

УДК 532.546:536.25

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ  
В ВИБРАЦИОННОМ ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНО  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

ГЕРШУНИ Г. З., ЖУХОВИЦКИЙ Е. М.

Плоскопараллельное конвективное течение в вертикальном слое между границами, поддерживаемыми при разных температурах, становится неустойчивым при достижении числом Грасгофа критического значения (см. [1]). В [2, 3] рассмотрено влияние на устойчивость этого течения высокочастотной гармонической вибрации вертикального направления. Наличие вибрации в неизотермической жидкости приводит к появлению нового механизма неустойчивости, который действует даже в условиях полной невесомости [4]. Взаимодействие обычных механизмов неустойчивости в статическом поле тяжести и вибрационного механизма, как показано в [2, 3], существенно влияет на устойчивость конвективного течения. В данной работе рассматривается устойчивость течения при произвольном направлении оси вибрации в плоскости слоя и определяются характеристики устойчивости относительно пространственных нормальных возмущений.

Рассмотрим плоский вертикальный слой жидкости с границами  $x = \pm h$ , поддерживаемыми при постоянных разных температурах  $\mp \Theta$ . Вся система (стенки полости вместе с жидкостью) совершает высокочастотные гармонические вибрации вдоль направления, характеризуемого единичным вектором  $\mathbf{n}(0, \sin \alpha, \cos \alpha)$ , где  $\alpha$  — угол, образуемый осью вибрации с вертикальной осью  $z$ , направленной вверх. Осредненное конвективное течение описывается безразмерными уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + G(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + T \boldsymbol{\gamma} + \frac{R_v}{GP} (\mathbf{w} \nabla) (T \mathbf{n} - \mathbf{w})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + G \mathbf{v} \Delta T = \frac{1}{P} \Delta T \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{w} = \nabla T \times \mathbf{n}$$

$$G = \frac{g \beta \Theta h^3}{\nu^2}, \quad R_v = \frac{(\beta b \Omega \Theta h)^2}{2 \nu \chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $T$ ,  $p$  — осредненные поля скорости, температуры и давления;  $\mathbf{w}$  — соленоидальная часть поля  $T \mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ . В уравнения входят безразмерные параметры: число Грасгофа  $G$ , характеризующее конвекцию в статическом поле тяжести; вибрационное число Рэлея  $R_v$ , определяющее вибрационное воздействие ( $b$  и  $\Omega$  — амплитуда смещения и круговая частота вибрации); число Прандтля  $P$ . В качестве единиц расстояния, времени, скорости, давления и температуры приняты соответственно  $h$ ,  $h^2/\nu$ ,  $g \beta \Theta h^2/\nu$ ,  $\rho g \beta \Theta h$  и  $\Theta$ .

На границах слоя заданы температуры, обращаются в нуль скорость и нормальная компонента вектора  $\mathbf{w}$  (пропорционального амплитуде пульсационной компоненты скорости); выполняются также условия замкнутости для векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ .

В основном плоскопараллельном течении имеем

$$v_{0x}=v_{0y}=0, \quad v_{0z}=v_0=1/6(x^3-x), \quad T_0=-x \quad (2)$$

$$w_{0x}=0, \quad w_{0y}=-x \sin \alpha, \quad w_{0z}=-x \cos \alpha; \quad p_0=\text{const}$$

Уравнения для возмущений получаются линеаризацией системы (1) около основного течения (2). Рассмотрим нормальные пространственные возмущения вида  $\exp[-\lambda t + i(k_y y + k_z z)]$ , где  $\lambda$  — декремент, а  $k_y$  и  $k_z$  — волновые числа вдоль соответствующих осей. Для зависящих от поперечной координаты амплитуд пространственных возмущений имеем краевую задачу (штрих означает производную по  $x$ )

$$-\lambda v_x + ik_z G v_0 v_x = -p' + (v_x'' - k^2 v_x) - \frac{iR_0}{GP} (k_y w_{0y} + k_z w_{0z}) w_x \quad (3)$$

