В соответствии с известной процедурой двухмасштабных разложений будем искать \mathbf{v} и p в виде [2]

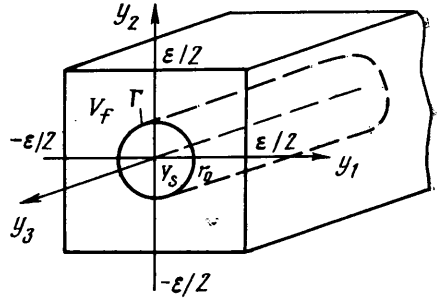
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x}, y, t) + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, y, t) + \dots \quad (1.3)$$

$$p = p^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon p^{(1)}(\mathbf{x}, y, t) + \dots \quad (1.4)$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{x} / \varepsilon$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, а функции $p^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(0)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$ периодичны по переменным $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ с периодом Y .



Фиг. 1



Фиг. 2

После подстановки (1.3), (1.4) в (1.1), (1.2) и удерживания в них членов порядка ϵ° получаются следующие равенства для Y_f :

$$\rho_0 \partial \mathbf{v} / \partial t = -\text{grad}_y p^{(1)} - \text{grad}_x p^{(0)} + \nu \Delta_y \mathbf{v}^{(0)} \quad (1.5)$$

$$\text{div}_y \mathbf{v}^{(0)} = 0 \quad (1.6)$$

$$\partial p / \partial t + \rho_0 c^2 (\text{div}_x \mathbf{v}^{(0)} + \text{div}_y \mathbf{v}^{(1)}) = 0 \quad (1.7)$$

где индексами x и y отмечены переменные, по которым проводятся соответствующие операции.

Уравнения (1.5), (1.6) относятся к локальной задаче на ячейке периодичности, решение которой $\mathbf{v}^{(0)}$ должно удовлетворять нулевым начальным условиям и нулевым граничным условиям на Γ , а также условиям периодичности по переменным y .

Применение к (1.7) оператора усреднения по локальным переменным

$$\langle u \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} u \, dy \quad (1.8)$$

где $|Y|$ — объем ячейки периодичности, позволяет установить макроскопическое уравнение акустики для среды, заполняющей пористое тело

$$\pi_0 \partial p^{(0)}(\mathbf{x}, t) / \partial t + \rho_0 c^2 \text{div}_x (\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (1.9)$$

где $\pi_0 = |Y_f| / |Y|$ — пористость тела. При выводе (1.9) учтено условие периодичности $\mathbf{v}^{(1)}$ по y и условие «прилипания» на Γ : $\mathbf{v}^{(1)} = 0$.

К уравнениям локальной задачи (1.5), (1.6) можно применить преобразование Лапласа по t и получить с учетом нулевых начальных условий для $\mathbf{v}^{(0)}$ и p соотношения

$$\rho_0 s \mathbf{V}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = -\text{grad}_y P^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) - \text{grad}_x P^{(0)}(\mathbf{x}, s) + \nu \Delta_y \mathbf{V}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \quad (1.10)$$

$$\text{div}_y \mathbf{V}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = 0 \quad (1.11)$$

в которых изображения по Лапласу с параметром s обозначаются соответствующими прописными буквами.

Представления

$$V_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = V_{in}(\mathbf{y}, s) \partial P^{(0)}(\mathbf{x}, s) / \partial x_n \quad (1.12)$$

$$P^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = P_n(\mathbf{y}, s) \cdot \partial P^{(0)}(\mathbf{x}, s) / \partial x_n \quad (i, n=1, 2, 3)$$

дают возможность свести (1.10), (1.11) к следующей системе уравнений

локальной задачи:

$$\rho_0 s V_{in}(y, s) = -\partial P_n(y, s) / \partial y_i - \delta_{in} + \nu \Delta_y V_{in}(y, s) \quad (1.13)$$

$$\partial V_{in}(y, s) / \partial y_i = 0 \quad (1.14)$$

для определения Y -периодических функций $V_{in}(y, s)$ и $P_n(y, s)$, причем $V_{in}=0$ на границе Γ .

