

УДК 532.529:541.182.45

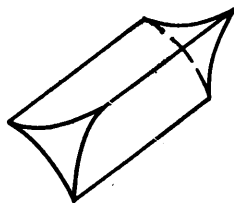
ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПЕНЕ

ГОЛЬДФАРБ И. И., КАНН К. Б., ШРЕЙБЕР И. Р.

Предложено модельное уравнение для описания движения жидкости в пене полиэдрической структуры. Введен безразмерный параметр, характеризующий структуру пены и представляющий собой отношение объемных плотностей энергии капиллярных и гравитационных сил. В случае, когда гравитационные силы преобладают над капиллярными, процесс вытекания можно рассматривать как кинематическую волну, описываемую уравнением Бюргерса. В противном случае капиллярное всасывание может быть описано квазилинейным параболическим уравнением.

1. Процессы перемещения жидкости в пене и истечения ее из пены являются предметом внутренней гидродинамики пен. Полиэдрические газожидкостные пены представляют собой совокупность большого числа беспорядочно ориентированных пленок. На стыке трех пленок имеются углощения — протяженные каналы (каналы Плато — Гиббса) с сечениями в виде треугольников, стороны которых представляют собой дуги окружностей (в дальнейшем — треугольники Плато) (фиг. 1). Континуальной характеристикой пены служит кратность $K=V/V_1$ — отношение объема пены V к объему содержащейся в ней жидкости V_1 . В высокократных пенах жидкость находится преимущественно в каналах. Важнейшей задачей внутренней гидродинамики пен является исследование процесса течения жидкости по системе связанных беспорядочно ориентированных каналов Плато. В [1–2] задача о течении жидкости в пенах рассматривалась на основе понятия «гидропроводности» пен и формулировалась в терминах теории фильтрации с некоторыми эмпирическими коэффициентами.

Пены являются объектом механики многофазных сред, и задачи внутренней гидродинамики пен можно решать методами механики сплошной среды [3]. Но при анализе процессов перемещения жидкости по пенным каналам и пленкам появляется трудность в определении условий на межфазных границах. Если эту границу считать свободной поверхностью, то граничным условием будет отсутствие трения: $\tau=0$. В этом случае уравнения гидродинамики, записанные для жидкости в пленках и каналах, давали бы струйные решения, что исключает возможность существования пен. Чтобы чистые жидкости вспенивались, в них добавляют поверхностно-активные вещества (ПАВ), которые не только снижают поверхностное натяжение, но и стабилизируют поверхностные слои жидкости. Мономолекулярный слой ПАВ на поверхности взаимодействует с жидкостью и вызывает ее торможение. Количественное описание этого явления содержится в [4]. Эксперименты [5] показывают, что движение жидкости в пенах медленное или ползущее. При этом трение, возникающее на границе, достаточно велико, что позволяет в первом приближении принять на границе условие прилипания. Заметим, однако, что отсутствие установившихся представлений о граничных условиях является одной из основных трудностей в гидродинамике пен.



Фиг. 1

2. Рассмотрим внутреннюю гидродинамику пен на основе континуальной механики многофазных сред, считая движение жидкости в каналах Плато микромасштабным течением [3]. Плотность пены можно представить в виде

$$\rho = \rho_1 \varphi + \rho_2 (1 - \varphi) \quad (2.1)$$

где φ — влагосодержание пены (величина, обратная кратности пены), а ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкости и газа соответственно.

Используя элементарные соотношения квазигомогенной модели двухфазной среды, можно получить выражение для изменения влагосодержания пены при изменении объема жидкости V_1 на ΔV_1 и объема газа V_2 на ΔV_2

$$\Delta \varphi = \varphi (1 - \varphi) \left[\frac{\Delta V_1}{V_1} - \frac{\Delta V_2}{V_2} \right] \quad (2.2)$$

Считая, что изменение объема жидкости происходит лишь путем изменения площади каналов S на ΔS , а объем пузырьков изменяется адиабатически, соотношение (2.2) можно переписать в виде

$$\Delta \varphi = \varphi (1 - \varphi) \left[\frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta P_2}{\gamma P_2 (1 + \Delta P_2 / P_2)} \right] \quad (2.3)$$

где P_2 — начальное давление в пузырьках, ΔP_2 — его возмущение, а γ — показатель адиабаты газа.