$$-\lambda v_y + ik_z G v_0 v_y = -ik_y p + (v_y'' - k^2 v_y) - \frac{iR_0}{GP} (k_y w_{0y} + k_z w_{0z}) (w_y - \theta \sin \alpha)$$

$$-\lambda v_z + ik_z G v_0 v_z + G v_0' v_x = -ik_z p + (v_z'' - k^2 v_z) + \theta -$$

$$- \frac{iR_0}{GP} (k_y w_{0y} + k_z w_{0z}) (w_z - \theta \cos \alpha)$$

$$-\lambda \theta + ik_z G v_0 \theta + G T_0' v_x = \frac{1}{P} (\theta'' - k^2 \theta)$$

$$v_x' + i(k_y v_y + k_z v_z) = 0, \quad w_x' + i(k_y w_y + k_z w_z) = 0$$

$$w_y' - ik_y w_x = \theta' \sin \alpha, \quad w_z' - ik_z w_x = \theta' \cos \alpha \quad (k^2 = k_y^2 + k_z^2)$$

$$x = \pm 1: \quad v_x = v_y = v_z = 0, \quad \theta = 0, \quad w_x = 0$$

Спектральная задача (3) определяет характеристические декременты  $\lambda$  пространственных возмущений и собственные функции — амплитуды этих возмущений.

Покажем, что существуют преобразования, сводящие общую амплитудную задачу (3) для пространственных возмущений при произвольном угле  $\alpha$  к соответствующей задаче для плоских возмущений при  $\alpha=0$  (вертикальная вибрация). Запишем плоскую задачу для  $\alpha=0$ , которая получается при  $v_y=0$ ,  $w_y=0$ ,  $k_y=0$ ,  $k_z=k^*$ . Отмечая звездочкой сверху амплитуды и характеристики плоских возмущений вида  $\exp(-\lambda^* t + ik^* z)$ , будем иметь

$$-\lambda^* v_x^* + ik^* G^* v_0 v_x^* = -p^{*'} + (v_x^{*''} - k^{*2} v_x^*) - \frac{iR_0^*}{G^* P} k^* w_{0z} w_x^* \quad (4)$$

$$-\lambda^* v_z^* + ik^* G^* v_0 v_z^* + G^* v_0' v_x^* = -ik^* p^* + (v_z^{*''} - k^{*2} v_z^*) + \theta^* -$$

$$- \frac{iR_0^*}{G^* P} k^* w_{0z} (w_z^* - \theta^*)$$

$$-\lambda^* \theta^* + ik^* G^* v_0 \theta^* + G^* T_0' v_x^* = P^{-1} (\theta^{*''} - k^{*2} \theta^*)$$

$$v_x^{*'} + ik^* v_z^* = 0, \quad w_x^{*'} + ik^* w_z^* = 0, \quad w_z^{*'} - ik^* w_x^* = \theta^{*'}$$

$$x = \pm 1: \quad v_x^* = v_z^* = 0, \quad \theta^* = 0, \quad w_x^* = 0$$

Здесь теперь  $w_{0z} = -x$ .

Преобразования, сводящие пространственную амплитудную задачу (3) к соответствующей плоской задаче (4), таковы

$$\lambda = \lambda^*, \quad v_x = v_x^*, \quad k_y v_y + k_z v_z = k^* v_z^*, \quad p = p^* \quad (5)$$

$$w_x = c w_x^*, \quad k_y w_y + k_z w_z = c k^* w_z^*, \quad k_z \theta = k^* \theta^*$$

$$k_z G = k^* G^*, \quad (k_y \sin \alpha + k_z \cos \alpha) \theta = c k^* \theta^*$$

$$\frac{R_0}{G} (k_y \sin \alpha + k_z \cos \alpha) w_x = \frac{R_0^*}{G^*} k^* w_x^*$$

где постоянная  $c$  подлежит определению.