После решения этой системы из (1.12) находится изображение $V^{(0)}(\mathbf{x}, y, s)$, которое после усреднения (1.8) и перехода к оригиналу используется для преобразования макроскопического уравнения (1.9) к виду

$$\pi_0 \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \rho_0 c^2 \int_0^t \langle v_{in} \rangle(t-\tau) \frac{\partial^2 p^{(0)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_i \partial x_n} d\tau = 0 \quad (1.15)$$

Интегродифференциальное уравнение (1.15) относительно усредненного давления $p^{(0)}$ является основным разрешающим уравнением для исследования акустических волн в вязкой жидкости, заполняющей пористое тело. При этом приближенные выражения для вектора скорости будут определяться по следующим формулам (при $\varepsilon \rightarrow 0$):

$$v_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t v_{in}(y, t-\tau) \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_n} d\tau + \dots$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \int_0^t p_n(y, t-\tau) \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_n} d\tau + \dots$$

а в качестве усредненных значений v_i и p можно использовать

$$\langle v_i \rangle = \langle v_i^{(0)} \rangle(\mathbf{x}, t), \quad \langle p \rangle = p^{(0)}(\mathbf{x}, t)$$

2. Рассматривается решение локальной задачи (1.13), (1.14) при условии зависимости функций V_{in} , P_n только от переменных y_1 , y_2 (локальная плоская задача). Предполагается, что твердое пористое тело образовано двоякопериодической системой бесконечно длинных стержней, расположенных параллельно оси x_3 на равных расстояниях ε от оси одного до оси другого. Поперечные сечения стержней считаются круговыми и за ячейку периодичности принимается квадрат $|y_1| < \varepsilon/2$, $|y_2| < \varepsilon/2$ с круговой жесткой областью радиуса r_0 в центре (фиг. 2). Для пористого тела указанной структуры локальная задача (1.13), (1.14) сводится к системе уравнений

$$\rho_0 s V_{\alpha\beta} = -\partial P_\beta / \partial y_\alpha - \delta_{\alpha\beta} + \nu \Delta_y V_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

$$\rho_0 s V_{33} = -1 + \nu \Delta_y V_{33} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V_{1\alpha}}{\partial y_1} + \frac{\partial V_{2\alpha}}{\partial y_2} = 0$$

$$\Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

с условиями двоякопериодичности функций $V_{\alpha\beta}$, V_{33} , P_β , по y_1 , y_2 и с нулевыми граничными условиями на Γ (при $r=r_0$)

$$V_{\alpha\beta} = 0, \quad V_{33} = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) будет удовлетворяться тождественно, если ввести вспомогательные функции Ψ_α ($\alpha=1, 2$) с помощью равенств

$$V_{1\alpha} = \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial y_2} - \frac{\delta_{1\alpha}}{\rho_0 s}, \quad V_{2\alpha} = -\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial y_1} - \frac{\delta_{2\alpha}}{\rho_0 s} \quad (2.4)$$

Используя соотношения (2.4), можно исключить P_α из (2.1). В результате получаются следующие уравнения относительно Ψ_α :

$$\Delta_\nu (\nu \Delta_\nu \Psi_\alpha - \rho_0 s \Psi_\alpha) = 0 \quad (2.5)$$

Решение (2.5) представимо в виде суммы двух слагаемых $\Psi_\alpha = \Psi_{\alpha\nu} + \Psi_{\alpha 0}$, где $\Psi_{\alpha\nu}$ — решение уравнения (2.6)

$$\Delta_\nu \Psi_{\alpha\nu} - \Psi_{\alpha\nu} \rho_0 s / \nu = 0 \quad (2.6)$$