Варьируя (2.1) и подставляя вместо $\Delta \varphi$ его выражение (2.3), получим зависимость для возмущения плотности пены

$$\Delta \rho = \frac{\Delta P_2}{c^2} + \rho_1 \varphi (1 - \varphi) \frac{\Delta S}{S} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad (2.4)$$

$$c^2 = \left[\frac{\rho_1 \varphi (1 - \varphi)}{\gamma P_2} + \frac{m (1 - \varphi)}{RT_2} \right]^{-1}$$

где m — молекулярная масса газа, R — универсальная газовая постоянная, T_2 — температура газа. Величина c определяет скорость звука в пене, сжимаемость которой обусловлена лишь сжимаемостью газовой фазы. Найдем ее величину. При $P_2 = 10^5$ Па, $\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $\varphi = 0,01$, $m = 29$ кг/кмоль, $T_2 = 293$ К имеем $c = 100$ м/с. Оценим характерные скорости распространения возмущений в пене, обусловленные капиллярными эффектами и движением жидкости в каналах. Первый механизм дает величину $c' \approx P_c / (\rho_1 \varphi)$, второй $c'' \approx \rho_1 g S / \mu$, где P_c — капиллярное давление, g — ускорение свободного падения, μ — динамическая вязкость жидкости. При $P_c \sim 10^2$ Па, $S \approx 10^{-8}$ м² и $\mu = 10^{-3}$ Па·с получаются значения $c' \approx 1$ м/с и $c'' \approx 0,1$ м/с. Сравнение c , c' , c'' показывает, что время выравнивания давления в пузырьках пренебрежимо мало по сравнению с остальными характерными временами. Следовательно, в выражении (2.4) можно перейти к пределу при $c \rightarrow \infty$. Тогда, полагая $\rho_2 / \rho_1 \ll 1$, из (2.4) получим

$$\Delta \rho = \rho_1 \varphi (1 - \varphi) \Delta S / S \quad (2.5)$$

Это соотношение связывает изменение площади одиночного канала ΔS с изменением континуальной характеристики пены — ее плотности $\Delta \rho$.

Для каналов Плато с цилиндрическими боковыми поверхностями связь между давлениями газа в пузырьках P_2 и жидкости в каналах P_1 такова

$$P_2 - P_1 = \sigma / r \quad (2.6)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, а r — радиус кривизны боковой поверхности канала, связанный с площадью его поперечного сечения S зависимостью

$$r = \alpha_1 \sqrt{S}, \quad 1/\alpha_1^2 = \sqrt{3} - \pi/2 \quad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) можно получить связь вариации давления в каналах ΔP_1 с изменением площади их поперечного сечения ΔS и возмущением давления в пузырьках ΔP_2

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 + \frac{\sigma}{2\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{\Delta S}{S}$$

Если $c \rightarrow \infty$, то $\Delta P_2 \rightarrow 0$ и тогда

$$\Delta P_1 = \frac{\sigma}{2\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{\Delta S}{S} \quad (2.8)$$

3. Изучим течение жидкости в пенных каналах. Специфика задачи состоит в следующем: течение жидкости происходит в каналах с сечениями в виде треугольника Плато; с изменением давления в жидкости стенки каналов легко деформируются; на межфазной поверхности имеет место прилипание жидкости. Допустим, что жидкость в канале тяжелая и каналы произвольно ориентированы в пространстве. Рассмотрим течение в направлении вектора \mathbf{g} — ускорения свободного падения.