Из (5) получаются формулы, связывающие характеристики пространственных и плоских возмущений

$$G = \frac{G^*}{a}, \quad R_v = \frac{R_v^*}{[\sqrt{1-a^2} \sin \alpha + a \cos \alpha]^2} \quad (6)$$

$$k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = k^*, \quad a = \frac{k_z}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} = \frac{k_z}{k}$$

$$c = (k_y \sin \alpha + k_z \cos \alpha) / k_z$$

Таким образом, если известны критические числа  $G^*$  и  $R_v^*$ , определяющие границу устойчивости течения относительно плоских возмущений с волновым числом  $k^*$  при вертикальной вибрации ( $\alpha=0$ ), то по формулам (6) можно найти критические числа  $G$  и  $R_v$  трехмерных возмущений с волновыми числами  $k_y$  и  $k_z$  при произвольном угле наклона оси вибрации  $\alpha$ .

Из преобразований (6) следует, что в рассматриваемой проблеме базовой служит задача устойчивости течения при вертикальной вибрации ( $\alpha=0$ ) относительно плоских возмущений (4). Вводя функции тока полей  $v$  и  $w$ , эту задачу можно записать в виде ( $\varphi$  и  $f$  — амплитуды функций тока)

$$(\varphi^{IV} - 2k^{*2}\varphi'' + k^{*4}\varphi) + ik^*G^*[v_0''\varphi - v_0(\varphi'' - k^{*2}\varphi)] + \theta^{*'} + ik^* \frac{R_v^*}{G^*P} w_{0z}'(\theta^* - f) = -\lambda^*(\varphi'' - k^{*2}\varphi) \quad (7)$$

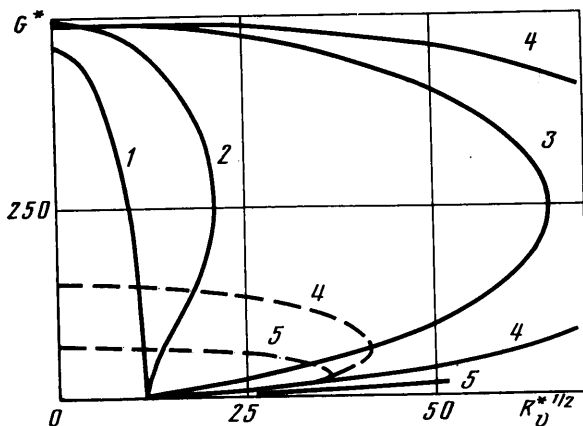
$$P^{-1}(\theta^{*''} - k^{*2}\theta^*) + ik^*G^*(T_0'\varphi - v_0\theta^*) = -\lambda^*\theta^*$$

$$f'' - k^{*2}f = \theta^{*'}$$

$$x = \pm 1: \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta^* = 0, \quad f = 0$$

Спектральная задача (7), как уже указывалось, решалась в [2, 3]. Кроме того, для получения дополнительной информации о характеристиках неустойчивости можно использовать данные [5], где решалась другая физическая задача — об устойчивости конвективного течения жидкого диэлектрика с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , линейно зависящей от температуры, в поперечном электрическом поле. Можно, однако, показать, что в случае слабой температурной неоднородности  $\epsilon$  получающаяся амплитудная задача формально совпадает с (7); сопоставление характеристик устойчивости достигается простым пересчетом параметров.

На фиг. 1 приведены (по данным [2, 3, 5]) границы устойчивости, определяемые задачей (7), на плоскости «вибрационное число Рэлея  $R_v^*$  — число Грасгофа  $G^*$ » (результат минимизации по волновому числу  $k^*$ ). Кривые 1—5 отвечают значениям числа Прандтля  $P=0,1, 1, 10, 20$  и 50; сплошные линии соответствуют монотонным модам, штриховые — колебательным. Области устойчивости примыкают к началу координат. При отсутствии вибрации ( $R_v^*=0$ ) неустойчивость при малых и конечных  $P$  определяется гидродинамической модой (развитие вихрей на границе встречных потоков). При  $P > 12,45$  более опасной становится колебательная мода, соответствующая нарастающим в потоках температурным волнам. Другой предельный случай  $G^*=0$  соответствует отсутствию статического поля тяжести (невесомость). Основное состояние при этом представляет собой квазиравновесие — имеются лишь высокочастотные конвективные колебания, но отсутствует осредненное течение. Устойчивость такого состояния изучалась в [4, 6], где было показано, что при достижении вибрационным числом Рэлея значения  $R_v^*=133,1$  возникает



Фиг. 1

вибрационно-конвективная неустойчивость в виде периодической вдоль оси  $z$  системы двумерных валов с осями, параллельными оси  $y$ .