а $\Psi_{\alpha 0}$ — гармонические функции, соответствующие решению (2.1), (2.2) при $\nu=0$. В дальнейшем будет использоваться и функция $\Phi_{\alpha 0} / \rho_0 s$, сопряженная к $\Psi_{\alpha 0}$

$$\frac{\partial \Psi_{\alpha 0}}{\partial y_1} = \frac{1}{\rho_0 s} \frac{\partial \Phi_{\alpha 0}}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial \Psi_{\alpha 0}}{\partial y_2} = -\frac{1}{\rho_0 s} \frac{\partial \Phi_{\alpha 0}}{\partial y_1} \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) представления (2.4) переходят в

$$V_{11} = -\frac{1}{\rho_0 s} \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial y_1} - \frac{1}{\rho_0 s} + \frac{\partial \Psi_{1\nu}}{\partial y_2}, \quad V_{21} = -\frac{1}{\rho_0 s} \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial y_2} - \frac{\partial \Psi_{1\nu}}{\partial y_1}$$

$$V_{12} = -\frac{1}{\rho_0 s} \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Psi_{2\nu}}{\partial y_2}, \quad V_{22} = -\frac{1}{\rho_0 s} \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial y_2} - \frac{1}{\rho_0 s} - \frac{\partial \Psi_{2\nu}}{\partial y_1}$$

Гармоническую функцию $\Phi_{10}(y_1, y_2)$, удовлетворяющую условиям Y -периодичности, определим в виде ряда [4]

$$\Phi_{10} = \operatorname{Re} \left\{ A_0 \left[z - \frac{\varepsilon^2}{\pi} \zeta(z) \right] + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+4} \frac{r_0^{2k+4} \wp^{(2k+1)}(z)}{(2k+3)!} \right\} \quad (2.8)$$

где $z = y_1 + iy_2 = re^{i\theta}$, $\zeta(z)$ и $\wp(z)$ — функции Вейерштрасса, а A_0, A_{2k+4} ($k=0, 1, 2, \dots$) — действительные постоянные.

Поскольку функция $\Psi_{1\nu}$, удовлетворяющая уравнению (2.6), быстро затухает при удалении от контура $\Gamma: |z|=r_0$ (решение типа погранслоя), при построении решения уравнения (2.6) можно не учитывать условия периодичности для $\Psi_{1\nu}$ и определять эту функцию в виде

$$\Psi_{1\nu} = \frac{1}{\rho_0 s} \sum_{m=0}^{\infty} B_m K_{2m+1}(\gamma) \sin(2m+1)\theta \quad (2.9)$$

где $K_{2m+1}(\gamma)$ — функция Макдональда, а $\gamma = r\sqrt{\rho_0 s/\nu}$.

Постоянные A_0, A_{2m+4}, B_m ($m=0, 1, 2, \dots$) находятся из условий (2.3), которые в полярных координатах r, θ имеют вид

$$-\frac{1}{\rho_0 s} \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Psi_{1\nu}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} = \frac{1}{\rho_0 s} \cos \theta \quad (2.10)$$

$$-\frac{1}{\rho_0 s} \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Phi_{10}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} - \frac{\partial \Psi_{1\nu}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{\rho_0 s} \sin \theta$$

При подстановке (2.8), (2.9) в (2.10) можно воспользоваться известными разложениями функций Вейерштрасса [4]

$$\frac{\wp^{(2k+2)}(z)}{(2k+3)!} = \frac{1}{z^{2k+4}} + \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k+1} z^{2j} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

$$\xi(z) = \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_{j,0}}{2j+1} z^{2j+1}$$

$$r_{j,k} = C_{2j+2k+1}^{2j} g_{j+k+1} e^{-2j-2k-2}, \quad g_{j+k+1} = \sum'_{m,n} (m+in)^{-2j-2k-2}$$

причем штрих означает, что сумма берется по всем целым m и n , кроме $m=n=0$.