Уравнение неразрывности для течения жидкости в канале запишем в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

где u — средняя скорость течения жидкости в канале. Воспользовавшись решением уравнения Навье — Стокса для трубы произвольного сечения [6], обобщим это решение на случай тяжелой жидкости

$$u = - \frac{S}{\alpha_2 \mu} \left[\left\langle \frac{\partial P_1}{\partial x} \right\rangle - \rho_1 g \right] \quad (3.2)$$

где α_2 — некоторый численный коэффициент, а угловые скобки означают усреднение по направлениям движения жидкости.

Изменение формы поперечного сечения канала меняет лишь коэффициент α_2 . Для трубы круглого сечения $\alpha_2 = 8\pi$, для трубы треугольного сечения, по данным [6], $\alpha_2 = 34$. Авторы [7] провели численное интегрирование уравнения Навье — Стокса для поперечного сечения канала в форме треугольника Плато и получили значение $\alpha_2 = 49,1$.

Усреднение по направлениям движения жидкости в хаотически ориентированных каналах дает коэффициент $1/3$ [2]. С учетом этого совместное рассмотрение уравнений (2.8), (3.1) и (3.2) приводит к эволюционному уравнению для площади сечения канала Плато

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \beta_1 S \frac{\partial S}{\partial x} = \beta_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(S^{3/2} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (3.3)$$

$$\beta_1 = \frac{2\rho_1 g}{3\alpha_2 \mu}, \quad \beta_2 = \frac{\sigma}{6\alpha_1 \alpha_2 \mu}$$

Введем характерный линейный размер пенного пузырька d и обезразмерим уравнение (3.3), положив $x_+ = x/d$, $t_+ = t/t_0$, $S_+ = S/S_0$, где S_0 — начальное (невозмущенное) сечение канала, $t_0 = d/c_1$, а $c_1 = (2g\rho_1 S_0)/(3\alpha_2 \mu)$ — скорость линейной кинематической волны гравитационного стекания жидкости. Тогда (3.3) примет вид

$$\frac{\partial S_+}{\partial t_+} + S_+ \frac{\partial S_+}{\partial x_+} = \beta_* \frac{\partial}{\partial x_+} \left(S_+^{3/2} \frac{\partial S_+}{\partial x_+} \right) \quad (3.4)$$

$$\beta_* = \frac{\sigma}{4\alpha_1 \rho_1 g S_0^{3/2} d}$$

Уравнение (3.4) описывает микромасштабное движение жидкости в пене под действием гравитационных и капиллярных сил. Оно обезразмерено по внутренним масштабам пены: характерному линейному размеру пузырька d и скорости кинематической волны c_1 , поэтому безразмерный параметр β_* определяется структурой пены. Параметр β_* является отношением плотностей энергии, запасенной жидкостью в канале Плато под действием двух сил различной природы — капиллярных и гравитационных. В зависимости от величин основных характеристик пен — кратности и размера пузырька d — параметр β_* может принимать значения от 10^{-2} до 10^3 . Поэтому можно рассматривать два асимптотических предела уравнения (3.4): $\beta_* \ll 1$ и $\beta_* \gg 1$.

Чтобы перейти от микромасштабного описания к континуальному, достаточно воспользоваться связью (2.5).

Обезразмерив плотность пены (например, положив $\rho_+ = \rho / (\rho_1 \varphi (1 - \varphi))$) и подставив соотношение (2.5) для новой переменной в (3.4), получим эволюционное уравнение относительно ρ_+ , тождественное уравнению (3.4), где $S_+ = \rho_+$.

Далее эволюционное уравнение для пены будет рассматриваться в виде (3.4).