Кривые устойчивости на фиг. 1 описывают взаимодействие различных механизмов неустойчивости — гидродинамического и волнового, с одной стороны, и вибрационно-конвективного — с другой. Как видно, наличие вибрации при всех числах Прандтля приводит к дестабилизации конвективного течения. Что же касается влияния конвективного течения на вибрационную неустойчивость, то при  $P < 0,27$  оно оказывается дестабилизирующим, а при  $P > 0,27$  и малых  $G^*$  (т. е. малой интенсивности конвективного течения) порог вибрационной неустойчивости повышается; при больших  $G^*$ , естественно, наступает дестабилизация, связанная с преобладанием механизмов неустойчивости течения.

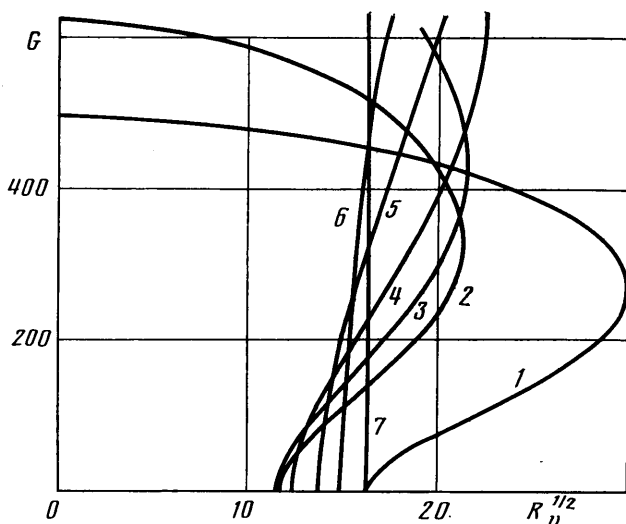
Фигура 1 построена для плоских возмущений. Критические параметры пространственных возмущений при вертикальной вибрации определяются формулами (6) ( $\alpha = 0$ )

$$G = G^*/a, \quad R_v = R_v^*/a^2 \quad (8)$$

Формулы (8) отображают критическую точку  $(G^*, R_v^*)$  в соответствующую точку  $(G, R_v)$ , которой отвечает пространственное возмущение с параметром  $a$ . Поскольку значения  $a$  заключены в пределах  $0 \leq a \leq 1$  ( $a = 1$  отвечает плоским возмущениям;  $a = 0$  — пространственным спиральным), из (8) следует, что  $G > G^*$  и  $R_v > R_v^*$ , т. е. пространственные возмущения менее опасны.

Перейдем теперь к рассмотрению произвольного направления оси вибрации ( $\alpha \neq 0$ ). Случай  $R_v = 0$  тривиален; при этом из (6) следует  $G = G^*/a$ , т. е. известный результат о том, что в вертикальном слое при отсутствии вибраций наиболее опасны плоские возмущения. Предельный случай  $G^* = 0$ , т. е. и  $G = 0$ , отвечает отсутствию статического поля тяжести. Критическое значение вибрационного числа Рэлея для пространственных возмущений при этом определяется второй из формул (6). Минимальное значение  $R_v$  по  $a$  находится из условия  $\partial R_v / \partial a = 0$  и равно  $R_v^*$ , а соответствующее значение параметра  $a_m = \cos \alpha$ . Этот результат понятен. Как показано в [4], квазиравновесие в невесомости теряет устойчивость при значении  $R_v = R_v^* = 133,1$ , и это связано с наиболее опасными плоскими возмущениями в виде ячеек в плоскости, построенной на векторах  $\mathbf{n}$  (ось вибрации) и  $\nabla T_0$  (равновесный градиент температуры). Именно этой ситуации и отвечает значение  $a_m = \cos \alpha$ .