Из граничных условий (2.10) следует бесконечная система алгебраических уравнений относительно B_0, B_j, A_0, A_{2j+2}

$$B_0 = \frac{2A_0 r_0}{\pi \lambda^2 \gamma_0 K_2(\gamma_0)}, \quad B_j = \frac{2A_{2j+2} r_0}{\gamma_0 K_{2j+2}(\gamma_0)} \quad (2.12)$$

$$A_0 = -\frac{\pi \lambda^2}{\pi \lambda^2 + c_0} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{4k} \lambda^{4k} g_{2k} \right) \quad (2.13)$$

$$A_{2j+2} c_j - \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k+2} \lambda^{2j+2k+1} \left(R_{j,k} - \frac{\lambda^2}{\pi \lambda^2 + c_0} R_{j>0} R_{0,k} \right) = \frac{\lambda^{2j+2}}{\pi \lambda^2 + c_0} R_{j,0} \quad (2.14)$$

$$\lambda = r_0 / \varepsilon, \quad c_j = 1 - 2(2j+1) K_{2j+1}(\gamma_0) / (\gamma_0 \cdot K_{2j+2}(\gamma_0))$$

$$\gamma_0 = r_0 \sqrt{\rho_0 s / \nu}, \quad R_{j,k} = r_{j,k} e^{2j+2k+2} \quad (j=1, 2, \dots)$$

Функции V_{12}, V_{22} строятся аналогичным образом с использованием для Φ_{20}, Ψ_{2v} следующих представлений:

$$\Phi_{20} = -\operatorname{Re} \left\{ A_0 \left[iz - \frac{\varepsilon^2}{\pi} \xi(iz) \right] + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+4} \frac{r_0^{2k+4} \wp^{(2k+1)}(iz)}{(2k+3)!} \right\} \quad (2.15)$$

$$\Psi_{2v} = -\frac{1}{\rho_0 s} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m K_{2m+1}(\gamma) \cos(2m+1)\theta \quad (2.16)$$

Подстановка (2.15) и (2.16) в граничные условия (2.3)

$$-\frac{1}{\rho_0 s} \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Psi_{2v}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} = \frac{1}{\rho_0 s} \sin \theta$$

$$-\frac{1}{\rho_0 s} \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} - \frac{\partial \Psi_{2v}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{1}{\rho_0 s} \cos \theta$$

и учет разложений (2.11) по-прежнему приводит к соотношениям (2.12)–(2.14), а следовательно, к тем же значениям коэффициентов.

Для определения средних значений $\langle V_{\alpha\beta} \rangle$ ($\alpha, \beta=1, 2$) следует произвести интегрирование по области Y_f (фиг. 2) с учетом периодичности $\Phi_{\alpha 0}$

и быстрого затухания $\Psi_{\alpha\nu}$ с удалением от Γ

$$\langle V_{11} \rangle = \langle V_{22} \rangle = -\frac{1}{\rho_0 s} (1 + 2A_0), \quad \langle V_{12} \rangle = \langle V_{21} \rangle = 0 \quad (2.17)$$

Функцию V_{33} , удовлетворяющую уравнению (2.1) и нулевому граничному условию при $r=r_0$, можно представить в виде (2.18)

$$V_{33} = \frac{1}{\rho_0 s} \frac{K_0(\gamma)}{\gamma_0 K_0(\gamma_0)} - \frac{1}{\rho_0 s} \quad (2.18)$$

Тогда

$$\langle V_{33} \rangle = \frac{2\pi\lambda^2}{\rho_0 s} \frac{K_1(\gamma_0)}{\gamma_0 K_0(\gamma_0)} - \frac{1 - \pi\lambda^2}{\rho_0 s} \quad (2.19)$$

Таким образом, макроскопическое уравнение акустики имеет для данной структуры следующий вид:

$$\pi_0 \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \rho_0 c^2 \int_0^t \langle v_{kk} \rangle (t - \tau) \frac{\partial^2 p^{(0)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_k^2} d\tau = 0 \quad (2.20)$$

где изображения по Лапласу для $\langle v_{\alpha\alpha} \rangle$ и $\langle v_{33} \rangle$ определяются формулами (2.17) и (2.19). При этом усредненные компоненты вектора скорости будут определяться соотношениями

$$\langle v_j^{(0)} \rangle(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \langle v_{jj} \rangle(t - \tau) \frac{\partial^2 p^{(0)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_j} d\tau$$

в которых суммирование по j не производится.