Найдем решение (3.4) в виде стационарной волны: $S_+(\eta) = S_+(x_+ - v_+ t_+)$. Подставив это соотношение в (3.4), получим

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[-v_+ S_+ + \frac{1}{2} S_+^2 - \frac{2}{3} \beta_* \frac{\partial S_+^{3/2}}{\partial \eta} \right] = 0$$

Полагая константу первого интегрирования равной нулю и проводя второе интегрирование, находим

$$S_+(x_+, t_+) = 2v_+ \operatorname{th}^2 \left[\frac{\sqrt{2v_+}}{4\beta_*} (x_+ - v_+ t_+) \right] \quad (3.5)$$

Анализ (3.5) показывает, что решение в виде стационарной волны существует при начальных и граничных условиях вида

$$\begin{aligned} x_+ = 0: S_+(0, t_+) &= c_1 \operatorname{th}^2 \left[-\frac{\sqrt{2}}{4\beta_*} c_1^{3/2} t_+ \right] \\ \eta = 0: S_+(x_+, t_+) |_{x_+ = v_+ t_+} &= 0 \end{aligned}$$

При других начальных и граничных условиях уравнение (3.4) необходимо решать численно.

4. В общем случае в эволюционном уравнении, описывающем распространение возмущений в рамках сформулированной выше модели, содержатся два члена, ответственных за гидродинамическую и диффузионную нелинейности. Соотношение между ними характеризуется величиной параметра β_* . Рассмотрим два различных режима течения жидкости в пене.

Низкокротная мелкодисперсная или высококротная крупнодисперсная пены ($\beta_* \gg 1$). В этом случае членом с гидродинамической нелинейностью можно пренебречь, и из (3.4) получается квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial S_+}{\partial t_+} = \beta_* \frac{\partial}{\partial x_+} \left(S_+^{3/2} \frac{\partial S_+}{\partial x_+} \right) \quad (4.1)$$

Уравнение подобного типа получается при исследовании распространения тепла в среде, свойства которой являются степенными функциями температуры [6]. Приведенное в [6] решение в терминах рассматриваемой задачи имеет вид $S_+^A \sim \eta^2$. Можно строго показать, что решение (3.5) в пределе при $\beta_* \rightarrow \infty$ переходит в S_+^A , полученное в [6]. Сходство уравнений свидетельствует о сходстве физических явлений. Например, в [6] обращается внимание на то, что скорость распространения волны опреде-

ляется не только параметром β_* , но и начальными условиями. В рассматриваемой задаче от совокупности начальных и граничных условий зависит не только скорость распространения стационарной волны, но и само ее существование.

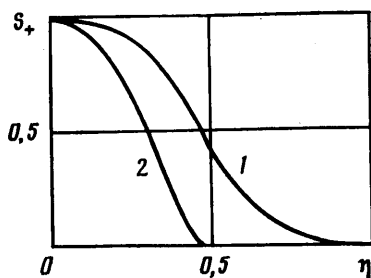
Низкократная крупнодисперсная или высокократная мелкодисперсная пены ($\beta_* \ll 1$). В этом случае определяющую роль играет член с гидродинамической нелинейностью, а член с диффузионной можно линеаризовать. Положив $S_+ = S_+^{(0)} + S_+^{(1)}$, перепишем уравнение (3.4) в виде уравнения Бюргера

$$\frac{\partial S_+^{(1)}}{\partial t_+} + S_+^{(0)} \frac{\partial S_+^{(1)}}{\partial x_+} + S_+^{(1)} \frac{\partial S_+^{(1)}}{\partial x_+} = \beta_* [S_+^{(0)}]^{1/2} \frac{\partial^2 S_+^{(1)}}{\partial x_+^2} \quad (4.2)$$

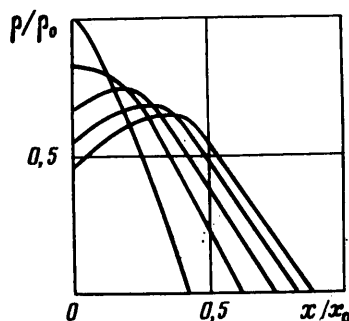
Решение (4.2), хорошо известно [8]

$$S_+^{(1)} = (v_+^{(1)} - S_+^{(0)}) \left[1 - \operatorname{th} \left[\frac{(V_+^{(1)} - S_+^{(0)}) \eta}{2\beta_* [S_+^{(0)}]^{1/2}} \right] \right] \quad (4.3)$$

На фиг. 2 приведены решения (4.3) и (3.5) (кривые 1 и 2). Для расчетов выбраны следующие значения характеристик пены: $K=400$, $d=5 \cdot 10^{-4}$ м.