В качестве примера общей ситуации рассмотрим угол наклона  $\alpha = 45^\circ$ . На фиг. 2 изображено семейство границ устойчивости для фиксированного значения  $P = 1$  и разных  $a$ ; кривые 1—7 соответствуют значениям



Фиг. 2

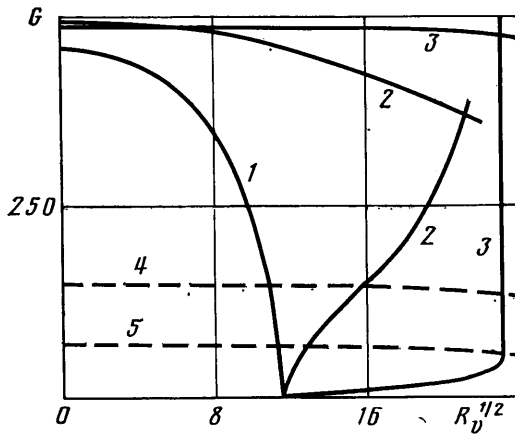
$a=1$  (плоские возмущения); 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,1 и 0 (спиральные возмущения с вертикальными осями). При указанных параметрах имеет место лишь монотонная неустойчивость. Верхняя граница области устойчивости обусловлена гидродинамическим механизмом и связана с плоскими возмущениями. Правая граница обусловлена действием вибрационно-конвективного механизма и связана с пространственными возмущениями. Эта граница должна быть найдена как огибающая семейства кривых, соответствующих разным  $a$ ; при этом вдоль огибающей значение параметра пространственных возмущений  $a$  непрерывно меняется: при уменьшении  $G$  от точки пересечения с ветвью 1 параметр  $a$  возрастает от 0,08 до  $\cos \alpha = 0,707$ . Заметим, что в задачах конвективной устойчивости ранее не приходилось сталкиваться с такой ситуацией, когда при конкуренции разных механизмов неустойчивости играли бы существенную роль пространственные возмущения с произвольными  $a$  (обычно граница области устойчивости определяется конкуренцией только двух типов возмущений — плоских и спиральных).

На фиг. 3–5 представлены границы устойчивости на плоскости  $(R_u, G)$  с учетом минимизации по параметру пространственных возмущений  $a$ . Кривые 1–5 отвечают числам Прандтля  $P=0,1, 1, 10, 20$  и 50 (сплошные кривые — монотонная мода, штриховые — волновая).

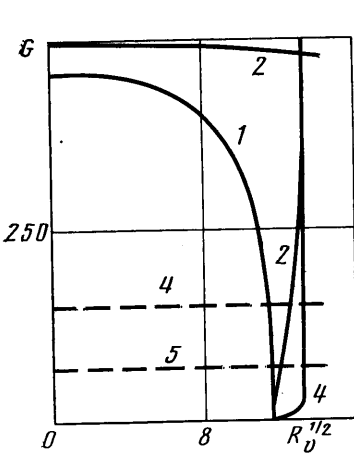
Фиг. 3 относится к углу наклона оси вибрации  $\alpha=30^\circ$ . Кривая 1 ( $P=0,1$ ) на всем своем протяжении является огибающей семейства кривых, зависящих от параметра  $a$ . Вдоль этой кривой при уменьшении  $G$  параметр  $a$  непрерывно изменяется от 1 до  $\cos \alpha = 0,87$  (точка на оси  $R_u^{1/2}$ ). Кривая 2 ( $P=1$ ), как и остальные кривые, образована двумя пересекающимися ветвями. Верхняя ветвь 2 соответствует плоской ( $a=1$ ) гидродинамической моде; правая ветвь отвечает пространственной вибрационной моде, вдоль нее  $a$  изменяется от значения 0,1 в точке пересечения до 0,87. Правая кривая 3 ( $P=10$ ) на значительном участке вертикальна — в широком интервале  $G$  ( $G > 60$ ) наиболее опасна вибрационная мода спиральной структуры с осями валов, параллельными оси  $z$  ( $a=0$ ). При больших  $P$  (кривые 4 и 5) верхняя граница области устойчивости определяется плоской волновой модой.