Приближенные значения коэффициентов A_k ($k=0, 1, 2, \dots$) можно найти из системы (2.13), (2.14) в виде степенных разложений $A_k = \alpha_{k1}\lambda^2 + \alpha_{k2}\lambda^4 + \dots$ по параметру λ ($\lambda < 0,5$).

Если в расчетах сохранить члены по λ^3 , то получатся простые приближенные формулы

$$\begin{aligned} \langle V_{11} \rangle = \langle V_{22} \rangle &= -\frac{1}{\rho_0 s} \frac{c_0 - 1 + \pi_0}{c_0 + 1 - \pi_0} \\ \langle V_{33} \rangle &= -\frac{\pi_0}{\rho_0 s} \left[1 - \frac{2(1 - \pi_0)}{\pi_0} \frac{K_1(\gamma_0)}{\gamma_0 K_0(\gamma_0)} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $\pi_0 = 1 - \pi\lambda^2$ — пористость среды.

Вид ядер интегродифференциального уравнения (2.20) в наиболее интересном диапазоне малых времен можно получить, обращая (2.21) для больших s

$$\begin{aligned} \langle v_{11} \rangle = \langle v_{22} \rangle &= -\frac{\pi_0}{\rho_0 (2 - \pi_0)} \left(1 - \frac{2\kappa}{2 - \pi_0} \sqrt{t} + \dots \right) \\ \langle v_{33} \rangle &= -\frac{\pi_0}{\rho_0} (1 - \kappa \sqrt{t} + \dots), \quad \kappa = 4(1 - \pi_0) \sqrt{v} / (\pi_0 r_0 \sqrt{\pi \rho_0}) \end{aligned}$$

В качестве простейшей иллюстрации рассматривается одномерная задача для полупространства $x_1 \geq 0$, на границе которого внезапно повышается давление

$$p^{(0)}(0, t) = p_0 H(t) \quad (2.22)$$

где $H(t)$ — функция Хэвисайда.

Решение задачи (2.20), (2.22) операционным методом дает следующее изображение решения:

$$P^{(0)}(x_1, s) = \frac{p_0}{s} \exp \left[-\frac{x_1 s \sqrt{2-\pi_0}}{c} \left(1 + \frac{\kappa \sqrt{\pi}}{2(2-\pi_0) \sqrt{s}} + \dots \right) \right] \quad (2.23)$$

Если вязкостью жидкости можно пренебречь ($\nu=0$), то оригинал (2.23)

$$p^{(0)}(x_1, t) = p_0 H(vt - x_1)$$

описывает волну с неразмытым фронтом, распространяющуюся в пористой среде со скоростью $v=c/\sqrt{2-\pi_0}$ меньшей, чем скорость волны в самой жидкости.

Для вязкой жидкости ($\nu \neq 0$) обращение (2.23) при больших s приводит к решению

$$p^{(0)}(x_1, t) = p_0 \operatorname{erfc} \frac{x_1 a}{\sqrt{vt - x_1}} H(vt - x_1), \quad a = \frac{(1-\pi_0) \sqrt{\nu}}{\pi_0 (2-\pi_0) r_0 \sqrt{\pi} \rho_0}$$

согласно которому сразу после приложения давления к границе $x_1=0$ в пористой среде начинает распространяться волна с размытым фронтом и передняя его часть движется с той же скоростью v .

Волны, распространяющиеся в направлении оси x_3 вдоль стержней каркаса, имеют аналогичный вид, только скорость их равна скорости c волн в самой жидкости.

3. Рассматривается локальная пространственная задача (1.13)–(1.14) для жесткого тела с системой заполненных вязкой жидкостью ортогональных капилляров (фиг. 1). Для простоты их сечения считаются одинаковыми круглыми с радиусом $r_0 = \mu \epsilon$, малым по сравнению с размером ячейки ϵ ($\mu \ll 1$), что дает возможность использовать для решения принцип расщепления [3].