Фиг. 2



Фиг. 3

5. В качестве примера рассмотрим задачу о всасывании жидкости в пену. Предположим, что на границе пены в точке $x=0$ сконцентрирован слой жидкости с массой M . Необходимо найти структуру и динамику волны капиллярного всасывания, когда $\beta_* \gg 1$ и выполняется соотношение (4.1). Используя соображения размерности и автомодельные свойства решений уравнения (4.1), можно установить общий вид решения [6]

$$\rho = \left(\frac{M^2}{Bt} \right) f(\chi), \quad \chi = \frac{x}{[M^{1/2} Bt]^{2/5}} \quad (5.1)$$

Здесь χ — автомодельная переменная, ρ , x и t — обычные размерные плотность, расстояние и время, B — константа в уравнении (4.1), записанном в размерном виде (размерный эквивалент β_*).

Функция $f(\chi)$ находится подстановкой (5.1) в (4.1)

$$f(\chi) = \left[\frac{1}{10} (\chi_0^2 - \chi^2) \right]^2$$

где χ_0 — постоянная интегрирования, определяемая из условия сохранения общего количества жидкости

$$\chi_0^{5/2} = 5 \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2) \sqrt{\pi}} \right]^{1/2} \quad (5.2)$$

Из соотношения (5.2), где Γ — гамма-функция, получается закон движения границы всасываемой жидкости $x_0 = \text{const } t^{2/5}$. Следовательно, скорость волны всасывания с течением времени убывает (пропорционально $t^{-3/5}$), что согласуется с физическими представлениями о свойствах пены, характеризующейся параметром $\beta_* \gg 1$.

На фиг. 3 приведены результаты расчета структуры волны всасывания через равные интервалы времени для указанных значений характеристик пены. Фронт волны всасывания движется с переменной скоростью, пропорциональной $t^{-3/5}$. Величины ρ_0 и x_0 определяются краевыми условиями.

Оценим характерные параметры волны всасывания. Для заданных ранее значений кратности K и размера пузырька d величина скорости c_1 оказывается равной $0,37 \cdot 10^{-3}$ м/с, а ширина фронта волны 0,15 м.

В заключение отметим, что процесс капиллярного всасывания жидкости в пенах напоминает фильтрацию сжимаемого газа [9]. Кроме эквивалентности математического описания процесса существует и физическая аналогия — податливость стенок каналов и принятое приближение о полном прилипании жидкости к стенкам канала. Так как регистрация передвижения фронтов плотности в пенах не представляет существенных трудностей (это можно сделать, например, с помощью кондуктометрических датчиков), то процесс капиллярного всасывания в пене с параметром $\beta_* \gg 1$ можно использовать для моделирования фильтрации сжимаемого газа.

Авторы признательны А. В. Берлянду за обсуждение проблем, связанных с решением уравнения (3.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кротов В. В. Структура, синерзис и кинетика разрушения полиэдрических дисперсных систем // Вопросы термодинамики гетерогенных систем и теории поверхностных явлений. Л.: Изд-во ЛГУ. 1982. Вып. 6. С. 110—191.
2. Канн К. Б. Стационарная фильтрация жидкости через пену // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 98—103.
3. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
4. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
5. Тихомиров В. К. Пены: Теория и практика их получения и разрушения. М.: Химия, 1983. 263 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 628 с.
7. Leonard R. A., Lemlich R. Laminar longitudinal flow between close-packed cylinders // Chem. Eng. Sci. 1965. V. 20. № 8. P. 790—791.
8. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
9. Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 286 с.

Тюмень

Поступила в редакцию
12.I 1987