Качественно аналогичные явления смены плоской и пространственной мод имеют место при угле наклона  $\alpha=60^\circ$  (фиг. 4).

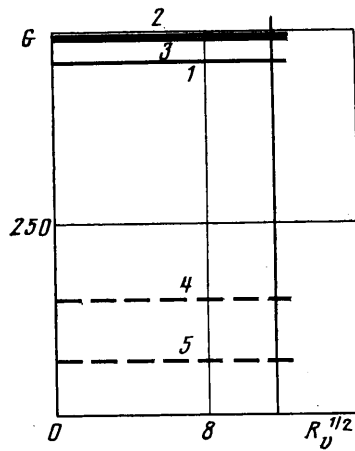
Наконец, обратимся к предельному случаю  $\alpha=90^\circ$ , соответствующему вибрациям горизонтального направления в плоскости слоя (вдоль оси  $y$ ,



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

фиг. 5). Верхняя граница области устойчивости определяется (в зависимости от значения числа Прандтля) монотонной или волновой плоскими модами. В этом случае критическое число Грасгофа не зависит от параметра вибрации  $R_v$  (при  $a=1$ , т. е.  $k^*=0$ , в спектральной задаче (7) отсутствует вибрационная сила). Правая граница области устойчивости при всех  $P$  определяется спиральной пространственной модой  $a=0$  и описывается вертикальной прямой  $R_v=133,1$  (в этом случае спектральная задача (3) не содержит скорости основного течения и совпадает с задачей устойчивости механического квазиравновесия в невесомости).

Если  $R_v < 133,1$ , то неустойчивость течения возбуждается при достижении числом Грасгофа критического значения  $G(P)$  и связана с плоскими возмущениями. Если же  $G < G(P)$ , то неустойчивость возникает при достижении значения  $R_v=133,1$  и связана со спиральными возмущениями вибрационной природы. Именно последняя ситуация наблюдалась в эксперименте [7], в котором в качестве рабочей жидкости использовался этиловый спирт ( $P=16,1$ ). Граница устойчивости течения при этом значении числа Прандтля определяется волновой модой; соответствующее критическое число Грасгофа  $G=210$ . В эксперименте авторы работали в области меньших значений  $G$ . При фиксированных  $G$  увеличение  $R_v$  приводило к неустойчивости — на фоне плоскопараллельного течения формировалась система вертикальных валов (спиральная мода). Измеренное

критическое число  $R_v = 1,3 \cdot 10^2$  хорошо согласуется с теоретическим значением.

Выше речь шла о неустойчивости конвективного течения в вертикальном слое при наличии вибрации, ось которой параллельна плоскости слоя. Совершенно иное воздействие оказывает вибрация, направление которой перпендикулярно плоскости слоя. Как показано в [4, 6], в случае, когда ось вибрации параллельна градиенту температуры, вибрационно-конвективный механизм неустойчивости не действует. Вибрационное воздействие приводит в этом случае к стабилизации течения — критическое число Грасгофа на гидродинамической и волновой модах неустойчивости монотонно возрастает с увеличением вибрационного параметра  $R_v$  [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Шарифулин А. Н. Устойчивость конвективного движения в вертикальном слое при наличии продольных вибраций // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 2. С. 186—188.
3. Шарифулин А. Н. Волновая неустойчивость свободноконвективного движения в вибрационном поле // Нестационарные процессы в жидкостях и твердых телах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 58—62.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3. С. 580—584.
5. Takashima M., Hamabata H. The stability of natural convection in a vertical layer of dielectric fluid in the presence of a horizontal ac electric field // J. Phys. Soc. Japan. 1984. V. 53. № 5. P. 1728—1736.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 12—19.
7. Заварыкин М. П., Зорин С. В., Пугин Г. Ф. Экспериментальное исследование вибрационной конвекции // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281. № 4. С. 815—816.
8. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шихов В. М. Устойчивость конвективного течения в вертикальном слое при наличии поперечной вибрации // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1987.

Пермь

Поступила в редакцию  
7.IV.1987