Для капилляра $Y_j^{(3)} = \{y : |y_3| \leq \epsilon/2, y_1^2 + y_2^2 \leq r_0^2\}$ линии тока можно принять параллельными оси y_3 всюду вне зоны пересечения с другими капиллярами и считать отличными от нуля только V_{3k} ($k=1, 2, 3$). Из (1.14) следует, что $V_{3k} = V_{3k}(y_1, y_2, s)$, а из (1.13) с учетом условия периодичности по координате y_3 имеем

$$P_\alpha = -y_\alpha + F_\alpha(s) \quad (\alpha=1, 2), \quad P_3 = F_3(s) \quad (3.1)$$

$$\rho_0 s V_{3k} + \delta_{3k} = \nu \Delta_y V_{3k}$$

Из уравнения (3.1) и нулевых граничных условий на стенке капилляра следует, что $V_{31} = V_{32} = 0$ и что в полярной системе координат r, θ функция $V_{33}(r)$ будет удовлетворять уравнению

$$\rho_0 s V_{33} + 1 = \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_{33}}{dr} \right)$$

с нулевым граничным условием при $r=r_0$.

Решение этой задачи выражается через функцию Бесселя $I_0(x)$

$$V_{33}(r, s) = -\frac{1}{\rho_0 s} \left(1 - \frac{I_0(\gamma)}{I_0(\gamma_0)} \right) \quad (3.2)$$

Точно такие же решения годятся и для других капилляров $Y_f^{(1)}$ и $Y_f^{(2)}$, поэтому решение локальной задачи на ячейке периодичности Y всюду вне зоны пересечения капилляров, согласно принципу срачивания, определяется так: V_{ii} ($i=1, 2, 3$) выражается формулой (3.2), если $y \in Y_f^{(i)}$, иначе $V_{ii}=0$, а $V_{ij}=0$ при $i \neq j$ всюду.

После осреднения (1.8) получаются изображения

$$\langle V_{ii} \rangle = \frac{2\pi}{\varepsilon^2} \int_0^{r_0} V_{ii}(r) r dr = -\frac{\pi_0}{3\rho_0 s} \left(1 - \frac{2I_1(\gamma_0)}{\gamma_0 I_0(\gamma_0)} \right)$$

а после перехода к оригиналам — сами ядра интегродифференциального уравнения (2.20)

$$\langle v_{ii} \rangle = -\frac{4\pi_0}{3\rho_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2} \exp\left(-\frac{\nu\alpha_k^2}{\rho_0 r_0^2} t\right) \quad (3.3)$$

Здесь α_k — нули функции Бесселя $J_0(x)$, $\pi_0 = 3\mu^2$ — пористость среды. Ядра оказываются вырожденными и при замене ряда (3.3) любой частичной суммой уравнение (2.20) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Можно и в данном случае рассмотреть задачу о внезапном приложении давления на границе полупространства $x \geq 0$, аналогичную задаче, решенной в разд. 2. За x можно принять произвольную ось, поскольку осредненный материал изотропен. Решение данной задачи операционным методом приводит к соотношению

$$P^{(0)}(x, s) = \frac{p_0}{s} \exp\left[-\frac{\sqrt{3}xs}{c} \left(1 - \frac{2I_1(\gamma_0)}{\gamma_0 I_0(\gamma_0)}\right)^{-1/2}\right] \quad (3.4)$$

Для малых времен (больших s) изображение (3.4) упрощается и решение задачи

$$p^{(0)}(x, t) = p_0 H(\nu t - x)$$

описывает ударную волну, распространяющуюся со скоростью $v = c/\sqrt{3}$. Для больших времен (малых s) изображение (3.4) переходит в

$$P^{(0)}(x, s) = \frac{p_0}{s} \exp\left(-\frac{x\sqrt{24\nu}}{cr_0\sqrt{\rho_0}} \sqrt{s}\right)$$

что соответствует автомодельному решению

$$p^{(0)}(x, t) = p_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{6\nu}}{cr_0\sqrt{\rho_0}t}\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Швидлер М. И. Об условном осреднении неустановившихся фильтрационных полей в случайных композитных пористых средах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1986, № 5, с. 69–74.
2. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
3. Базвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
4. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1987